CB-967

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS EN CONTEXTOS DE PROYECTOS PEDAGÓGICOS DE MODELACIÓN

Fabian Arley Posda Balvin
fapoba@gmail.com
Universidad Federal de Rio Grande Del Norte –UFRN-, Brasil.

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato
Palabras clave: teoría de la actividad, producción de conocimiento, pensamiento variacional

Resumen
la modelación puede ser entendida como un espacio para la producción de conocimiento y la matemática como una de las posibilidades de comprensión y manipulación de los fenómenos que están siendo modelados. Cuando ese proceso es usado como estrategia pedagógica de enseñanza y aprendizaje de matemática, se hace necesario la mediación intencionada de personas más expertas en los campos académicos que se encuentran en juego, en particular del profesor. En este trabajo presentamos un análisis del proceso de constitución de prácticas matemática en contextos pedagógicos de proyectos de modelación. Con base en interpretaciones de la Teoría da la Actividad y el constructo teórico Seres-humanos-con-midias de Borba y Villareal (2005), utilizamos el concepto de acto instructivo para analizar las interacciones entre alumnos, profesor y diferentes artefactos culturales materiales y simbólicos orientadas intencionalmente a la constitución de prácticas matemáticas en ese contexto. Ejemplificamos el proceso con un episodio vivenciado cuando, haciendo parte de una de sus tareas, alumnos de un curso de matemática para Biología de la universidad UNESP/RIO CLARO/SP, desarrollan proyectos de modelación. Concluimos que las prácticas matemáticas se constituyen coordinando procesos de variaciones espacio-temporales de las cantidades escogidas como pertinentes, con formas generales de correlación entre esas mismas cantidades.

1.1. La modelación matemática en contextos escolares

Académicos preocupados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática han ponderado el potencial del proceso de modelación matemática como un camino didáctico y/o pedagógico para el desarrollo de contenidos curriculares y de formas de racionamiento matemático. (Bassanezi, 2002; Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007; Meyer, Caldeira, & Malheiros, 2011). Una de las tendencias del uso de este proceso es verlo como “una forma de estudiar el mundo real con el universo de la matemática” (Meyer et al., 2011) que, con propósitos didácticos/pedagógicos, es traducido en la presentación de diferentes problemas a

ISBN 978-84-945722-3-4

los estudiantes, para que sean resueltos por ellos aplicando el conocimiento matemático aprendido en el aula de clase.

Esta forma de entender la modelación matemática en contextos escolares, resalta la idea de que los problemas que serán modelados conllevan consigo una carga intencional, previamente establecida por el profesor, para que de alguna forma emerja en el proceso ciertos contenidos conceptuales y/o procedimentales previamente establecidos en el currículo institucional de matemática. De acuerdo con Borba (2009); Borba & Villarreal (2005), esta forma de trabajo en aula de clase está más próxima de una perspectiva de resolución de problemas que de modelación. Interpretando estos autores, uno de los valores didácticos, pedagógicos y cognitivos más importantes que el proceso de modelación matemática podría ofrecer a los contextos de escuela, tiene que ver con la posibilidad de entenderlo como un espacio para la producción de conocimiento en general y matemático en particular. La propuesta es dar la oportunidad a los alumnos para que sean los protagonistas, no únicamente en la resolución de los problemas propuestos por el profesor, sino también en la formulación de los mismos, según sus propios intereses.

Para alcanzar tal propósito, proponen asemejar el proceso de modelación con un trabajo por proyectos, y por eso denominan su propuesta de "*Proyectos Pedagógicos de Modelación – PPM-"*, en donde los alumnos son convidados a: 1- escoger un tema de intereses colectivo; 2- plantear alguna situación problemática al interior del tema escogido y 3- construir argumentos para intentar resolver los problemas planteados y/o preguntas formuladas. La principal intención es crear un espacio pedagógico para el desarrollo de acciones análogas a las ejecutadas por investigadores cuando realizan sus respectivas investigaciones; o sea, escoger un campo de estudio de interés, delimitarlo por medio del planteamiento de cuestionamientos y/o definición de problemáticas, para finalmente buscar respuestas y/o soluciones.

En medio de este proceso se crean condiciones para eventualmente constituir prácticas matemáticas entendidas éstas como *acciones y reflexiones* materializadas en y con artefactos culturales materiales y simbólicos orientadas al tratamiento de relaciones y variaciones de cantidades y formas geométricas. Tratamiento que se torna necesario, posible, deseable y/o importante de acuerdo con las características de cada proyecto. Esto significa que, en el

ISBN 978-84-945722-3-4

contexto de los PPM, constituir prácticas matemáticas puede ser entendido en el mismo sentido de desarrollar procesos de modelación matemática.

