

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

P. Flores, P. Gómez, A. Marín

Una vez realizado el análisis de contenido, en el que el foco de atención es el tema matemático que se va a enseñar, y examinado el aprendizaje del estudiante en el análisis cognitivo, en el análisis de instrucción vamos a estudiar qué medios dispone el profesor para lograr sus fines. El foco de atención será la enseñanza. Se trata de hacer una descripción de los medios que va a poner en práctica el profesor para lograr sus expectativas de aprendizaje.

Esta es una problemática muy compleja que puede enfocarse desde muchos puntos de vista. Aquí haremos una aproximación concreta que pretende dar respuesta a las siguientes cuestiones:

- a) analizar qué pueden hacer el profesor y los estudiantes para lograr aprendizajes, especialmente identificar qué es una tarea de enseñanza y qué elementos comporta,
- b) diseñar tareas acordes con las finalidades educativas planteadas,
- c) examinar aspectos de las tareas que se pueden alterar para lograr las expectativas de aprendizaje y
- d) organizar las tareas en una secuencia para cubrir las expectativas de aprendizaje.

Cada una de las cuestiones anteriores refiere a un organizador del currículo de los cinco que se abordan en este módulo: medios de enseñanza, condiciones para aplicarlos, actividades y gestión de clase para alcanzar las expectativas de aprendizaje y secuencia de enseñanza.

Pasamos a describir en las secciones siguientes los organizadores del currículo que vertebran el análisis de instrucción y que acabamos de mencionar: medios, materiales y recursos, condiciones para aplicarlos, analizados a partir de las actividades de enseñanza y aprendizaje, y concretadas en las tareas matemáticas, y de los elementos que pueden cambiar estas condiciones; por último estudiaremos la secuencia de enseñanza, concebida como una sucesión de actividades del profesor y del alumno, incluyendo tareas y atendiendo a diversos elementos.

INTRODUCCIÓN

Para lograr los objetivos de aprendizaje, el profesor planifica y luego pone en marcha en clase, una serie de actuaciones. Estas actuaciones pueden ser de diversos tipos, siempre con la expectativa de que los alumnos emprendan otras actuaciones. Podemos distinguir entonces dos componentes del proceso que conciernen a los dos sujetos implicados: actividades del profesor y actividades del alumno. El conjunto de actividades del profesor puede planificarlas de antemano. Las actividades de los estudiantes pueden prepararse, pero sólo se pondrán en marcha si son adecuadas al grupo de alumnos al que van dirigidas. Un profesor puede planificar un debate entre los alumnos, pero si no crea las condiciones adecuadas, o si los alumnos no están habituados a establecerlo, se producirá un desconcierto, que, en el mejor de los casos, derivará en un debate para acertar lo que el profesor espera que digan los alumnos.

Para poner en marcha las actividades, el profesor se vale de medios, recursos que ayudan a unos y otros a realizar las acciones previstas. El recurso más habitual en la enseñanza de las matemáticas es la propia voz del profesor, la escritura en una pizarra y los cuadernos de los alumnos. Pero estos no son los únicos ni necesariamente los mejores recursos para toda la enseñanza, y al profesor compete decidir cuáles son los recursos más adecuados para que las actividades que realizan unos y otros sean las más adecuadas para que los estudiantes lleven a cabo el proceso de aprendizaje que ha previsto en sus expectativas de aprendizaje.

En el proceso de planificación, el profesor debe seleccionar los recursos educativos para llevar a cabo las tareas de enseñanza que ha previsto, examinar cuáles existen para ello y preparar su enseñanza con arreglo a lo que ha decidido. Así un profesor que propone trabajar con un applet, tendrá que prever que su actuación se realice en un aula de informática, o bien advertirá a los alumnos con anterioridad de que deben traer sus computadoras, etc. Pero también debe estudiar qué cualidades educativas se derivan de emplear este applet y cuáles de realizar una tarea similar por medio de otros recursos. Sólo así podrá seleccionar las tareas, estableciendo qué se va a hacer en clase, en qué condiciones y con qué medios y recursos, siempre con vistas a lograr los objetivos de aprendizaje planteados.

1. MEDIOS DE ENSEÑANZA: MATERIALES Y RECURSOS

En este apartado nos vamos a ocupar de unos elementos que son mediadores en las actividades de enseñanza y aprendizaje, los materiales y recursos. En los siguientes puntos caracterizamos los materiales y recursos, los distinguimos según su intención educativa (comprender un concepto y ejercitar una destreza), destacamos que para distinguir las funciones de los materiales hay que establecer qué tareas pensamos realizar con ellos y, finalmente, planteamos criterios para estudiar su adecuación a los análisis previos.

1.1. Materiales y recursos

Aprender Matemáticas no sólo consiste en memorizar una serie de definiciones y destrezas sino también en comprender los conceptos y relacionarlos con las destrezas para saber en qué ocasiones y con qué problemas hay que utilizarlas. Cuando se afronta una enseñanza basada en competencias, el aprendizaje se hace más complicado aún, ya que se pretende que el alumno conozca un concepto, pero también que lo utilice en situaciones cotidianas en que le sea válido para interpretar la situación y para obtener un resultado. Por tanto, aprender y desarrollar competencias exige que el estudiante realice actividades que le faciliten una cadena de conductas como la siguiente:

Hacer – Interiorizar – Organizar – Retener – Identificar las condiciones – Recuperar

Por tanto para aprender hay que actuar, hacer. Desde lo más elemental que es repetir en voz alta o baja, a lo más complejo que consiste en enfrentarse a problemas y tratar de resolverlos. Tanto para recordar como para comprender, identificar, etc., es importante que el que aprenda haga. Un proverbio chino dice:

Oigo y olvido

Veo y recuerdo

HAGO Y APRENDO

Los educadores han buscado y diseñado medios para facilitar que los alumnos actúen, hagan (primer eslabón de la cadena). Unos son específicos (programas informáticos didácticos, como el CABRI Géomètre, o los Bloques Multibase de Dienes). Otros son instrumentos que se han empleado en algún momento histórico (como la regla de cálculo, hoy en desuso, que se puede emplear para la enseñanza de la aritmética). Algunos se han adaptado de los que se utilizan en otras áreas (como el ábaco, que aún se utiliza para el cálculo aritmético). Estos medios que facilitan el hacer, son lo que llamamos MATERIALES Y RECURSOS para la enseñanza.

Carretero, Coriat y Nieto (1993), los definen de la siguiente forma:

RECURSOS: Se entiende por recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el Profesor decide incorporar en sus enseñanzas.

MATERIALES: Se distinguen de los recursos porque, inicialmente, se diseñan con fines educativos (Si bien, en general, un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material y qué es un recurso).

Los mismos autores ponen ejemplos:

RECURSOS: Tiza y encerado, cuaderno del alumno

Son ejemplos de recursos, la calculadora, la fotografía y diapositiva, la prensa, los programas y anuncios de radio y TV, los videos, programas de ordenador de propósito general (procesadores de texto, hojas de cálculo, editores de gráficos, gestores de bases de datos), los juegos, el retroproyector y la historia de las matemáticas

MATERIALES: Las hojas de trabajo preparadas por el profesor, los programas de ordenador de propósito específico (paquetes de estadística elemental, por ejemplo), materiales manipulativos, etc.

Los materiales y recursos permiten al profesor plantear tareas para que los alumnos utilicen los conceptos matemáticos. Así, por ejemplo, los alumnos ponen en juego su idea de polígono cuando tienen que resolver la tarea de construir el polígono de mayor perímetro con el TANGRAM. Fruto de esta tarea se replantean qué es un polígono, cuáles son aceptables, etc., lo que les lleva a acudir a la definición para poder llegar a resolver la tarea.

1.2. Cualidades de los materiales y recursos

Al pensar en qué materiales y recursos emplear en nuestra enseñanza, debemos tener presentes las características de los materiales y los contenidos matemáticos que estamos tratando y, sobre todo, la finalidad de nuestra enseñanza.

Para la enseñanza de las fracciones hay una gran diversidad de materiales, dado que las fracciones son complejas para los alumnos, y que se prestan a representarse de diversas formas. Materiales típicos para ello son puzles de figuras descompuestas, con diversas formas: rectangulares, circulares, cuadradas, cúbicas, etc. Si nos fijamos, en todos los casos estarán empleando una medida para representar fracciones (áreas en los casos planos, pero también volumen). Pero su representación de la fracción no es igualmente transparente en todos. Si nos presentan un semicírculo rápidamente se aprecia que representa la fracción $\frac{1}{2}$, ya que la unidad es clara. No ocurre lo mismo cuando tenemos un rectángulo, pues necesitamos tener presente la unidad para saber qué porción representa. En las representaciones circulares se atiende además a la medida de ángulos. En las otras se atiende siempre a longitudes (la superficie y volumen dependen de ella). Por tanto, debemos analizar algunas características de los materiales para conocerlos más en profundidad.

Para establecer estas características sugerimos atender al menos a las correspondientes al contenido matemático que tratan, analizando qué formas de representación emplean, qué acciones promueven o permiten, para qué estructura conceptual. Pero también podemos analizar qué tipos de elementos matemáticos pueden afrontarse con ellos y otras observaciones.

Como ejemplo para realizar este análisis, la tabla 1.1 resume algunas apreciaciones que se pueden hacer respecto a tres materiales para la enseñanza de las fracciones que se han visto en el curso: El círculo de Fracciones, el Muro de Fracciones y las Transparencias de Cuadrados.

Tabla 1.1: Ejemplo de análisis de materiales para enseñanza de fracciones				
Material	S. R.	Acc.	E.C.	Otros
Círculo fracciones	Continuo, área, sectores	Estáticas (representar) Dinámico (avanzar)	Conceptual y procedimental	Unidad clara Equivalencia Estimación
Muro	Continuo, área, rectángulos	Identificar Comparar	Conceptual y procedimental	Unidad dada Equivalencia Relaciones, operar
Transparencias	Continuo, área, rectángulos	Identificar Comparar Cruzar	Conceptual y procedimental	Unidad clara Equivalencia Relaciones, operar

Relacionado con la estructura conceptual, los materiales también pueden tener diferentes funciones, ya que hay materiales para contenidos conceptuales, que permiten aprender el concepto (relacionar las formas de representación, identificar, utilizar, resolver problemas, etc.) y materiales para contenidos procedimentales, que sirven para afianzar mecanismos (ejercitarse en los algoritmos de cálculo, repararlos, etc., de manera lúdica).

a) Materiales para comprender un concepto:

Cuando un material o recurso promueve que el alumno resuelva situaciones problemáticas, empleando una representación tangible del concepto matemático, estará dando la oportunidad a que el alumno genere ideas e imágenes mentales sobre ese concepto, relacione con otras formas de representación, identifique elementos, etc., iniciando así la comprensión del concepto.

Ejemplo:

Contenido: Definición de polígono

Objetivo: Identificar los objetos geométricos (polígono, en este caso), como elementos abstractos, que están definidos por la forma en que se define.

