

## ENSEÑAR MATEMÁTICAS A PARTIR DE UN FENÓMENO FÍSICO, UN EJEMPLO PRÁCTICO PARA INTRODUCIR LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Irene Ferrando Palomares<sup>47</sup> – Luis Puig Espinosa<sup>1</sup> – María Luisa Pedro Ferrer<sup>2</sup>  
[irene.ferrando@uv.es](mailto:irene.ferrando@uv.es) – [luis.puig@uv.es](mailto:luis.puig@uv.es) – [mapefe8@uv.es](mailto:mapefe8@uv.es)

1. Universitat de València, España
2. IES nº. 1 Xàbia, España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Educación secundaria

Palabras clave: modelización, educación secundaria, tabletas

### Resumen

*Durante los últimos años se han desarrollado diversos proyectos centrados en la elaboración de modelos de enseñanza basados en el uso de la modelización de fenómenos físicos para introducir conceptos matemáticos relativos a familias de funciones, representación gráfica y comprensión de parámetros en diferentes entornos interactivos (calculadoras gráficas o tabletas iPads). Siguiendo esta línea, nos proponemos mostrar el diseño y los resultados preliminares de una experimentación de una secuencia de enseñanza que parte del fenómeno de la distribución del sonido en el aula.*

### Introducción

Las tareas de modelización son idóneas para que los alumnos den sentido a conceptos y procedimientos matemáticos abstractos (Puig, 2015). Nuestra propuesta se enmarca en el diseño de tareas de modelización que incluyen la toma y el análisis de datos reales a través de dispositivos digitales, en línea con los trabajos de Ortega y Puig (2014, 2015) y Monzó y Puig (2013) y Diago et al (2016). Al igual que en estos trabajos, el punto de partida de la propuesta es un fenómeno físico (la distribución de la intensidad del sonido en un aula) y el objetivo es que, a través del desarrollo de la propuesta, los alumnos trabajen con conceptos relativos a la organización espacial de toma de datos, los errores de medición y la

---

<sup>47</sup> Los autores Irene Ferrando y Luis Puig han realizado este trabajo mediante las ayudas de los proyectos EDU2015-6931-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, así como el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y el proyecto GVPROMETEO2016-143 financiado por la Generalitat Valenciana

representación de los valores de una función definida sobre el plano que toma valores reales positivos.

La propuesta que vamos a presentar ha sido puesta en práctica con alumnos de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria; aunque no vamos a centrar nuestra comunicación en la descripción y el análisis de esta experiencia, ésta nos permitirá describir mejor qué aspectos han de tenerse en cuenta al llevar la propuesta al aula.

El diseño de la propuesta es similar al planteado por Diago, Ferrando y Puig (2015), sin embargo, en este caso, pretendemos dirigir a los alumnos para que trabajen conceptos matemáticos concretos y que, en parte final de la secuencia, organicen el fenómeno físico estudiado mediante una representación de una función de dos variables basada en una extensión bidimensional de la idea de aplicada de Euler (1797, t.II, p.5, citado en Navarro, 2012)

### **Diseño de la secuencia**

En Blum (2015), el autor presenta diez aspectos que, en base a su amplia experiencia, son claves al trabajar con la modelización como herramienta de enseñanza, a continuación, destacamos cuatro que hemos tenido en cuenta en el diseño de nuestra propuesta:

- Gestión del aula efectiva y centrada en los alumnos: organización racional del tiempo disponible, separación entre enseñanza y evaluación, uso de los errores como oportunidades de aprendizaje, organización grupal del trabajo.
- Los alumnos deben participar activamente en la actividad, deben estar activos desde el punto de vista cognitivo (Schoenfeld, 1992). Para ello es fundamental que haya un equilibrio entre el trabajo individual del alumno y la ayuda del profesor, intentando que ésta sea mínima pero suficiente (Aebli, 1983).
- Se debe promover la reflexión de los alumnos sobre su propio aprendizaje, activando así la metacognición.
- Las tareas de modelización son tareas abiertas y, por tanto, admiten múltiples soluciones. Al llevarlas al aula debemos intentar promover soluciones propias, evitando dirigir a los alumnos hacia una solución concreta (Schoenfeld, 1988)