1.2. Cómo impulsar prácticas matemáticas en los PPM: una metodología

Dado que las acciones desarrolladas en los proyectos de modelación son intencionalmente orientadas para la producción colectiva de conocimiento en contextos de aula de clase, la idea es que la tendencia sea producir no solo conocimiento empírico, sino también teórico (Vygotsky 1986). Dado que las prácticas matemáticas tienen un carácter principalmente teórico, su constitución en los PPM no se da necesariamente de manera espontánea. Cuando por las características del proyecto estructurado se haga necesario y/o pertinente tomar decisiones mediante la constitución de prácticas matemáticas, en la mayoría de los casos se requiere de acciones intencionadas con carácter pedagógico.

Apoyados en las ideas de la teoría de la actividad (Engeström, 1987; Leontiev, 1978) y del constructo teórico Seres-humanos-con-medios (Borba & Villarreal, 2005), usamos la noción de *acto instructivo,* para indicar que esas acciones intencionadas son realizadas por actores humano, generalmente representado por el profesor y otros expertos, que por su mayor experiencia en los asuntos centrales del proyecto pueden orientadas los actores menos experimentados en el tema, generalmente representado por los alumnos, mediante el uso de artefactos culturales materiales y simbólicos, de tal manera que se genere el espacio colectivo de enseñanza y aprendizaje y, por esa vía, de desarrollo cognitivo de los sujetos involucrados. Uno de esos posibles artefactos culturales son los conceptos matemáticos, construidos históricamente y materializados en diferentes formas simbólicas.

De ese modo, las prácticas matemáticas desarrolladas en el contexto de los PPM se constituyen como un proceso de permanente interacción dialógica de seres humanos y no humanos donde *los instrumentos* con que se realiza tal práctica y *los resultados* obtenidos intercambian su papel según las necesidades, intereses e intencionalidades de los sujetos y por las características del proyecto que está siendo desarrollado. Visto así, las prácticas matemáticas además de ser *maneras de acción* relativas al tratamiento de cantidades, formas geométricas y patrones de variación que permiten el estudio de ciertas situaciones fenomenológicas, también juegan el papel de *instrumentos culturales* con los que se pueden

ISBN 978-84-945722-3-4

realizar otras acciones y reflexiones (modelación matemática). Y ya que pueden ser instrumentos, es importante aprender a usarlos.

1.3. A manera de ejemplo: la matemática y la música

Los actores humanos participantes de la investigación fueron alumnos, profesor, monitores y otros miembros de la comunidad académica quienes, en el segundo semestre del año 2013, hicieron parte de un curso de matemática aplicada para Biólogos en formación de la universidad Paulista "Júlio Mesquita Filho" (UNESP), sede Rio Claro del estado de San Pablo, Brasil. Al inicio del curso los alumnos fueron invitados por el profesor a formar grupos entre cuatro y seis alumnos para desarrollar un PPM. Como producto final del semestre, debían entregar un texto escrito síntesis del proceso de investigación, producir un video relacionado con la temática y realizar una presentación oral para el resto de los compañeros de clase.

Uno de los proyectos desarrollados se tituló "matemática y música", cuya pregunta problematizadora fue: ¿qué hace que el sonido se transforme en música? Esta pregunta llevó al grupo a estructurar el trabajo en cinco apartes: 1- una aproximación histórica; 2- fundamentos físicos del sonido; 3- conceptualización musical; 4- representación sintáctica y semántica de la música; y 5- construcción de un instrumento de aire.

Durante todo el semestre los alumnos fueron acompañados por el profesor, un monitor del curso y otras personas invitadas del área de física, matemática y de teórica musical, quienes, mediante diferentes *actos instructivos*: indicando lecturas, estimulando discusiones, proponiendo ideas y principalmente estudiando con ellos algunos de los conceptos teóricos de la física, la matemática y la música. El propósito era que el proyecto tuviese un cierto grado de coherencia teórica, pero sin descuidar los intereses y experiencias espontáneas de los alumnos con el tema. Visto así, los mismos actos instructivos pueden ser considerados instrumentos de mediación pedagógica intersubjetiva usados con el propósito de producir de conocimiento mientras se intenta dar solución a la pregunta planteada.

Aunque el proceso de desarrollo de los PPM consta de tres grandes momentos íntimamente conectados: 1- elección del tema; 2- planteamiento de la situación problema y 3- resolución, aquí solo presentaremos algunos análisis del tercer momento, pues si bien es cierto que las prácticas matemáticas se constituyen paulatinamente en cada etapa, es en el momento de

ISBN 978-84-945722-3-4

construcción de los argumentos para dar solución al problema, que las acciones orientadas a tal fin se hacen más visibles.

Las siguientes ocho ideas generales son un resumen de las discusiones desarrolladas y que permitieron a los alumnos dar una mínima solución a la situación problemática formulada: 1- el sonido es una perturbación (vibración) que se propaga en un medio material. 2- físicamente el sonido es tratado como una onda mecánica esférica. 3- es susceptible de ser captado por el oído humano mediante el movimiento vibratorio de la fuente sonora trasmitido por el aire. 4- el concepto de frecuencia es usado como medida de las vibraciones, cuya unidad de medida es el Hertz (número de vibraciones por segundo). 5- as frecuencias de los sonidos audibles por los seres humanos están entre 20 y 20000 hertz. 6- las notas musicales son vibraciones con frecuencias particulares en este intervalo audible. 7- altura, periodo, intensidad, intervalo, andamiento, textura, ritmo, color y timbre son conceptos que condicionan las características del sonido. Y 8- en términos generales la música puede ser entendida como *un complejo arte de combinar controladamente diferentes sonidos*.