Material: TANGRAM chino (descomposición de un cuadrado)

Tareas:

Introducción: Hacer el TANGRAM con papel doblado, a partir de un cuadrado de papel (Objetivo: Conocer el TANGRAM y familiarizarse con sus piezas)

Formar polígonos sencillos con todas las piezas del TANGRAM: Comenzar volviendo a formar el cuadrado y luego formar un triángulo rectángulo e isósceles, un rectángulo, un trapecio isósceles y un paralelogramo (todos se obtienen moviendo dos piezas desde la anterior figura) (Se puede emplear el retroproyector para formar las figuras, contando con un TANGRAM opaco) (El objetivo es familiarizarse con el TANGRAM y su uso lúdico)

Desarrollo: Formar el polígono de mayor número de lados con las piezas del TANGRAM. Actividad abierta, en la que el profesor irá comunicando a los demás el número de lados obtenido, y pidiendo que se llegue a un acuerdo cuando los alumnos pidan clarificaciones (¿Tiene que ser un polígono regular? ¿Tengo que utilizar todas las piezas? ¿Este vale? ¿Cuántos lados tiene que tener el de mayor número de lados?, etc.) El objetivo es que los alumnos perciban que pueden tener mayor número cuando es irregular, vayan desarrollando estrategias para aumentar el número de lados, consideren también polígonos cóncavos, pero, sobre todo, que pongan en cuestión qué es lo que entienden por polígono. Cuando se ponga en cuestión si es un polígono la figura formada por dos piezas que se tocan sólo en un punto (o similares), pasamos a la siguiente actividad:

Continuación: Buscar en libros, Internet, etc. la definición de polígono, para responder a la cuestión planteada. Llegar a un acuerdo sobre qué definición adoptamos y si se aceptan como polígonos las figuras dudosas. (El objetivo es que el alumno interprete el enunciado de una definición, que comprenda que los elementos geométricos son abstracciones que vienen sugeridos por elementos materiales, pero que hay que definir con precisión para poder emplearlos).

Finalización: Acordar en puesta en común una definición del concepto de polígono. El profesor justifica que se entiende como polígono una curva simple, para que queden claramente definidos los vértices y lados. Posteriormente, buscar algún argumento para justificar que no se haya obtenido un polígono de más de 23 lados.

b) Materiales para ejercitar destrezas

Otros materiales son buenos soportes para que el alumno ejercite una destreza. Un ábaco puede ser un buen contador, para ejercitar el recuento, por ejemplo. El TANGRAM es un buen material para que el alumno proponga distintas figuras que tengan el mismo perímetro y distinta área, distinto perímetro y la misma área, mismo perímetro y misma área pero forma distinta, etc. La balanza algebraica permite resolver ecuaciones, practicando los pasos del algoritmo de resolución de ecuaciones. Etc.

c) Materiales para ejercitarse en un ambiente lúdico

Por último, otros materiales proponen un entorno lúdico para que el alumno practique destrezas matemáticas, sin que su acción esté relacionada con el concepto que está empleando. Estos son los recursos para ejercitar, que tanto éxito tienen para los profesores. Un programa de computador que proponga sumas y premie al niño que da su resultado correcto, es un ejemplo de este recurso. También una baraja de sumas, o de fracciones, en el que los alumnos deben realizar las operaciones por otros me-

dios (mediante papel y lápiz, con cálculo mental, con calculadora, etc.), crea un buen ambiente lúdico para practicar estas operaciones, aunque la manipulación no tenga que ver con el juego.

Como hemos podido apreciar, un mismo material puede prestarse a diversas funciones educativas. Si a las piezas de un TANGRAM les ponemos unas etiquetas con operaciones y resultados, de manera que cada pieza haya que situarla junto a otras en las que coinciden cálculos, y hemos previsto que el resultado sea una bonita figura, el TANGRAM se puede convertir en un soporte lúdico para hacer operaciones, sin que estas operaciones tengan ninguna relación con el material, lo que lo convierte en un material para ejercitarse en ambiente lúdico.

Apreciamos entonces que los materiales tienen unas potencialidades educativas que se van a concretar a raíz de que se definan las tareas que tienen que realizarse con ellos. Un recurso como la calculadora puede ser un medio para realizar operaciones, pero también puede convertirse en un recurso conceptual, si se les plantean tareas adecuadas, como obtener el resto de una división que no quepa en el display (2408673:23, por ejemplo, tarea que en España sirve para determinar la letra de identificación del Documento Nacional de Identidad). Por tanto, cuando hablemos de un material debemos tener siempre presente el tipo de tareas que se pueden hacer con ellos, y seleccionar los más adecuados a nuestros objetivos.

1.3. Criterios para seleccionar materiales y recursos

Como hemos visto, los materiales educativos pretenden facilitar el aprendizaje, pero según el tipo de material lo hacen de manera diferente, con finalidades y para contenidos distintos. El profesor tiene que tener criterios para seleccionar el más adecuado a su situación educativa.

Hemos visto que los materiales presentan los conceptos matemáticos en algunas de las formas de presentarlos (uno o varios sistemas de representación), y dan oportunidad de que el alumno actúe realizando alguna función o empleando algún significado de ese concepto (aspectos fenomenológicos del concepto). El profesor debe saber qué elementos pone en marcha el material, lo que le permite ver si coinciden con los destacados en su análisis de contenido.

Pero también tiene que establecer su contribución a las finalidades de aprendizaje.

- Si pretende que el alumno aprenda/comprenda un concepto, deberá emplear materiales conceptuales, que propongan retos que lleven a hacerse preguntas, poner en común, consultar libros, etc., como en la tarea del TANGRAM planteada anteriormente

- Cuando los objetivos tienen una intención procedimental, esperando que el alumno domine una técnica, el material debe dar la ocasión de ejercitar esa técnica, empleando un sistema de representación próximo al que se enfatiza en ella.

- Por último, el profesor puede emplear material lúdico de refuerzo, para aquellos alumnos que ya manejan destrezas, dándoles la ocasión de percibir que los conceptos matemáticos son susceptibles de aparecer en los juegos.

Como hemos señalado antes, el material tiene que ir asociado a las tareas que lo emplean. Con objeto de seleccionar la tarea que emplea material, que resulte más adecuado para una situación de enseñanza, seguiremos empleando los análisis precedentes (Análisis de Contenido y Análisis Cognitivo). Tal como se ha propuesto en el módulo 3, los caminos de aprendizaje de la tarea permiten identificar las capacidades que se ponen en juego y las relaciones entre ellas, proporcionando información para establecer en qué medida se logran las expectativas de aprendizaje. Pero también las capacidades y su relación es posible identificar elementos de la estructura conceptual que aborda la tarea, los sistemas de representación que usan y cómo se relacionan, y la función que se le da al análisis fenomenológico.

Una vez seleccionada una tarea que emplea un material o recurso didáctico, vamos a analizarla empleando los medios propuestos en el módulo 3, hasta completar una tabla como la que aparece en el Anexo 1 (Tabla de Análisis de la Tarea empleando Material didáctico).

2. TAREAS

El cuadro 2.1. muestra el comienzo del desarrollo de una clase de un profesor de educación primaria, que va a enseñar las fracciones en 4º nivel (alumnos de 9-10 años).

Tabla 1.1: Comienzo de un desarrollo de clase		
Nº	P/A	Dice [hace]
1	P	Vamos a iniciar una nueva unidad de estudio: la unidad se llama fracción.
2	As	Cómo, fracción
3	P	Que vamos a ver niños, hoy día vamos a ver fraccionamiento de enteros en partes iguales, la escritura, la escritura de fracciones, trabajando con papelitos lustres que le pedí ayer que trajeran.
4	P	[Profesor pide a los alumnos que escriban en su cuaderno y escribe en la pizarra: Unidad V “Fracción”. Debajo: Fraccionamiento, lectura y escritura de fracciones] [El profesor saca a tres alumnas adelante y explica a los alumnos]
5	P	Le voy a pasar a María 5 papeles lustres y ella tiene que repartir entre sus dos compañeras en partes iguales
6	A	No se puede
7	As	Siiii
8	P	SHuuu, calladito a ver que va hacer ella
9	P	María ¿qué puede hacer usted para repartirlo?

Podemos ver que el profesor comienza presentando la lección. Luego recuerda una petición que hizo el día anterior. A continuación repite la presentación, escribiendo en la pizarra el nombre del tema y sus partes. Posteriormente plantea un problema a una alumna. Sus compañeros se hacen notar, haciendo comentarios. Como vemos, la clase se compone de actuaciones del profesor y los alumnos.

Mientras el “profesor” explica, hace, dice, el “alumno” escucha, atiende, mira. Es el caso de la primera intervención (1). Cuando el profesor pide que haga un reparto (5 a 8), la alumna piensa, comienza a hacer, los compañeros opinan. Podemos decir que el profesor ha realizado una actividad de presentación (1, 3 y 4), mientras los alumnos han preguntado (2), y escuchado (1, 3 y 4). Luego el profesor pide que la alumna haga un reparto que no le resulta evidente (5 y 9).

Observamos que en la clase aparecen actividades del profesor, a las que el alumno replica realizando algo (a veces alejado de lo que el profesor pretende), llevando a cabo actividades de aprendizaje.

Ponte y otros (1997) hacen esta diferenciación, y nos indican algunas características de las actividades: *La naturaleza de la actividad de los alumnos en el aula de Matemáticas es una cuestión central en la enseñanza de esta disciplina. Un aprendizaje de las Matemáticas es siempre el producto de actividades, y si éstas se reducen, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas, eso será lo que aprenderán, y ello va a perdurar, es decir, aprender de memoria las fórmulas. Por tanto esta será la imagen que adquirirán de las Matemáticas.*

En este apartado nos ocupamos de las tareas escolares o tareas, como unas actividades concretas que implican una actuación matemática de los alumnos. Comenzamos por clarificar qué entendemos por tareas, posteriormente examinamos sus elementos. Luego estudiamos dimensiones que influyen en la complejidad de la tarea, lo que nos permite analizar algunas condiciones que pueden precisar y cambiar las tareas, para hacerlas más acordes a las finalidades educativas planteadas.

2.1. Concepto de Tarea

Entre las actividades de enseñanza del profesor, algunas tienen la intención de gestionar el grupo (la 8, en nuestro ejemplo), otras son para iniciar o cerrar una secuencia (1, 3, 4 y 9). Y otras demandan una actuación matemática del alumno, para aprender. A estas las vamos a llamar “tareas”. Siguiendo el texto de Antonio Marín (s.f.), llamamos tarea a una propuesta para el alumno que implica una actividad de él en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje. Nos llama la atención A. Marín, que no se incluirá en el término tarea las actividades en las que el profesor no ha planteado expresamente cuáles son las acciones que se le demandan al alumno y no puede, por ello, evaluar su consecución. En nuestro ejemplo, no sería tarea más que la actuación 5 y 9, en que se plantea y se estimula a hacer.