Nuestra propuesta parte de un fenómeno físico, la distribución de la intensidad de sonido en el aula, así el objetivo es que, a través de la secuencia, los alumnos sean capaces de responder tres cuestiones:

- ¿Cómo se distribuye el sonido en el aula?
- ¿Cambia mucho la percepción del sonido de un punto a otro del aula?
- ¿De qué variables depende nuestra percepción sonora en el aula?

La secuencia que hemos diseñado está organizada en tres partes. En la primera parte se presentará el problema (a partir de las tres preguntas previas) y los alumnos se familiarizarán con algunos conceptos de física del sonido que aún no son conocidos en cuarto de ESO. A continuación, los alumnos deberán organizar y realizar la toma de datos reales usando dispositivos iPads como sonómetros. Por último, una vez tengan los datos, los alumnos deberán representarlos con diferentes herramientas (analógicas y digitales) para interpretarlos y dar respuesta a las tres preguntas iniciales. A continuación, procedemos a describir en detalle cada una de las sesiones de la secuencia didáctica.

#### Sesión 1. Planteamiento del problema e introducción de conceptos básicos

Esta primera sesión tiene tres objetivos: introducir conceptos básicos de física del sonido, ayudar a los estudiantes a que se familiaricen con la aplicación Decibel Ultra Pro que utilizarán en la toma de datos y, por último, organizar la toma de datos que se realizará en la sesión posterior. Los alumnos se organizarán en grupos heterogéneos de 4 o 5 componentes y la explicación de la profesora se apoyará en diapositivas digitales y un dossier con fichas de actividades.

En primer lugar, se explica a los alumnos brevemente en qué va a consistir la secuencia que van a desarrollar presentando las tres preguntas de investigación a las que pretendemos que den respuesta. Respecto a la introducción de conceptos físicos, dado que son complejos, únicamente se pretende introducir brevemente algunos aspectos básicos relativos a la generación y propagación del sonido. Una vez conocida la necesidad de una fuente de vibración y de un medio físico de propagación, se introduce la magnitud de que va a ser medida en la experiencia, la intensidad sonora. En este punto puede ser interesante tratar algunos fenómenos que pueden influir en la medida de la intensidad sonora: la reflexión y la absorción.

Dado que los alumnos deberán tomar datos reales, es adecuado explicarles cómo se realizan estas medidas en contextos reales (en la organización de un concierto en una sala, por ejemplo). A continuación, los alumnos van a trabajar con la aplicación que va a permitirles utilizar los iPads como sonómetros; para que se familiaricen con ella, les pedimos que tomen y lean medidas y las comparen con una serie de intensidades que se presentan en una tabla. Un primer momento importante en nuestra propuesta es la organización de la toma de datos, queremos que los alumnos decidan cómo medir la intensidad del sonido en el aula de forma que aparezcan dos conceptos matemáticos: el uso de un retículo regular para poder obtener un mapa fiable de la intensidad sonora en el aula y el uso de la medida como medida aproximada para minimizar los errores de medición. Para ello planteamos la siguiente actividad que los alumnos resuelven en grupo:

Actividad 1. Organización de la toma de datos. Contesta las siguientes preguntas justificando tus respuestas:

- ¿Es posible medir la intensidad sonora en todos los puntos del aula? En caso afirmativo, ¿cómo? En caso negativo, explica por qué y de qué forma podrías hacer una aproximación.
- ¿Crees que la medida variará usando dispositivos diferentes? Compruébalo comparando tus medidas con las de otros grupos.
- ¿Crees que será suficiente tomar una medida en cada punto?