Christiansen (1986), nos recuerda que las tareas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, están en relación a los elementos que intervienen en la enseñanza, tal como se muestra en la figura 1.

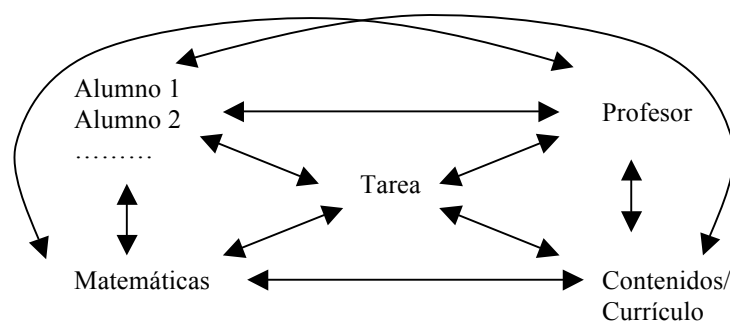


Figura 1: Relaciones entre tarea y otros elementos. Christiansen, 1986

El Análisis de Instrucción, que estamos desarrollando forma parte del análisis didáctico junto con el análisis de contenido y el análisis cognitivo, constituye una metodología para el diseño y la actuación y tiene como fin identificar, describir y organizar tareas para diseñar y ejecutar las actividades de enseñanza y aprendizaje que constituyen la unidad didáctica. Por tanto vamos a detenernos en las tareas y sus procesos de análisis. Hasta ahora cada grupo de estudiantes del MAD ha buscado unas tareas en libros de texto o en otras fuentes de propuestas didácticas, y las ha relacionado con elementos de los análisis previos. En este tema vamos a detenernos en las tareas, buscando expresarlas con mayor riqueza para lograr los fines de aprendizaje previstos, en los contenidos seleccionados.

En el análisis de instrucción el protagonismo está en las tareas, se analizan, seleccionan y diseñan, utilizando diferentes criterios:

- En primer lugar las tareas deben ser compatibles con el análisis del contenido, por lo que deben estar vinculadas al análisis y selección de los contenidos realizados anteriormente.
- Las tareas tienen que contribuir a las expectativas de aprendizaje descritas en el análisis cognitivo, y deben que afrontar las limitaciones de aprendizaje, reflejadas en las dificultades o errores, para lo que tenemos que fijar las condiciones de realización de las tareas, así como su grado de complejidad

c) Tal como se estudió en el apartado 1, las tareas permiten incorporar recursos y materiales, que, al presentar acciones próximas a las establecidas en el análisis de contenido del tema, optimicen las expectativas de aprendizaje del mismo.

d) La reunión de todas las tareas previstas debe constituirse en un conjunto coherente en la planificación de las secuencias de aprendizaje, adecuándose a los caminos de aprendizaje establecidos en el análisis cognitivo.

e) Pero también las tareas deben concretar y ser compatibles con la forma de llevar a cabo la gestión de la clase, de manera que sea posible y que se relacione de manera más adecuada con las expectativas de aprendizaje.

2.2. Análisis de la Tarea

Para emprender el análisis de tareas debemos comenzar por examinar de qué se componen. Para Doyle hay tres elementos en una tarea:

i) Un producto o meta

ii) Un conjunto de recursos disponibles

iii) Un conjunto de operaciones que se aplican a los recursos para lograr la meta.

Empleando las recomendaciones del texto de Ponte (2004), vamos a proponer además otros elementos que la determinan:

iv) El contenido matemático al que se dirige

v) La situación de aprendizaje, el contexto en el que se propone su acción.

En el ejemplo del comienzo de esta sección, serían los siguientes:

i) Se espera que la alumna reparta los papeles, entregando la misma cantidad a cada uno (lo óptimo sería 2 papeles enteros y medio papel) (**Fin**)

ii) Los **recursos** disponibles serán los papeles

iii) Con estos papeles se puede realizar una división en ciertas partes iguales. Los papeles lustre son cuadrados que pueden dividirse por su mitad de varias formas, de ahí que se haya demandado una partición en dos. (**Operaciones**)

iv) El **contenido matemático** es la fracción, que el análisis de contenido nos ha llevado a precisar más, distinguiendo que en primer lugar se presenta como un fraccionamiento (dividir un papel en dos partes), y luego como porción (un medio del papel original)

v) La **situación de aprendizaje** es una situación de reparto, para lo que no se ha creado una escenografía que le de razón de ser, los alumnos responden por cumplir mandato del profesor.

Para que la tarea no se reduzca a demandar al alumno que cumpla una exigencia del profesor, podemos crear una situación de aprendizaje que muestre que la petición corresponde con un problema real del entorno. Para este fin, el análisis de contenido nos puede suministrar situaciones en que el contenido estudiado adquiere sentido, lo que nos da ocasión de elegir una actividad próxima al empleo que la sociedad hace del mismo.

Por ejemplo partamos de un contenido como el Teorema de Pitágoras. Una actividad de enseñanza puede consistir en que el profesor explica el Teorema de Pitágoras desarrollándolo en la pizarra, mientras los alumnos escuchan, atienden y anotan (actividades de aprendizaje). Una enseñanza basada en tareas consiste en planificar una secuencia de enseñanza y aprendizaje para este contenido, encaminada a un fin y estableciendo cierta relación con problemas significativos. Es por ello que hay que añadir al contenido matemático la situación de aprendizaje. Las situaciones de aprendizaje se buscan entre las situaciones cotidianas, científicas o técnicas en las que se aplica el Teorema de Pitágoras. Como sabemos el Teorema de Pitágoras es una condición métrica necesaria y suficiente para que tres segmentos formen un triángulo rectángulo, por lo que se puede aplicar para:

- Determinar la longitud de algún lado de un triángulo rectángulo, conocidos los otros dos
- Averiguar si tres segmentos forman un triángulo rectángulo
- Construir ángulos rectos

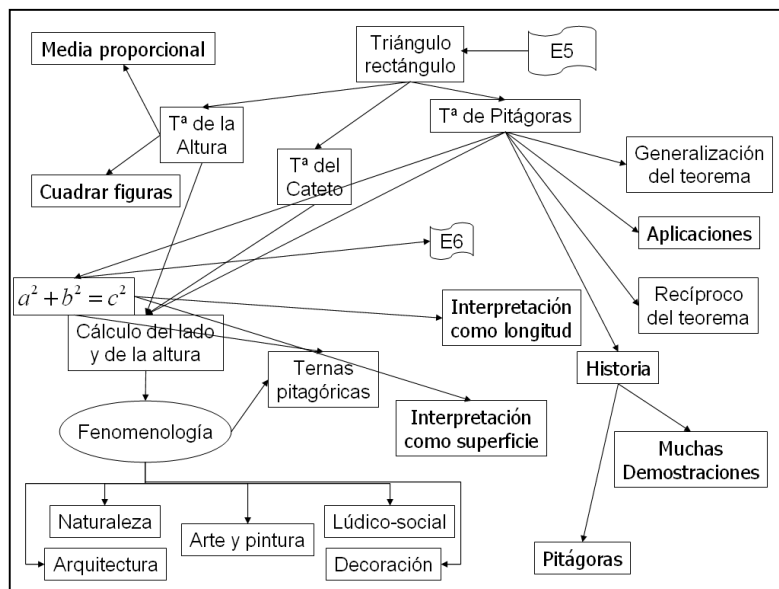


Fig. 2. Fenomenología T. Pitágoras

También se puede interpretar el Teorema de Pitágoras como una relación métrica entre las áreas de figuras semejantes situadas sobre los tres lados de un triángulo rectángulo. En estas condiciones se puede emplear para determinar el área de una figura, conocidas las de otras, estudiar si las figuras son semejantes, etc. En el caso del Teorema de Pitágoras, determinar longitudes y ángulos, son funciones útiles para la construcción, la carpintería (dibujar una planta rectangular, estudiar si forman ángulo recto las paredes o un estante con la pared), en topografía (determinar distancia entre puntos, en un plano, alturas inaccesibles, etc.), y otros campos científicos (composición de fuerzas, por ejemplo).

En la figura 2, aparece un mapa conceptual elaborado por alumnos de la asignatura Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, en el que se incluye el estudio fenomenológico del Teorema de Pitágoras.

Una tarea para la enseñanza del Teorema de Pitágoras puede ser: *Dibujar una cancha de tenis en el patio del colegio.*

- i) Se espera que el alumno dibuje con sus compañeros el campo de tenis (**meta**)
- ii) Debe disponer de **recursos** para el dibujo sobre el terreno (cuerda, piquetas, metro de al menos 20 m., una calculadora, etc.)
- iii) Con estos recursos puede trazar rectas, poniendo la cuerda tirante, medir distancias entre puntos, trazar arcos de circunferencia, etc., finalmente aplicar propiedades matemáticas para asegurar que los ángulos se aproximan a 90°.
- iv) El **contenido** matemático es el Teorema de Pitágoras en su sentido inverso (si en un triángulo se verifica que la suma de los cuadrados de los lados es igual al cuadrado del otro, el triángulo es rectángulo)

v) La **situación de aprendizaje** es el contexto que ha elegido. En este caso es el dibujo de una cancha de tenis en el patio del colegio. Situación laboral.

El texto de Antonio Marín, nos indica que la selección, el diseño y la organización de las tareas están encaminados a conseguir una enseñanza efectiva y para ello se fija en ciertos indicadores de esta fase de la planificación. Unos primeros criterios están ligados a las componentes de la tarea. Otros se relacionan con clarificar las condiciones en que se pondrá en marcha la tarea. Y siempre, empleando como criterio para estudiar su pertinencia, la coherencia con el análisis cognitivo, desarrollado tal como se ha planteado en el módulo 3.

Con todos estos criterios, establecemos que las tareas tengan:

- 1) Una formulación clara, en que sus elementos muestren que se han creado las condiciones para que el alumno lleve a cabo actividades de aprendizaje que correspondan con las expectativas o meta de la tarea.
- 2) Una selección adecuada del recurso o material didáctico para que facilite la realización de la tarea seleccionada de acuerdo con los contenidos y objetivos de aprendizaje.
- 3) Determinados la organización de los elementos del entorno (aula, enseñanza virtual, material didáctico) que condicionan la ejecución de la tarea.
- 4) Una complejidad adecuada con la diversidad del alumnado. El modo de redacción o el lenguaje de la propuesta de acción; la inclusión de elementos motivadores derivados del contexto o gráficos; las situaciones o contextos en que se propone el problema OCDE, (2005); y los tipos de objetivos de aprendizaje que se implican en la resolución del problema OCDE, (2005) influyen en el nivel de dificultad de la tarea y en la posibilidad de que se articule como una propuesta de acción viable.
- 5) Coherencia con la planificación previa de los Contenidos y Objetivos de aprendizaje, y la previsión de Errores y Dificultades que se haya realizado.

En puntos posteriores nos ocuparemos de algunos de los elementos que se han introducido en estos criterios para las tareas.

2.3. Complejidad de la tarea

Hemos hablado de la complejidad de la tarea como una variable que influye significativamente en su selección, ya que tiene que adecuarse a las condiciones cognitivas de los alumnos. Para estudiar la complejidad vamos a emplear dos referentes, por una parte las condiciones en que se proponen las tareas (para lo que emplearemos aportaciones que se pueden ampliar en el texto de Ponte, 2004) y por otro las exigencias cognitivas que se crean en la tarea (para lo que el estudio PISA nos da ideas interesantes, que veremos en el apartado 3 de estos apuntes).

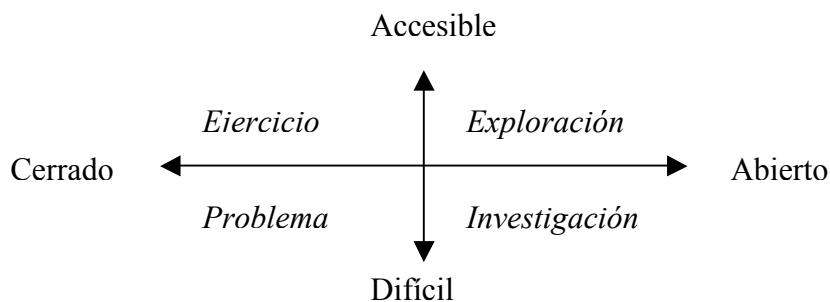


Figura 3: Complejidad de las Tareas (Ponte, 2004)

Como vemos, Ponte (2004) indica que la complejidad de una tarea está dada al menos por dos cualidades diferentes: el grado de estructura (el cierre de la meta o fin) y el grado de dificultad (es decir, el número y complejidad de las destrezas, conocimientos y creatividad exigidas para su resolución). Organizándolo en dos ejes perpendiculares, elabora el esquema de la figura 3, en el que aparecen las tareas situadas en cuatro cuadrantes.

De esa forma podemos definir un ejercicio como una tarea cerrada y accesible, un problema como una tarea cerrada, pero que entraña una dificultad elevada, es decir, no se dispone de un procedimiento para llegar a la solución. Una investigación es una tarea con un alto grado de dificultad, en la que no conocemos de antemano la solución, pero se espera que los alumnos den pasos hacia ella, mientras que un proyecto es más fácil, pero en el que la respuesta no está fijada de antemano, sino que exige una construcción por parte de los alumnos.

Un ejemplo de Ponte (1989), nos muestra mejor estas clases de tareas.

<p>Petición de pantalones (Situación de aprendizaje)</p> <p>Un cliente de la empresa Confecciones del Centro SA, le ha hecho un gran pedido de pares de pantalones de dos modelos diferentes, con la condición de que se le haga una entrega diaria de 120 pares de pantalones. Las posibilidades de producción de la empresa, dado su capital disponible, están limitadas a la utilización de 300 metros de tejido y 300 horas de trabajo. La elaboración de un par de pantalones del modelo A necesita 2 metros de tejido y 3 horas de trabajo, mientras que el modelo B necesita 3 metros de tejido y 1,5 horas de trabajo. El beneficio que se obtiene de cada par de pantalones es de 1500 y 2000 ptas. Para los modelos A y B, respectivamente.</p>
<p>T1. Determinar el beneficio obtenido por la empresa al vender 600 pares de pantalones del modelo A y 300 pares del modelo B.</p>
<p>T2. Aceptando que el beneficio que se obtiene de cada par es un beneficio medio (a partir de la producción máxima de cada uno de los modelos) y que por cada diez pares de pantalones que se hacen ese beneficio tiene un aumento de 0,5%, ¿Cuál es el valor exacto del beneficio de la empresa cuando se venden 53 pares de pantalones del modelo A?</p>
<p>T3. Investigar si la empresa está en condiciones de responder favorablemente al pedido que le ha hecho el cliente.</p>
<p>T4. Averiguar si la empresa puede ser incluida en el grupo de empresas de pequeña, media o gran dimensión.</p> <ul style="list-style-type: none"> . A partir de un cierto número de unidades, la producción puede necesitar alterar los costos fijos. ¿Esto se debe a qué una mayor producción origina siempre un mayor beneficio? . Intentar investigar, en una empresa de su zona, la influencia de la variación de los precios de energía, el coste medio de los productos y los beneficios que la empresa va a obtener con esa producción. . ¿Qué estrategia podría intentar el empresario para que los beneficios sean superiores al nivel medio? . Elaborar una redacción que sintetice las conclusiones a las que habéis llegado sobre los aspectos anteriores.

Observamos que T1 es un ejercicio, T2 un problema, T3 una investigación y T4 un proyecto, aunque el límite entre investigación y proyecto depende de los conocimientos previos de los alumnos.

Queremos detenernos especialmente en la distinción entre ejercicios y problemas. Ya en el módulo 3 hemos distinguido entre tareas rutinarias (que podemos identificar con ejercicios), y tareas no rutinarias (que en muchos textos se identifican como problemas). En el módulo 3 se hizo esta diferenciación para definir las capacidades. En este caso se consideraba que una tarea no rutinaria se puede descomponer en una cadena de tareas rutinarias, cada una de las cuales se podía asociar con una capacidad.

Así la tarea: *Dibujar una cancha de tenis en el patio del colegio*, citada en el punto anterior, exige una secuencia de tareas (matemáticas) rutinarias como las siguientes:

- Saber cuáles son o buscar las medidas de una cancha de tenis
- Identificar su forma rectangular y sus elementos y medidas
- Dibujar en papel un rectángulo del que se conocen los lados (empleando instrumentos de dibujo similares a los disponibles para la tarea general)
- (Percibir las dificultades de dibujar un rectángulo, especialmente los ángulos rectos, con cuerdas y cinta métrica –incluso empleando medidores de ángulos-)
- Identificar que la diagonal forma triángulos rectángulos con los lados del rectángulo
- Recordar que el Teorema de Pitágoras es una herramienta matemática para determinar la longitud de la diagonal
- Recordar el enunciado del Teorema de Pitágoras
- Aplicar el Teorema de Pitágoras y determinar la longitud de la diagonal
- Recordar la formulación recíproca del Teorema de Pitágoras (si en un triángulo el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos, entonces el triángulo es rectángulo)
- Dibujar un triángulo (rectángulo) conocida la longitud de los tres lados
- (Aplicar el procedimiento en el terreno)

La cantidad de tareas rutinarias y de capacidades es, pues, un criterio para determinar la complejidad de la tarea.

Christiansen (1986) muestra ejemplos de tareas rutinarias y no rutinarias en la tabla 1.2.

Tabla 1.2: Ejemplos de tareas rutinarias y no rutinarias (Christiansen, 1986)	
Tareas rutinarias (ejercicios)	Tareas no rutinarias (Problemas)
Ejercicios de reconocimiento	Problemas de procesos
Ejercicios algorítmicos	Problemas abiertos
Ejercicios de aplicación (Problemas de enunciado)	Situaciones problemáticas

Para Christiansen (1986) las tareas rutinarias son medios para consolidar conocimiento y habilidades adquiridos por el aprendizaje, pero no contribuyen a un desarrollo profundo del conocimiento, la explicación ni el aprendizaje de conocimiento nuevo. Por su parte, las tareas no rutinarias proporcionan condiciones para un desarrollo cognitivo para:

- construir nuevo conocimiento que tiene que comenzar de manera subjetiva
- reconocer y evaluar conocimientos adquiridos antes
- generar nuevas interpretaciones y nuevas relaciones
- reorganizar y reestructurar el conocimiento en un cuerpo más amplio y consolidado.

La distinción entre ejercicio y problema, que continuaremos en el apartado 3 de este tema, es importante, dado que uno u otro tienen finalidades educativas distintas.

2.4. Condiciones para cambiar la tarea

Una vez definida una tarea, hemos de estudiar si sus condiciones de realización son las más adecuadas a las finalidades previstas. En el primer punto de estos apuntes aludíamos a los materiales y recursos como medios de cambiar la tarea para darle una mayor eficacia. Igualmente hay otros factores que pueden influir, como el ritmo de trabajo, la duración y los métodos. Vamos a estudiar dos de ellos, la comunicación en clase y la forma de agrupamiento de los alumnos.

Comunicación en clase.

Un aspecto importante es la forma en que se producen las comunicaciones en clase durante la tarea. Estas comunicaciones deben darse entre los actores de la clase, y para estudiarlas diferenciamos las que se establecen entre el profesor y los alumnos y las comunicaciones entre alumnos. El profesor tiene que prever qué comunicaciones van a establecerse en clase, cómo estimularlas y con qué función, tanto cuando realiza actividades de enseñanza como en la realización de las tareas. Al programar la comunicación estará precisando las condiciones de las tareas.

La comunicación además tiene dos formas, al menos, la oral y la escrita (en la actualidad se puede pensar además en la forma informática, pero no nos vamos a ocupar aquí de ella).

La regulación de la comunicación profesor-alumno tiene dos aspectos importantes, cómo se realiza y cuándo se produce. Comenzamos por estudiar el papel que ha previsto adoptar el profesor durante la tarea, si actúa como director, imponiendo ritmo y actividad, respondiendo a cuestiones, resolviendo dificultades, etc., o como orientador, cuando reformula las cuestiones de los alumnos, estimula a que respondan otros o a que se valga de otros medios, etc.

Una forma importante de intervenir el profesor es por medio de preguntas, prever cuáles preguntas hará y qué papel jugarán hará que se altere la tarea. Puede prever que las preguntas estén encaminadas a que los alumnos expliquen significado de conceptos, a que hagan conjeturas, o a proponer estrategias para resolver problemas, entre otros fines.

Las intervenciones tienen un momento de aparición, que el profesor puede establecer, así es importante determinar cuándo va a introducir notaciones, lenguaje matemático, formulaciones, en qué momentos va a suministrar información a los alumnos en el curso de la tarea, cuándo y hasta dónde debe dejar al alumno luchar contra una dificultad.

La relación entre alumnos se considera actualmente de gran importancia en la enseñanza, dado el valor concedido a la dimensión social del aprendizaje. Al determinar la tarea, el profesor establecerá si se han previsto estas interacciones, cómo se van a regular, qué mecanismos emplear para favorecer que todos trabajen, etc.

La forma escrita de la comunicación afecta tanto a lo que el profesor va a escribir en la pizarra, como lo que espera que escriba el alumno. Determinar cuáles anotaciones va a realizar, cuáles de ellas buscarán estructurar los contenidos, cuáles sintetizar información, o facilitar almacenamiento, etc, es una forma de precisar la tarea. Por otra parte es importante ampliar las anotaciones de los alumnos, estableciendo qué deben reproducir, o cuándo calcular, pero también qué ensayos pueden escribir, informes, explicaciones, etc., abordará con mayor profundidad competencias como argumentar, comunicar y emplear lenguaje matemático.