Los alumnos disponen de unos diez minutos para reflexionar sobre las cuestiones anteriores. A continuación, se realiza una puesta en común, es importante intentar dirigir la discusión hacia aspectos fundamentales relativos a la toma de datos. En primer lugar, se debe reflexionar sobre la necesidad de establecer un retículo regular para determinar una distribución de los puntos en los que se van a tomar medidas. En relación con la necesidad de tomar más de una medida en cada punto, se introduce el concepto de error de medición en función de la orientación del micrófono y del uso de la media de cuatro medidas (micrófono orientado hacia delante, detrás, izquierda y derecha) para minimizar errores. Por último, teniendo en cuenta que las medidas difieren de un dispositivo a otro, se establece que es necesario utilizar un único iPad para tomar todas las medidas y evitar variaciones que pueden llegar hasta 3dB.

## Sesión 2. Toma de datos

En base a lo trabajado en la primera sesión, se decide organizar la toma de datos en el aula sobre un retículo de 10 filas y 8 columnas usando un único dispositivo. Al inicio de la sesión se entrega a cada alumno una ficha (véase Fig. 1 en anexo) para anotar las medidas, dado que en la experiencia desarrollada se formaron cinco grupos, cada uno tomó medidas en dos filas

del retículo. Previamente al inicio de la sesión, la profesora responsable de la experiencia preparo el aula señalando los puntos en que debían tomarse medidas (en los centros de cada uno de los 80 cuadrados del retículo).

Para la toma de medidas se colocó, sobre la mesa del profesor, un ordenador portátil que emitía ruido rosa. Para evitar problemas de organización durante la toma de medidas, los alumnos se separaron en dos aulas, mientras unos tomaban datos el resto trabajaba en un aula auxiliar haciendo las medias de los datos tomados previamente.

### Sesión 3. Representación de los datos con cubos multilink

Durante esta sesión los alumnos trabajan por grupos, el objetivo es representar los datos tomados en la sesión anterior; para ello les proporcionamos a cada grupo 190 bloques multilink, un material habitual en las aulas de Educación Infantil y Primaria. Además, se les reparte una ficha en la que presentan las medias de las medidas tomadas en la sesión anterior (véase Fig. 2 en anexo). Se propone la siguiente actividad:

Actividad 1: a partir de los datos presentados en la tabla, busca una posible representación con los cubos multilink que tienes a tu disposición. Una vez realizada la representación, realiza fotos con el iPad y explica su significado. (ayuda: puedes empezar pasando los datos de la tabla al mapa del aula)

En esta sesión los grupos trabajan de forma autónoma no dirigida, no se realiza una puesta en común, la profesora se pasa por cada uno de los grupos para preguntar por el proceso de representación y orientar en caso de duda. El objetivo es que los alumnos observen que a cada punto del plano (discretizado por las celdas del retículo), se le asocia un valor, la intensidad del sonido en ese punto. Así, a cada punto  $(x,y)$ , se le asocia una intensidad  $z$ , que, usando la representación con los cubos multilink, corresponde a una “torre” de una altura determinada.

### Sesión 4. Comprensión de la representación y estudio final del problema I

El objetivo de esta sesión y de la siguiente es que los alumnos den sentido matemático a las representaciones obtenidas en la sesión anterior mediante materiales manipulables. Se pretende que, los alumnos formalicen matemáticamente los argumentos que pudieron utilizar en la sesión anterior. En primer lugar, se recordó el problema real planteado en la primera sesión y se indicaron aquellos aspectos ya habían sido trabajados. El primer aspecto sobre el que se quería incidir formalmente era el uso de un retículo regular para la toma de datos y los valores obtenidos en la medida experimental realizada. Así, observando la Fig. 3 (anexo) que recoge las medidas tomadas por los alumnos, debían realizar la siguiente actividad.

- Actividad 1: Si denotamos por  $x$  a los valores de cada una de las columnas y por  $y$  a los valores de las filas,
- ¿Qué valores puede tomar la variable  $x$ ?
  - ¿Qué valores puede tomar la variable  $y$ ?
  - ¿Qué posición representa cada punto del mapa del aula?
  - ¿Qué estamos haciendo cuando tomamos nota del valor de los decibelios en cada punto?