En la tabla 1.3 se resumen estos aspectos de comunicación que pueden ayudar a precisar las tareas.

Modalidad	Oral	Escrita
Profesor- alumno	Cómo: Papel del profesor -director: impone y responde -orientador: reformula, estimula)	Anotaciones en pizarra cuáles, con qué función
	Preguntas: - Cuáles, - Papel: Explicar significado de conceptos Hacer conjeturas Proponer estrategias para resolver problemas	Producción del alumno En qué momento De qué tipo (cálculos, expresiones, informes, explicaciones)
	Cuándo introducir notaciones y lenguaje matemático, Cuándo suministrar información, Cuándo y hasta dónde debe dejar al alumno luchar contra una dificultad.	
Interacción alumnos	Se han previsto Cómo estimularlas y articularlas Papel: Discutir Argumentar y convencer Coordinar	

Forma de agrupamiento de los alumnos

Un factor especialmente interesante es el que se refiere a las formas en que se organizan los alumnos para actuar durante la tarea, lo que se llama modo de agrupamiento de los alumnos. Como hemos comentado, el papel que se le concede en la actualidad a la dimensión social en el aprendizaje, para facilitar la interacción entre iguales, nos lleva a plantear qué tipo de agrupamiento proponer y con qué finalidad. La modalidad de profesor dirigiéndose al gran grupo o el trabajo individual, siguen teniendo su papel importante en el aprendizaje, pero hay que ir integrando la actuación en parejas o pequeños grupos para facilitar la interacción, como se indicaba en el apartado anterior.

En la tabla 1.4, resumimos las apreciaciones de Ponte (1989) sobre el papel de los distintos agrupamientos en la enseñanza.

Modo	Uso	Interés
Gran grupo	Presentar materia Conducir debates Hacer preguntas	Permite negociar significados entre todos Permite aportes más ricos
Pequeño grupo	Investigaciones Proyectos	Apoya comprensión al obligar a argumentar para convencer Permite dividir tarea según cualidades
Parejas	Tareas relativamente estructuradas, sin concentración	Promueve intercambio positivo más próximo
Individual	Ejercitación, problemas, ensayos, memorización	Hace asumir responsabilidades personales

Los factores estudiados nos ayudarán a precisar la formulación de las tareas, decidiendo el tipo de tarea según complejidad, examinando qué tipo de agrupamiento sería más conveniente, cómo llevar a

cabo o regular las interacciones en clase, estableciendo el papel que va a adoptar el profesor y las herramientas para implicar a todos los alumnos.

Otros factores que contribuyen a variar la complejidad de las tareas son la presentación y formulación de la tarea, tanto en aspectos relacionados con el lenguaje (el léxico, la complejidad del lenguaje), como en los escenarios (lo que Ponte 1989 llama “situaciones de aprendizaje”), es decir, el papel del contexto, la familiaridad que los alumnos tienen con él, pero también el papel que desempeñan los elementos empleados en la tarea.

Empleando algunos de esos criterios, podemos pasar a revisar cada una de las tareas propuestas, completando con cada una de ellas una tabla como la que aparece en el Anexo 3.

Presentamos un ejemplo, organizando una conocida tarea de Guy Brousseau, *la carrera a 20*, en la tabla 1.5.

Tabla 1.5. Análisis de la Tarea: Carrera a 20 (Brousseau)		
Elementos de la tarea	Meta	Buscar estrategia ganadora, determinando relaciones de divisibilidad entre números
	Recursos/ Operaciones	Papel y lápiz; tablero y marcador Anotar secuencia numérica y estrategias ganadoras
	Contenido	Divisibilidad, regularidades relacionadas con las clases de restos
	Situación aprendizaje	Competición entre pares, contexto científico
	Complejidad	Respuesta cerrada, compleja (no hay estrategia a priori), PROBLEMA
Condiciones	Presentación	Instrucciones verbales, lenguaje simple
	Comunicación (Cómo y Cuándo)	Profesor inicia y regula siguiendo pautas (tras 1 juego en tablero; cuando comienzan a descubrir estrategia; buscar alumnos medios o bajos para competir; obligar a respetar normas; directivo en gestión, orientador neutro en estrategias) [En descripción de tarea, establecer todo el guión de interacciones]
	Agrupamiento alumnos	Gran grupo al principio; En parejas para juego inicial; en mitades del grupo en adelante; finalizar en situación individual.
Observaciones	Introduce relaciones de divisibilidad creando un conflicto cognitivo que les lleva a buscarlas. Requiere un proceso de integración con otras tareas y actividades para formalizar la divisibilidad	

3. TAREAS PARA DESARROLLAR COMPETENCIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el apartado anterior hemos visto que las tareas pueden adoptar la forma de problemas, cuando tienen ciertas características (estructura cerrada pero exigiendo aplicar estrategias que no están determinadas en el enunciado de la tarea, para Ponte). Pero en el análisis cognitivo hemos examinado las competencias matemáticas que actualmente dirigen los currículos o las evaluaciones externas, y entre ellas figura la competencia de resolver problemas. Parece obvio que si queremos que los alumnos desarrollen esta competencia, deberán realizar en clase tareas que comporten problemas, para poner en juego destrezas necesarias para ello. En este apartado vamos a examinar cómo podemos cambiar las tareas para que la enseñanza se encamine más directamente hacia lograr desarrollar esta competencia. En resumen, venimos a decir que para favorecer que los alumnos sean competentes para resolver problemas deben realizar tareas que impliquen problemas, ejecutando destrezas específicas que se aplican al resolver problemas.

En primer lugar vamos a clarificar qué entendemos por problema, distinguiéndola de ejercicio con más precisión. Luego examinaremos cómo se entiende la competencia de resolver problemas en diversas fuentes, concretando la forma en que se plasma en el informe PISA, lo que nos permite examinar qué condiciones tienen que darse para que se considere que un alumno llega a resolver problemas con diverso grado de complejidad. Posteriormente examinaremos algunas estrategias que se emplean para resolver problemas, para terminar proponiendo criterios para estudiar si las tareas propuestas están encaminadas a desarrollar la competencia de resolución de problemas.

3.1. Problema y ejercicios

Siguiendo el texto de Ponte (2004), hemos diferenciado ejercicios y problemas según el grado de dificultad, mayor en el problema. Vamos a añadir a esta diferenciación algunos elementos que le aproximen a cómo se consideran los problemas en Didáctica de la Matemática.

La definición clásica de Polya identifica tener o afrontar un problema como buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero que no es alcanzable de manera inmediata. Según E. T. Bell, para que una situación constituya un problema para una persona se requiere que esté enterada de la existencia de la situación, reconozca que debe ejecutar algún tipo de acción ante ella, desea o necesita actuar, hace y no está capacitado, al menos de inmediato, para superarla.

De las distintas definiciones podemos extraer que el problema exige:

- Una situación comprendida por el resolutor
- Con un objetivo definido y comprendido
- Está motivado a afrontarla
- No dispone de un procedimiento, de manera inmediata, para resolverlo.

Estas condiciones nos van a permitir analizar en qué sentido las tareas propuestas se pueden considerar problemas, lo que resulta especialmente importante si hemos contemplado lograr desarrollar la competencia de Resolución de problemas, en nuestros alumnos.

3.2. Competencia de resolución de problemas

Todos los grupos de estudiantes del curso han seleccionado como una de las competencias que dirigen su trabajo el lograr que los alumnos sean competentes resolviendo problemas. Para ello se han empleado las dos formulaciones que aparecen en los documentos trabajados.

Tal como señalan Rico y Lupiáñez (2008), en el estudio PISA (OCDE, 2003), la competencia de resolución de problemas propone que el niño se enfrente a problemas muy explícitos y directos hasta comparar y evaluar diferentes estrategias de resolución. Esto se concreta en que los escolares desarrollen las siguientes capacidades (en el sentido contemplado en PISA):

- Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados)
- Resolver distintos tipos de problemas mediante diversidad de vías.

Los estándares básicos de competencia, del MEN (MEN, 2006), expresan que ser matemáticamente competente *requiere formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.*

Más adelante señalan la competencia de formular, tratar y resolver problemas como el principal eje articulador del currículo de matemáticas, ya que *las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos.*

Para examinar en qué grado la competencia se aborda con una tarea, recurrimos al informe PISA. En el estudio de la OCDE para la evaluación, realizan una agrupación de acciones cognitivas que les llevan a establecer tres niveles de complejidad: Reproducción, conexión y reflexión.

El nivel de reproducción se corresponde con los ejercicios relativamente familiares que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, el recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, el reconocimiento de equivalencias, la utilización de procesos rutinarios, la aplicación de algoritmos, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares o la realización de operaciones sencillas.

El nivel de conexión permite resolver problemas que no son simplemente rutinarios, pero situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar la solución.

Por último el nivel de reflexión moviliza capacidades que requieren cierta comprensión y reflexión, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distinta procedencia, por lo que implican mayor número de elementos y exigen generalizaciones y explicación o justificación de resultados.

En la tabla 3.2.1, resumimos las características de las tareas para cada uno de estos niveles.

Tabla 3.2.1. Características de las tareas en cada nivel de complejidad PISA		
Grupo reproducción	Grupo conexión	Grupo de reflexión
Representaciones y definiciones estándar	Construcción de modelos	Formulación y solución de problemas complejos
Cálculos rutinarios	Traducción, Interpretación y solución de problemas estándar	Reflexión y comprensión en profundidad
Procedimientos rutinarios	Métodos múltiples y bien definidos	Aproximación matemática original
Solución de problemas de rutina		Múltiples métodos complejos
		Generalización

Dada una tarea, podemos examinar el nivel de complejidad que comporta para un tipo de alumnos, empleando estas caracterizaciones. Para facilitarnos el trabajo, el proyecto PISA ha establecido unos indicadores que relacionan los niveles de complejidad con las distintas competencias. En las tablas que se aportan en el anexo, se muestran estos indicadores.

Respecto a la competencia de resolver problemas, podemos resumir sus apreciaciones en la tabla 3.2.2. Con ella podemos examinar hasta qué punto las tareas propuestas colaboran a desarrollar la competencia de formulación y resolución de problemas, y a qué nivel de complejidad.

En la tabla podemos observar que cuánto más nos alejamos de problemas conocidos, practicados, más nivel de complejidad desarrollamos. Según las previsiones realizadas en los análisis previos, tendremos que planificar tareas que supongan este tipo de actuaciones. Para ello comenzaremos por examinar la acción propuesta en la tarea, lo que nos permite estudiar qué tipo de problemas corresponden, según el nivel de complejidad. En la tabla 3.2.3 se recogen estas correspondencias.

Comp	Niveles de complejidad		
	Reproducción	Conexión	Reflexión
Formulación y resolución de problemas	<p>Exponer y formular problemas</p> <p>Reconocer y reproducir problemas ya practicados de manera cerrada</p>	<p>Plantear y formular problemas más allá de los practicados de forma cerrada</p> <p>Resolver con procedimientos estándar + otros que conectan áreas matemáticas, formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).</p>	<p>Exponer y formular problemas mucho más allá de la reproducción de los ya practicados de forma cerrada;</p> <p>Resolver con procedimientos originales, conectando áreas matemáticas y formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).</p> <p>Reflexionar sobre estrategias y soluciones</p>

Acción	Niveles de complejidad		
	Reproducción	Reproducción	Reproducción
Exponer, Plantear o Formular	Problemas cerrados, ya practicados	Problemas cerrados algo diferentes	Problemas cerrados muy diferentes
Reconocer, Reproducir y Resolver		Problemas con procedimientos estándar u otros más independientes. Problemas con conexiones entre áreas matemáticas y/o diferentes formas de representación y comunicación o expresión	Problemas con procedimientos estándar u otros más originales. Problemas con conexiones entre áreas matemáticas y/o diferentes formas de representación y comunicación o expresión
Reflexionar			Sobre las estrategias utilizadas y las soluciones obtenidas

En el anexo figuran algunas tareas en las que se analiza su nivel de complejidad en relación a la resolución de problemas.

3.3. Criterios para analizar tareas que desarrollen la Competencia de resolución de problemas

Como decíamos al principio, todos los grupos de estudiantes del curso han seleccionado como competencia a alcanzar, el formular y resolver problemas. ¿Cómo podemos justificar que nuestras tareas van a lograr esta competencia?

En el análisis cognitivo hemos buscado las capacidades que corresponden a cada competencia y a cada objetivo, y se han organizado en caminos de aprendizaje la secuencia de tareas encaminadas a las finalidades. En este tema, que estamos examinando las tareas, tenemos que analizar en qué grado la formulación de la tarea aborda lo que hemos establecido como recursos para desarrollar la competencia ligada a los problemas, es decir plantear problemas y abordar las capacidades previstas en el informe PISA para esta competencia (en distintos niveles de complejidad).

En el apartado 3.1. hemos visto qué es un problema, estableciendo algunas dimensiones que lo caracterizan. En el 3.2. proponemos estudiar cada tarea en relación a las componentes que el estudio PISA relaciona con cada competencia, especialmente las ligadas a la resolución de problemas. Destaquemos pues aquellas tareas que hemos propuesto pensando en esta competencia y confrontemos su formulación con las acciones que propone y el grado de complejidad que exige en su realización. Mientras más se aproximen a la reflexión, la tarea estará colaborando en mejor medida a desarrollar la competencia de resolución de problemas.

Un cuadro como el que figura en el Anexo 7 (Estudio nivel cognitivo de complejidad de las tareas en relación con la Resolución de Problemas) permitirá examinar cuáles de las estrategias se están ejercitando al realizar las tareas, a la vez que facilitará seleccionar actividades de enseñanza que complementan las tareas, cuando estemos planificando la unidad didáctica.

4. CRITERIOS PARA ESTUDIAR LA PERTINENCIA DE LAS TAREAS

En este apartado volveremos sobre los criterios que hemos ido estableciendo a lo largo de los puntos anteriores para justificar la selección de las tareas, en relación los elementos anteriores.

La finalidad de este apartado es resumir el estudio de la coherencia de las tareas con las expectativas de aprendizaje y con los elementos destacados en el análisis de contenido, pero también con la intención de desarrollar en los alumnos la competencia de plantear y resolver problemas.

Expondremos en cada caso criterios para justificar la coherencia, y luego expondremos qué instrumentos hemos determinado para examinarlos. Dos instrumentos nos van a servir para establecer la coherencia. Por una parte las componentes seleccionadas en los análisis previos de contenido y cognitivo. Por otra, la búsqueda de una enseñanza que vaya encaminada hacia un aprendizaje constructivista.

Comenzaremos por recordar los criterios para justificar la coherencia entre la actual definición de cada tarea y los análisis previos. Posteriormente examinaremos criterios para justificar la coherencia entre estos elementos y las condiciones en que se desarrollan las tareas, incluyendo los materiales y recursos didácticos que vamos a emplear. Por último examinaremos los criterios para justificar que las tareas propuestas colaboran a desarrollar la competencia de plantear y resolver problemas.

4.1. Coherencia entre tareas y análisis previos

Hemos señalado 5 componentes en la tarea: la meta, los recursos, las operaciones con estos recursos, los contenidos matemáticos y la situación de aprendizaje. Cuando se selecciona o diseña una tarea, se especifican estos elementos. Una vez planteada, necesitamos saber si es coherente con los análisis previos. A tal fin, nos inspiramos en el artículo de Antonio Marín (s.f.), para establecer una serie de criterios que permiten estudiar esta coherencia. En síntesis quedan reflejados en el párrafo siguiente:

Se entiende que una tarea o tarea escolar (T.E.) se adecua a la planificación previa de los contenidos si tras el análisis de ésta se pueden describir los siguientes elementos que están presentes en ella, y que corresponden con los seleccionados para la unidad didáctica:

- Sistemas de Representación (S.R.) a utilizar en los diferentes conceptos y procedimientos y los instrumentos de traducción entre ellos.
- Fenómenos relacionados con este contenido.
- Estructura conceptual del contenido.
- Objetivos de aprendizaje y competencias
- Limitaciones de aprendizaje y grados de dificultad en la enseñanza.

Para contrastar esta coherencia debemos buscar indicadores en la tarea que nos permitan decir que se dan estos elementos. En el módulo 3 vimos que un medio para estudiar la coherencia con objetivos y competencias era por identificar las capacidades que supone cada objetivo, y los grafos de secuencias de capacidades, que daba lugar a los caminos de aprendizaje previstos. Sugerimos resumir la información obtenida en el módulo 3, en el cuadro del anexo 2.

4.2. Coherencia entre las condiciones de las tareas

En apartados anteriores hemos estudiado algunas condiciones que cambian la definición inicial de las tareas, para hacerlas más ricas. Una vez clarificada la meta u objetivo de la tarea, podemos examinar posibles recursos para realizar las tareas, examinando materiales y recursos educativos, tal como hicimos en el primer apartado de este módulo. Al asociar tareas y materiales, su coherencia se constatará como en el Módulo 3 y lo reflejamos en la tabla del anexo 2.

Pero también podemos alterar las operaciones que se pueden realizar con los recursos cuando variamos las condiciones en que se desarrolla la tarea. La primera sería la propia formulación de la tarea, estudiando si refleja claramente la propuesta de acción y las condiciones, de manera adecuada a las capacidades y variedad de alumnos a los que va dirigida.

Pero también podemos alterar otros elementos, como los siguientes:

- Comunicación en clase (tanto alumno – alumno como alumno – profesor), indicando mecanismos que se van a emplear para favorecerlas).
- Forma de agrupar a los alumnos para resolver la tarea (en gran grupo, en pequeños grupos, en parejas o de manera individual).
- Tiempo dedicado a la tarea y forma de organizarlo.

Así como para estudiar la coherencia entre tareas y análisis previos tenemos la posibilidad de realizar análisis internos de estos elementos, en este caso requerimos de un elemento externo que nos permita contrastar las ventajas de estas decisiones. Hemos recurrido a textos que describen procesos de enseñanza basados en una concepción constructivista del aprendizaje por percibir que los currículos actuales de matemáticas en nuestros países enfatizan esta concepción.

A tal fin, es recomendable la lectura del ya clásico libro de Cesar Coll (1995), *El constructivismo en el aula*, que, además de hacer una clarificación de qué se entiende por esta postura de aprendizaje, da ideas para poder aplicarlas en el aula.

Con vistas a la finalidad perseguida en este curso, nos hemos centrado en el artículo de Antoni Zabala, en el que se describen variables para analizar la enseñanza, incluyendo variables que ayudan a realizar un aprendizaje más próximo a las ideas constructivistas del aprendizaje. Resumimos las apreciaciones de Zabala en el cuadro 4.1, que emplearemos para examinar cada tarea y variar sus condiciones. El cuadro nos permite decir que estaremos en una interpretación constructivista cuando dispongamos de más elementos de la columna de la izquierda.

Cuadro 4.1. UNIDADES DE ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA (Zabala, 1995)	
1. Secuencia de actividades y tareas	
Tipos de tareas: Investigación, Proyecto, Problema	Rutinarias (Ejercicio, Memoria)
2. Papel del profesor y del alumno. Relaciones interactivas	
ALUMNO: Participa, coopera, actúa, hace	Recibe, escucha, copia
PROFESOR: Dirige y organiza	Expone
3. Organización social	
Formas variadas de organización (individual, grupos, gran grupo, etc.)	Gran grupo e individual
4. Organización del espacio y tiempo	
ESPACIO: Aula laboratorio, Taller, otros espacios	Aula auditorio sólo
TIEMPO: Abierto, amplio	Fijo, buscando minimizar
5. Organización de contenidos	

ORGANIZACIÓN: Global, dinámica	Formal, lógica
6. Materiales curriculares	
Variados, adaptados	Uso reducido
7. Sentido de la evaluación	
De proceso, informadora	De resultados, sancionadora

Una vez definida una tarea, podemos alterar una o varias condiciones de realización. A partir de ahí buscaremos argumentos que nos permitan valorar cuáles de estos criterios son más favorables a alguna de las versiones de la tarea. Reflejaremos las características de la redacción final de las tareas en la tabla del anexo 4.

4.3. Tareas para desarrollar la competencia de resolución de problemas

Al afrontar en todos los grupos de estudiantes de MAD la competencia de formular y resolver problemas, como una de las que se desean desarrollar en los alumnos, tenemos que examinar en qué grado sus tareas colaboran a lograrla. Para ello emplearemos como criterios los relacionados con la complejidad de la tarea y su correspondencia con las actuaciones previstas en el informe PISA.

Para examinar el primer aspecto, y siempre tomando como referencia las tablas de complejidad de PISA (anexo 5), examinaremos las dimensiones que diferencian el nivel de complejidad, es decir:

- El tipo problema, que cubre dos aspectos, la familiaridad del alumno con el problema, y la naturaleza del problema.
- El procedimiento que se exige para resolverlo, que tiene dos dimensiones con cierta relación entre ellas, el grado en que se ha practicado con anterioridad, y el grado de originalidad que exige-
- El contenido matemático que se emplea en la tarea, que puede centrarse en uno o requerir relacionar varios
- La forma de enunciado de la tarea y cómo presenta y comunica los datos, que puede hacerlo de una forma o emplear diversos elementos del lenguaje matemático.
- La demanda de la tarea, que puede limitarse a pedir la solución, o bien generalizar o reflexionar sobre las estrategias.

En el siguiente cuadro hemos resumido estas dimensiones de complejidad, graduándolas según su correspondencia con los tres niveles.