El objetivo de esta actividad es que los alumnos reflexionen alrededor de la cuadrícula base escogida para realizar la medición sobre el mapa del aula, pretendemos que formalicen esta cuadrícula como un cuadrante de un sistema de ejes cartesianos, de forma que, poco a poco, los alumnos observen que, están asignando a cada par  $(x,y)$  (las coordenadas del punto de medición), el valor correspondiente a la intensidad del sonido en ese punto. Cuando, en la sesión anterior, los alumnos intentaron representar los datos mediante los bloques multilink, surgieron dos problemáticas de interés: los valores de la intensidad eran altos y, en comparación, las diferencias entre valores no eran excesivamente grandes, por tanto, para poder extraer conclusiones de la representación y hacerla de forma efectiva (el número de cubos es limitado) es importante fijar un valor inicial de intensidad y escoger bien el valor para cada cubo. Es por ello que, en la siguiente actividad, se introduce la idea de la importancia de buscar un valor inicial para realizar la representación.

- Actividad 2: Observa que las medidas de la intensidad oscilan entre 63.7 dB y 79.8 dB. Contesta a las siguientes preguntas.
- ¿Qué ocurre si intentamos representar con cubos multilink todos los valores contando desde 0dB?
  - Fíjate en el rango de valores que toman las medidas, ¿qué valor crees que es el más adecuado para comenzar a representar los datos con bloques multilink?

Una vez definido el valor inicial para comenzar la representación, se propone a los alumnos que recalculen los valores de la intensidad para que, a continuación, les resulte más sencillo reflexionar sobre el valor que le darán a cada cubo de forma que la representación permita ver diferencias entre puntos. Se podría prescindir de esta actividad, pero, en el desarrollo de la experiencia que llevamos a cabo resultó de utilidad para facilitar los cálculos posteriores.

- Actividad 3: En la actividad anterior nos hemos puesto de acuerdo en tomar un valor inicial para representar los datos, si representamos por 0 ese valor inicial, ¿cómo se redefinen los valores asignados a cada uno de los puntos del mapa del aula? ¿qué representan ahora esos valores?

El siguiente paso consiste en dar un peso a cada uno de los elementos (cubos) utilizados en la representación. Es importante hacer ver a los alumnos que, dado que el número de cubos es limitado, hay que ajustar el valor que damos a cada uno. En este punto, queremos comentar que, en la sesión anterior, los alumnos, al observar esta dificultad, decidieron asignar un peso

a los cubos diferentes en función del color, pero vieron que esto impedía identificar, a simple vista, las variaciones de intensidad.

Actividad 4.

a) Si a cada uno de los cubos le asignamos el valor 0.1 dB, ¿cuántos cubos serán necesarios para representar el valor de la intensidad en el punto (8, A)?

b) Si cada grupo dispone de unos 190 cubos, ¿qué valor podemos asignar a cada uno de ellos? ¿cómo deberíamos ajustar, en base a ese valor, los valores hallados en cada uno de los puntos del aula?

Una vez finalizada la actividad los alumnos realizaron la representación dándole a cada cubo el valor de 3dB, obteniendo la representación mostrada en la Fig. 4 (en anexo). Al analizar la representación anterior, observamos que, si no tenemos suficientes y damos a cada cubo un peso excesivo, podemos desvirtuar la representación y que no se vea de forma clara la variación en la intensidad en cada zona del aula, además esto obliga a redondear los valores de la intensidad en cada punto y, por tanto, perder información. Así, en la siguiente sesión proponemos a los alumnos que utilicen un método de representación alternativo en el que el número de “bloques” es ilimitado.