Dimensiones	Reproducción	Conexión	Reflexión
a) Tipo de problema	Familiar	Menos	Nuevo
	Cerrado	Menos	Abierto
b) Procedimiento	Practicado	Menos	No practicado
	Estándar	Independiente	Original
c) Contenido matemático	Uno	algunos	Varios, conexiones
d) Enunciado, representación	Datos, verbal	+ Gráficos, esquemas, tablas, ilustraciones	+ Gráficos, esquemas, tablas, ilustraciones
e) Demanda	Solución	+ Generalización	+ Reflexión sobre estrate-

			gias
--	--	--	------

Examinando la tarea podemos establecer a qué nivel de complejidad cognitiva pertenece, reflejándolo en la tabla del anexo 7.

5. SECUENCIACIÓN DE TAREAS EN LA UNIDAD Y DISEÑO DE UNA CLASE

Una vez establecidas las tareas que vamos a realizar en el transcurso de la unidad didáctica, procede organizarlas en secuencias de tareas que correspondan a las sesiones de clase. Por tanto la finalidad de este último epígrafe es organizar las tareas en la unidad didáctica, identificar las sesiones de clase de que se compone la unidad didáctica, distribuyendo los elementos en estas sesiones y finalmente diseñar una sesión de clase.

Para ello en este apartado comenzaremos por examinar brevemente la función que pueden desempeñar las tareas y cómo actúan en secuencias, luego estableceremos criterios para distribuir las sesiones de clase en la unidad, a continuación examinaremos algunos elementos que completan las tareas en la gestión de la clase, para poner en juego todos estos elementos diseñando una sesión de clase de la unidad didáctica, con lo que terminamos el análisis de instrucción.

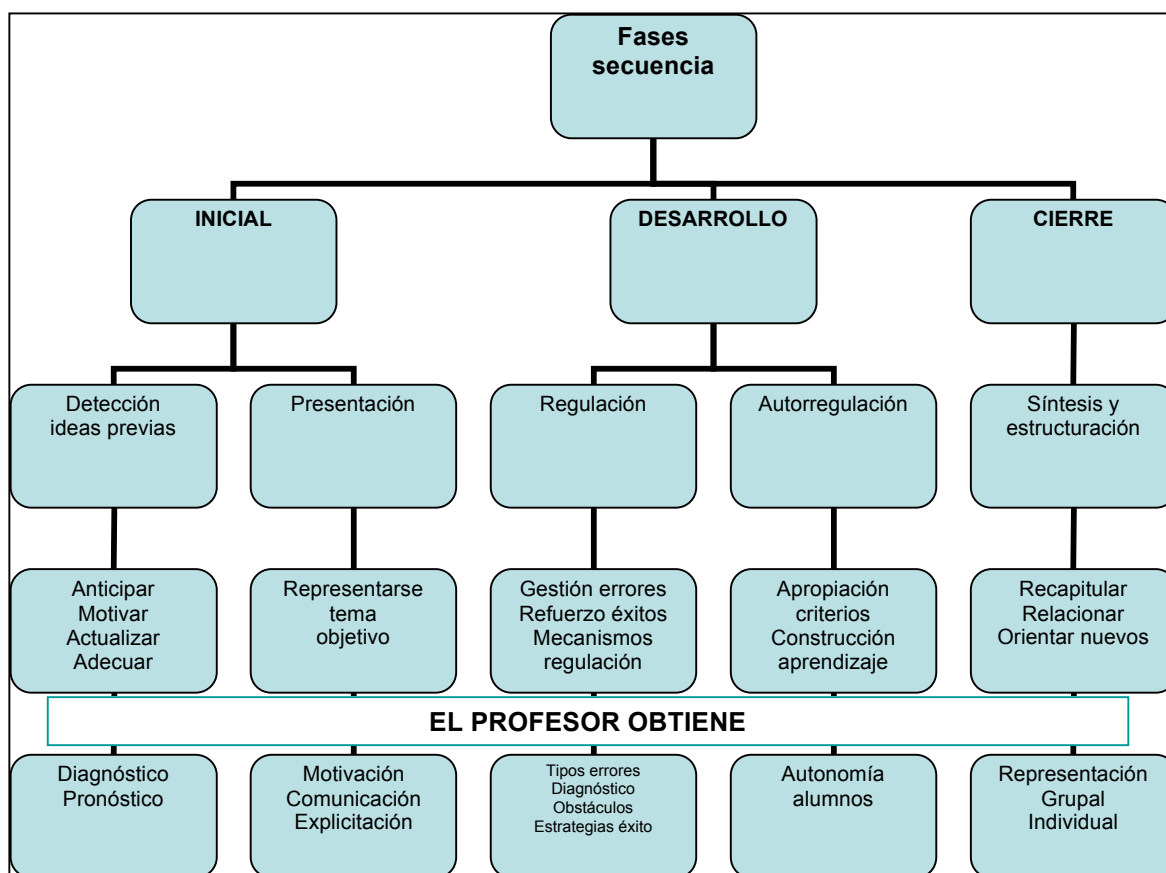
5.1. Secuencia de tareas

Uno de los pasos finales en la programación es organizar y secuenciar las tareas. En esta actuación intervienen los análisis previos, pero conviene tomar en cuenta otros elementos.

La secuencia de enseñanza tiene que guardar ciertas regularidades, que permitan al alumno saber qué se va a trabajar, qué se espera que aprenda al final del estudio, que le lleve a distinguir qué aprendizaje se ha realizado, a qué contenido y objeto matemático corresponde, etc. Parece obvio que el proceso de enseñanza debe tener un principio, que incluya la presentación de la unidad pero además señale las condiciones de realización, un desarrollo, en el que se ejecuten las tareas principales, y un desenlace para poner en claro lo que se ha hecho, se haga balance de lo aprendido y se formalice suficientemente para facilitar la estructuración de conocimientos del alumno.

Giné y Parcerisa (2003) nos recuerdan que el ritmo habitual de un proceso formativo debe guardar una cierta secuencia que ellos concretan en:

- Fase Inicial, en la que el fin es poner al alumno en situación de aprender, comprende la presentación del tema y la recogida de información sobre las concepciones previas de los alumnos
- Fase de desarrollo en la que se realizan los aprendizajes, mediante la ejecución de las tareas.
- Fase de cierre, en la que se estructuran y consolidan aprendizajes, además de examinar en qué grado se han logrado los objetivos previstos.



Esquema 5.1: Fases en la secuencia formativa. Ginés y Parcerisa (2003)

El esquema 5.1 recoge estas fases, expresando las actuaciones en cada parte.

Par diseñar qué tareas vamos a hacer en cada fase, tenemos que examinar la función de las tareas seleccionadas. Ya hemos distinguido tipos de tareas, cuando examinábamos el grado en que contribuyen a desarrollar un aprendizaje constructivista. Volvamos sobre este punto, examinando con más detalle qué finalidad instructiva pueden tener las tareas.

El texto de Parcerisa (1996), nos da información al respecto, y de él extraemos una clasificación de tareas para examinar qué papel van a desempeñar y cómo podemos organizarlas en la enseñanza.

- a) Tareas que tienen como fin ayudar a conocer los aprendizajes previos realizados por el alumno
- b) Tareas para ayudar a la motivación y de relación con la realidad
- c) Tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento
- d) Tareas de elaboración y construcción de significados
- e) Tareas de descontextualización y de aplicación
- f) Tareas de ejercitación
- g) Tareas de síntesis

Como puede apreciarse, las (a) y (b) formarán parte de la fase inicial, las (c), (d), (e) y (f), de la fase de desarrollo y las (g) de la de cierre. En el ejemplo del TANGRAM, para la definición de polígono, del apartado 1 de este módulo, se aprecia el papel que desempeña cada tarea. Como puede apreciarse, este papel no es objetivo, sino que depende de las condiciones en que se realizan, de las tareas y

aprendizajes anteriores, etc. El grado en que se contextualiza el contenido, los elementos de estímulo y motivación, y el peso que tiene el contenido a aprender en cada tarea nos puede dar una indicación de su función en la secuencia. Por tanto, la función dependerá de sus potencialidades, pero también de las demás tareas. Sus potencialidades se pueden apreciar en los grafos de capacidades que se han elaborado en el módulo 3. En la tabla del anexo 9 recogemos apreciaciones sobre potencialidades de las tareas.

5.2. Distribución de la unidad en sesiones de clase

Una vez tenemos los elementos de la unidad didáctica hemos de distribuirlos en sesiones de clase. Para ello tenemos que tomar decisiones respecto a cuánto tiempo vamos a dedicar a la unidad temática y cuántas y cuáles sesiones a cada contenido y objetivo.

La primera decisión debe tomar en consideración la cantidad de unidades de un curso y la importancia de la unidad en el conjunto del curso. La programación general del curso puede haber establecido acuerdos entre profesores que permiten ubicar la unidad en un periodo de tiempo, incluyendo la decisión sobre su duración en sesiones de clase. Para estas decisiones conviene organizar las unidades por pesos relativos en el curso, sumar todos los pesos y distribuir las sesiones de clase en función de ellos. Mirar la cantidad de lecciones que un libro de texto dedica a la unidad es una ayuda para asignar pesos y establecer la duración de la misma, en caso de que no haya requerimientos superiores que nos lo impongan.

Una vez conocido el tiempo disponible, en forma de cantidad de sesiones de clase, pasamos a distribuir las tareas seleccionadas, teniendo en cuenta también los contenidos y finalidades. Si bien los objetivos nos ayudan a decidir cuánto tiempo y tareas dedicar, los contenidos nos ayudan a compartir con los alumnos la lógica de la distribución.

Tal como ha derivado del análisis cognitivo, las tareas están analizadas en secuencias de capacidades, que nos han llevado a establecer caminos de aprendizaje. Pero también se ha examinado la complejidad y funcionalidad de las tareas. Por tanto, una vez identificadas tareas que respetan el camino de aprendizaje previsto, seleccionaremos una secuencia con grado creciente de dificultad y con grado decreciente de funcionalidad.

Una vez organizadas las tareas, resumamos esta información en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: Distribución de sesiones de clase de una unidad didáctica				
Sesión de Clase	Objetivos	Tareas	Contenido	Función en secuencia

5.3. Diseño de una clase: tareas y elementos de gestión

Una vez establecida la secuencia de sesiones de clase, pasamos a organizar las tareas y actividades que vamos a realizar en cada sesión. En esta parte nos vamos a centrar en diseñar una sesión de clase. Para ello tenemos que organizar las tareas seleccionadas, y el contenido y objetivos correspondientes.

Organicemos esta colección de tareas en una secuencia en la que tengamos en cuenta las fases de una secuencia instructiva, aplicados a una sesión. De esta forma podemos dar lugar a una primera secuencia que vamos a ir mejorando progresivamente. Recojamos esta secuencia en la tabla 5.2:

Tabla 5.2: Primera secuencia de tareas en la sesión de clase
Sesión número / nombre
Análisis de contenido y cognitivo de la sesión - Contenidos - Situaciones y contextos - Capacidades - Objetivos
Relación con sesiones anterior y posterior
Secuencia de tareas, por orden de desarrollo y según la fase del proceso:

Para refinar este esquema tenemos que pasar a describir el proceso de actuación que proponemos como profesores. La secuenciación de tareas tiene que articularse en un todo, para lo que habrá que establecer un guión de actuación que le de sentido a las tareas. Decidir esto es lo que se llama planificar el la gestión de clase. Conviene revisar qué actividades va a realizar el profesor para presentar el tema, revisar las formas previstas de comunicación y agrupamiento de los alumnos, estableciendo los ele-

mentos que empleará en la moderación y puestas en común, en las tareas en que se contemple esta posibilidad.

De esta forma, de cada tarea tendremos una tabla como la 5.3:

Tabla 5.3: Actividades que precisan la tarea		
Tarea:	nº	Duración aprox.
Gestión aula (actuación profesor/alumno; agrupamientos, etc.)		
Comentario sobre intenciones profesor		

Con estas informaciones el profesor sabe qué va a hacer, cómo lo hace y cuál es su intención, de manera que si tiene que cambiar algo en el transcurso de la misma, pueda dar prioridad a las intenciones sobre la práctica.

Cuando tiene toda esa información sobre tareas, el fichero de tareas, la sesión de clase está programada, sólo falta situar el proceso en un todo que le sirva de guión de intervención.

Una tabla como la que aparece en el anexo 9, resumirá todo el complejo proceso realizado hasta el momento.

Finalmente vamos a revisar los elementos de los análisis anteriores para dar coherencia final al producto. Tal como indica Antonio Marín (s.f.) en el proceso hemos ido alterando análisis anteriores para ajustarlos mejor entre sí y a valoraciones externas, como a las prácticas de un aprendizaje constructivista.

Conviene hacer una revisión final que permita apreciar el equilibrio de la unidad. En esta revisión examinaremos si se han abarcado todos los objetivos previstos, si se ha respetado la importancia concedida a cada objetivo o a la dificultad en el número y calidad de las tareas, si hemos garantizado diversidad de contextos y si hemos tenido en cuenta la dificultad de las tareas en su secuenciación.

REFERENCIAS

Fundamentación teórica

- Coriat, M. (1997). Materiales, Recursos y Actividades: Un panorama. En Rico, L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, Horsori. Pp. 155-178.
- Christiansen, B. (1986). Task and Activity. In B. Christiansen, A.G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (243-308), Dordrecht, Kluwer.
- García Denis, M. (2009). *Resolución de problemas, estrategias y competencias*. Ponencia en Jornadas de Profesores de Matemáticas. Sevilla.
- Giné y Parcerisa (Coords.) (2003). *Planificación y análisis de la práctica educativa*. Barcelona, Graó.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral no publicada. Granada, España: Universidad de Granada.
- Marín, A. (s.f.) *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: Organización y secuenciación*. Documento interno.
- Parcerisa, A. (1996) *Materiales curriculares*. Barcelona. Grao.
- Ponte, J.P., Boavida, A.M., Graça, M. Y Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa, Ministerio da Educação, PRODEP. (pp. 71-95).
- Ponte, J.P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Jiménez, L. Santos y J.P. Ponte (Coords.) *La actividad matemática en el aula*. (pp. 25-34). Barcelona, Graó.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ice - Horsori.
- Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.
- Zabala, A. (1993). Los enfoques didácticos En “*El constructivismo en el aula*”. Coll,C. (ed) Barcelona, Grao.

Documentos curriculares e institucionales

- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998a). *Indicadores de logros curriculares*. Bogotá, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998b). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Autor.
- OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París:OECD.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria*. BOE, 5, 677-773.

Artículos sobre materiales didácticos

- Alcalá, M. *El Material para la enseñanza de las matemáticas*.
- Carretero, R. Coriat, M. y Nieto, P. (1995). *Secuenciación, Organización de Contenidos y Actividades de Aula*. Junta de Andalucía, Materiales Curriculares. Educación Secundaria Obligatoria, Vol. 17, Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia

- Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la Matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid, Santillana.
- Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la Matemática Moderna*. Madrid, Trillas
- Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (1964). *El Material para la Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid, Aguila
- Coriat, M. (1997). Materiales, Recursos y Actividades: Un panorama. En Rico, L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, Horsori. Pp. 155-178
- Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria* Madrid, Síntesis. Pp. 41-60. (Disponible en <http://www.ugr.es/local/pflores/>)
- Puig Adam, P. (1958). *El Material Didáctico Matemático Actual*. Madrid, Publicaciones de la Revista de Enseñanza Media, Ministerio de Educación Nacional.
- Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. En Bishop et all. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, 411-434. Kluwer Academic Publishers, Netherlands
- Thompson, P.W. (1994). Concrete Materials and Teaching for Mathematical Understanding. *Arithmetic Teacher* Vol. 41, nº 9, 556-558.

Artículos sobre tareas en distintos temas de matemáticas escolares

- Alcalá, M. (2002). *Números enteros en la escuela*. Granada, Proyecto Sur.
- Berenguer, L. (2009). *Materiales para la enseñanza de los números*. Thalescica.
- Berenguer, L. (2009). *Materiales para la enseñanza del álgebra*. Thalescica.
- Fiol, M.L. y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid, Síntesis.
- Flores, P. (2009). *Materiales para la enseñanza del álgebra*. Universidad de Granada.
- Hands on equations: <http://www.borenson.com/>

Libros sobre temas de matemáticas de la colección Síntesis

- Esteban M., Ibañes M., Ortega T. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Fiol, M.L. y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid, Síntesis.
- Labraña A., Plata A., Peña C., Crespo E., Segura R. (1995). *Álgebra lineal. Resolución de sistemas lineales*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Socas M., Camacho M., Palarea M.M., Hernández J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Anexo 1:

TABLA DE ANÁLISIS DE LA TAREA EMPLEANDO MATERIAL DIDÁCTICO

Material y tarea	Análisis de contenido			Análisis cognitivo	
	Acciones Fenomenología	Sistemas de representación	Estructura Conceptual.	Expectativas	Limitaciones

Anexo 2:

ANÁLISIS DE LA COHERENCIA DE LA TAREA CON ANÁLISIS ANRTERIORES

TAREA	Análisis de contenido			Análisis cognitivo	
	Acciones Fenomenología	Sistemas de representación	Estructura Conceptual.	Expectativas	Limitaciones

Anexo 3

CARACTERÍSTICAS Y CONDICIONES DE APLICACIÓN DE LA TAREA

Tarea:		
Elementos de la tarea	Meta	
	Recursos/ Operaciones	
	Contenido	
	Situación aprendizaje	
	Complejidad	
Condiciones	Presentación	
	Comunicación (
	Agrupamiento alumnos	
Observaciones		

Anexo 4.

UNIDADES DE ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA (Zabala, 1995)

Tarea	Tipo tarea	Papel		Organización social	Organización		Organización Contenidos	Material Didáctico
		Alumno	Profesor		Espacio	Tiempo		
T1								
T2								
T3								
T4								
T5								
T6								
T7								
T8								

Anexo 5:

COMPLEJIDAD DE TAREAS EN PISA: AGRUPACIÓN DE ACCIONES COGNITIVAS DEMANDADAS EN TRES NIVELES DE COMPLEJIDAD

	Grupo 1: Reproducción	Grupo 2: Conexión	Grupo 3 Reflexión
1. Pensar y razonar.	Formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»); distinguir entre definiciones y afirmaciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.	Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.	Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?, ¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.); distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.
2. Argumentación	Seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados.	Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (p. ej., «¿qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?»).	Razonar matemáticamente de manera sencilla, distinguiendo entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos de diferentes tipos; emplear la heurística (p. ej., «qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?», «¿cuáles son las propiedades esenciales?», «¿cómo están relacionados los diferentes objetos?»).
3. Comunicación.	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o explicar cálculos y resultados (normalmente de más de una manera) a explicar asuntos que implican relaciones complejas, entre ellas relaciones lógicas. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.

4. Construcción de modelos.	Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo.	Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad, y sabiendo también comunicar los resultados del modelo.	Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo, traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos complejos o muy diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes y pasar alternando de los diferentes modelos (y sus resultados) a la «realidad», incluyendo aquí aspectos de la comunicación de los resultados del modelo: recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción de modelos y validar el modelo resultante. Conlleva también reflexionar analizando, realizando críticas y llevando a cabo una comunicación más compleja sobre los modelos y su construcción.
5. Formulación y Resolución de Problemas.	Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada;	Plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolverlos mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).	Exponer y formular problemas mucho más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolverlos mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones). También conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.
6. Representación	Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas. También conlleva combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.
7. Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico ya practicado en situaciones y contextos desconocidos y manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones, y realizar cálculos. También conlleva la habilidad para saber tratar con expresiones y afirmaciones complejas y con lenguaje simbólico o formal inusual, y realizar traducciones entre este lenguaje y el lenguaje natural

Anexo 6:

EJEMPLO DE ANÁLISIS DEL NIVEL DE COMPLEJIDAD DE UNA TAREA EN RELACIÓN A LAS COMPETENCIAS PISA

Tarea: Descubre qué números entre los 40 primeros no se pueden escribir mediante una suma de dos números consecutivos. Indaga la razón.

Capacidades	1. Descubrir relaciones entre números naturales (PR, AJ C, LS)			
Tipos contenidos	Algoritmos de + y – (D); Cálculo mental (E) Expresión de un número como resultado de distintas operaciones (D) Razonamiento inductivo (R) Argumentos para justificar propiedades (R) Reconocimiento de patrones numéricos (E)			
Sistemas de representación	Simbólico, gráfico Puede haber argumentaciones basadas en configuraciones de puntos			
Nivel complejidad en competencias PISA	Pensar y Razonar	Argumentar	Comunicar	Lenguaje simbólico
Reflexión	Formular ¿Cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación?	Razonar Distinguiendo entre pruebas y otras formas de argumentar	Saber expresarse explicando asuntos que implican relaciones	Resolver cálculos mediante procedimientos rutinarios

Anexo 7:

ESTUDIO NIVEL COGNITIVO DE COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS PROPUESTAS EN RELACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tarea	Objetivo	Conten.	Dimensiones complejidad					Balance
			Tipo	Proced.	Conte	Enuncia	Demanda	
T1								
T2								
T3								
T4								
T5								
T6								
T7								
T8								
T9								
T10								

Anexo 8.

TABLA IDENTIFICACIÓN DE FUNCIÓN DE TAREA Y UBICACIÓN EN FASES DEL PROCESO INSTRUCTIVO.

Tarea	Tipo	Fase
T1		
T2		

Anexo 9.

PLANIFICACIÓN DE SESIÓN DE CLASE

Unidad didáctica:	
Sesión de clase:	Contenido Objetivos
Tarea 1	
Tarea 2	
Tarea 3	
Tarea 4	