#### Sesión 5. Comprensión de la representación y estudio final del problema II

La sesión se inicia con una puesta en común sobre las conclusiones extraídas en la sesión anterior y una revisión de las representaciones obtenidas al dar un peso de 3dB a cada uno de los cubos. Se plantea la necesidad de mejorar la representación mediante un número mayor de cubos, y, para ello, se introduce el uso de una aplicación gratuita para iPad, Block Art II Free. Esta aplicación es bastante sencilla, pero, en cualquier caso, se dedicaron unos minutos a explicar su funcionamiento y a que los alumnos se familiarizaran con ella. El objetivo era que los grupos reflexionaran sobre qué peso asignar a cada cubo ahora que no tenían un número limitado.

Actividad 1: Vamos a utilizar la app Block Art II Free para obtener una representación más precisa que la obtenida con los bloques multilink. Escoge un peso para cada bloque, ajusta los valores de las intensidades en cada punto del mapa del aula y, una vez hayas realizado la representación, guárdala.

En la Fig. 5 (en anexo) se muestra una de las representaciones obtenida por un grupo de alumnos que escogen dar un peso de 0,5dB a cada cubo.

La segunda parte de esta última sesión se dedicó a reflexionar sobre el proceso realizado y, en particular, se mostraron las similitudes entre las representaciones obtenidas (tanto físicas como digitales) y la representación de una función de una variable a través del concepto de aplicada, en la Fig. 6 (en anexo) se muestra una de las imágenes que acompañaron la explicación.

Finalmente, sólo quedaba contestar a las tres preguntas de investigación planteadas en la primera sesión, para ello cada grupo de alumnos respondió, en base a las representaciones obtenidas, a través de un portavoz escogido por la profesora.

### **Resultados y conclusiones**

Esta propuesta se desarrolló íntegramente en un centro de la Comunitat Valenciana durante el curso 2015-16. Los resultados detallados de dicha experiencia se han analizado en el trabajo de fin de máster de María Luisa Pedro (2016). Se han implementado propuestas similares a esta en otros dos centros en Valencia y Onda y, en los tres casos, los resultados han sido satisfactorios desde el punto de vista de la motivación de los alumnos y del interés en enfrentarse a tareas de matemáticas que no acostumbran a ver en las clases habituales. Además, este tipo de actividades de modelización de fenómenos físicos y toma de datos reales permiten acercar las matemáticas a otras disciplinas afines, promoviendo el desarrollo de la competencia matemática en un ámbito más amplio.

Sin embargo, para conocer el impacto de la introducción de conceptos complejos tales como la extensión de la idea de aplicada de Euler al contexto tridimensional o de las decisiones tomadas en torno al proceso de toma y análisis de los datos, sería necesario ampliar la propuesta para ver si los alumnos son capaces de trabajar con estos conceptos y procedimientos en otros contextos.

### **Referencias bibliográficas**

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer International Publishing.

Diago, P. D., Ferrando, I., y Puig, L. (2015). Propuesta didáctica para explorar la representación de funciones de dos variables a través de la modelización con iPads. En *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

Diago, P. D., Ortega, M., Ferrando, I., Puig, L. (2016). Diseño e implementación de tareas de modelización con iPads: un enfoque dual. *Modelling in Science Education and Learning*, 9(1), 35-56.

Monzó, O. y Puig, L. (2013). Fenómenos y ajustes. un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas*. México: Trillas.

Navarro, M. T. (2012). *Del Álgebra a la Geometría. La sistematización de las coordenadas cartesianas y la representación gráfica de funciones en la Introductio in Analysin Infinitorum de euler y en el Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral y en el Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'Application de l'Algèbre a la Géométrie de Lacroix*. Trabajo Fin de Máster Universitario en Investigación en Didácticas Específicas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universitat de València (Estudi General).

Ortega, M., y Puig, L. (2014). El proceso de modelización en el aula con datos reales. Un estudio exploratorio en el entorno informático de las tabletas. En J. L. González y cols. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014*. Málaga.

Ortega, M. y Puig, L. (2015). Modelización de una situación real con tabletas: el experimento de la pelota. *Modelling in Science, Education and Learning*, 8(2), 67-78.

Puig, L. (2015). Modelización con datos reales. En Frontera, G., Perelló, J. y Ruiz-Aguilera, D. (Eds.) *Actas de las XVI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. JAEM 2013*. CD-ROM. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX.

Pedro, M. L. (2016). *Un estudi exploratori sobre un procés de modelització per a la representació e funcions de dues variables amb iPads*. Trabajo Fin de Máster de Investigación en Didácticas Específicas, Universitat de València Estudia General.

Schoenfeld, A.H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of “well-taught” mathematics courses. *Educational Psychologist* 23, 145-166.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problema solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Grouws, D. (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillian, 334-370.

FILA: _____	↓	→	↑	←	VALOR MITJA
COLUMNA					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Figura 1. Tabla proporcionada a los alumnos durante la sesión 2 de toma de datos

		COLUMNES							
		1	2	3	4	5	6	7	8
FILES	A	72.1	73.8	72.9	74.1	73.6	75.7	78.6	79.8
	B	71.7	71.5	71.7	73.7	74.5	72.2	-	-
	C	70.3	71.7	72	72.5	71.8	75	75.8	75.5
	D	71.1	72.2	72.2	72.3	73.8	73.9	73.9	74
	E	69.8	70.9	70.3	69.7	70	70.4	70.8	71.4
	F	69.9	70.7	70.9	70.8	71.5	70.6	69.3	70
	G	67.4	67.4	66.8	67.4	67	66.9	66.4	66.4
	H	64.1	65.3	65.9	66.6	66.2	66.2	65.5	66.7
	I	63.6	63.7	63.9	63.7	63.9	64.8	65.4	65.8
	J	65.8	65.7	65.4	65.7	65.7	67.1	67.3	64.3

Figura 2. Medidas obtenidas en la sesión de toma de datos

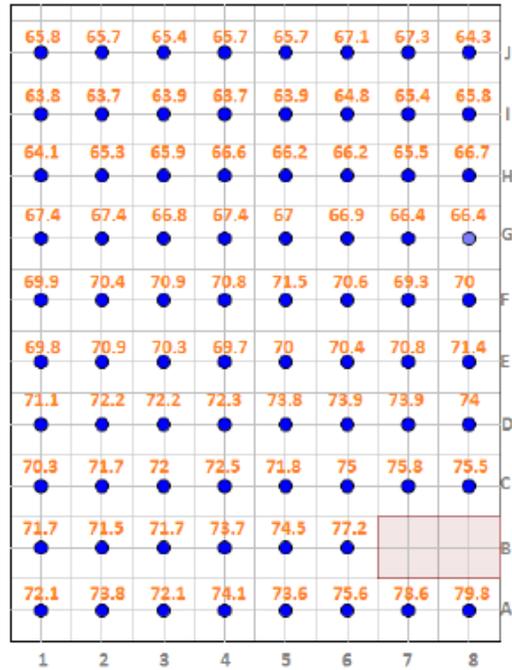


Figura 3. Mapa del aula con los valores de las intensidades

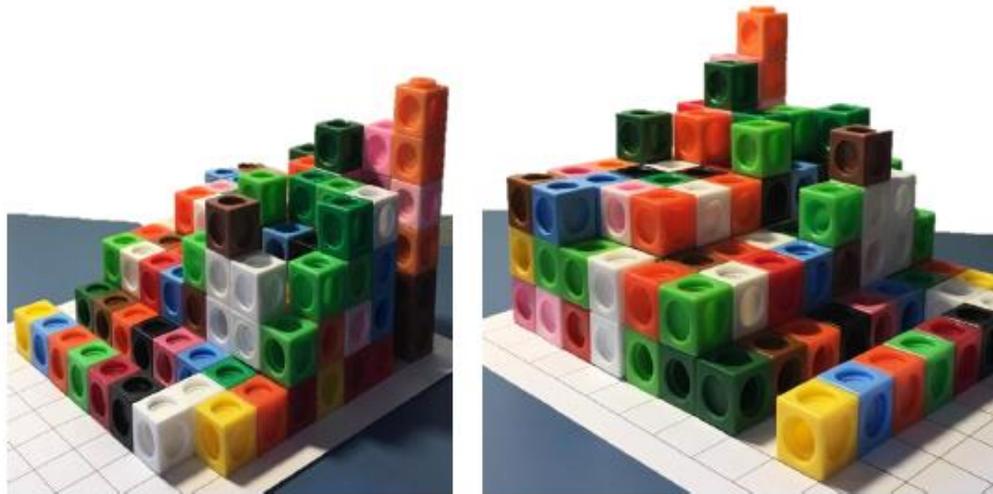


Figura 4. Representación con bloques multilink

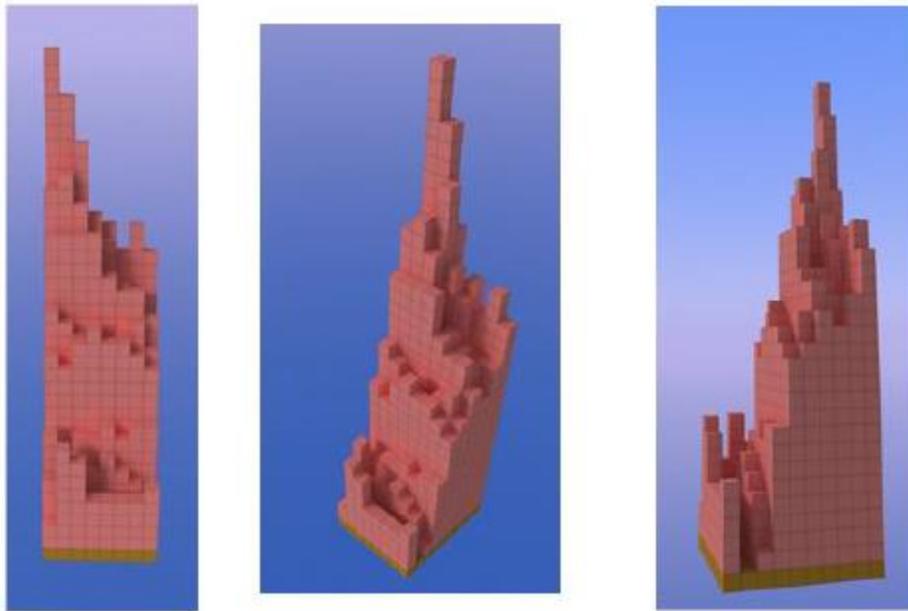


Figura 5. Representación obtenida con la App Block Art II Free

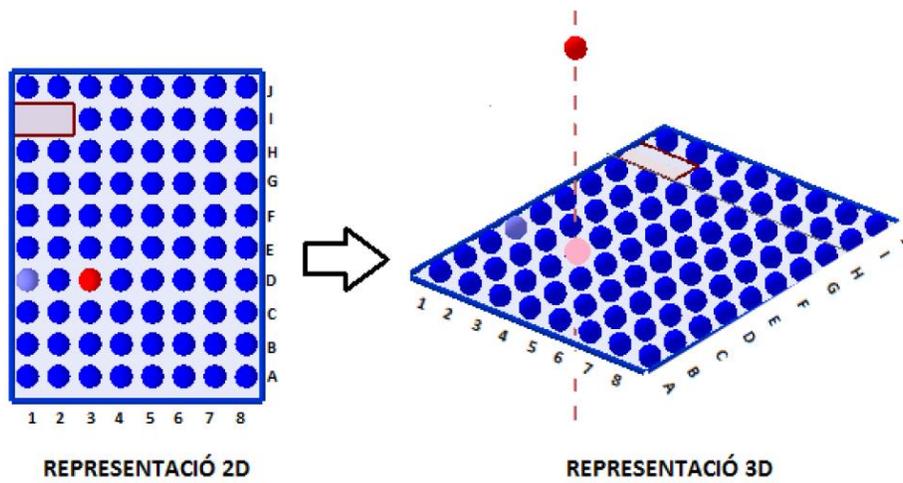


Figura 6. Interpretación del proceso de representación