Con base en los anteriores elementos, los alumnos mostraron que parte de la complejidad del arte de producir música está en la permanente interconexión de aspectos cualitativos y cuantitativos del sonido, tomando la medición como uno de los procesos más importantes de análisis. Explican, por ejemplo, que en la música: el andamiento indica *la velocidad* con que es ejecutado un sonido. El ritmo, lo que determina *la duración* del sonido o de los silencios. El intervalo, *la distancia* entre dos notas musicales, que por su vez es definida por *la medida de ciertas frecuencias*; dando paso a los acordes que son entendidos como combinaciones armoniosas de notas. De este análisis los conceptos de *relación proporcionalidad, en particular directa e inversa simple* y de *frecuencia*, fueron resaltados como los fundamentales para dar aquella mínima respuesta.

Los argumentos construidos permitieron concluir que, los estudios realizados por los académicos de la llamada escuela pitagórica (siglo VI A.C.), quienes compararon sonidos producidos por cuerdas con diferentes longitudes y tensiones y cuya relación por cociente entre los números enteros 1, 2, 3, 4 8 y 9 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}\right)$, son la base de explicación de las posibles combinaciones de vibraciones armónicas (Guthrie, 1962). Tales proporciones permanecen en la base de caracterización de las escalas musicales diatónicas y cromáticas con las que son

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

producidas la mayoría de las melodías, actualmente expresadas mediante *relaciones de proporcionalidad entre frecuencias de vibración.* En un segundo momento y siguiendo la misma línea de razonamiento los alumnos utilizaron los anteriores análisis sobre escalas musicales y de proporcionalidad para ejemplificar como eses argumentos teóricos pueden servir para la construcción de un instrumento simple de viento.

1.4. Prácticas matemáticas: covariación vs correlación

La íntima relación entre las diferentes formas de conocimiento y los procesos de modelación es indiscutible para diferentes investigadores, pues razonar basado en modelos y sus formas asociadas constituye uno de los núcleos epistemológicos de comprensión y transformación de diferentes sistemas científicos y sociales (Jurdak, 2016; Lehrer & Schauble, 2007; Williams & Goos, 2013). Para Lehrer & Schauble (2007), por ejemplo, las raíces de la modelación se encuentran en el concepto de *analogía*, considerando que, en su nivel más básico, *un modelo es una analogía*, donde un conjunto familiar de objetos y relaciones pueden sustituir, por analogía, otro tal vez menos familiar de objetos y relaciones con el objetivo de ganar nuevas comprensiones y otras formas de tratamiento.

Una manera de interpretar esa idea es considerar los modelos como *medios o instrumentos* de observación, de entendimiento, de manipulación y por veces de control entre diferentes sistemas. De ese modo, la modelación matemática pude ser analizado en una doble vía y no en una sola como acostumbra hacerse: de un lado, como una manera de representar, por medio de conceptos y relaciones matemáticas, una situación problema procurando su solución; o sea, un sistema matemático modelando otro sistema no matemático (Bassanezi, 2002). Y de otro lado, en términos del camino inverso: un sistema no matemático asumiendo el papel de modelo para un sistema matemático (Urquhart, 2008; Williams & Goos, 2013). En ambos casos los objetos, relaciones y problemas de un sistema no solo representan y pueden ser representado *análogamente* por el otro sistema, mas también permite formas de acción relacionadas con el sistema modelado.

En ese sentido, puede decirse que el sistema modelo y el sistema modelado se constituyen mutuamente y se co-determinan dialógicamente, pues modificaciones en un sistema debería implicar ajustes en el otro. Dependiendo del interés de los sujetos involucrados se define cual es el sistema modelado y cual el modelo. Generalmente tal decisión depende del tipo de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

problema que se desee y/o se requiera resolver. Esta manera de entender la modelación flexibiliza los análisis relacionados con procesos de producción de conocimiento y de creación de diferentes niveles de verdad y confianza mediante la resolución de algunas contradicciones dialécticas que se generan, no solo por la convergencia de diferentes campos teóricos, sino también por el encuentro de aspectos empíricos emergentes de la experiencia, con teóricos provenientes de prácticas académicas científicas.

En los PPM no es diferente. Como fue brevemente presentado, el propósito de responder a la pregunta: ¿qué hace que el sonido se transforme en música? q llevó al grupo de alumnos a apropiarse de un conjunto de concepto teóricos y usarlos en la comprensión, producción y transformación de su experiencia empírica con el sonido en general y la música en particular. En ese proceso los conceptos científicos de la física y la matemática jugaron un papel de particular importancia provisionando a la experiencia empírica de lenguajes formales y poniendo a un lado la intuición cotidiana del asunto, para enriquecerla con las reglas de tratamiento propias de los sistemas teóricos (especialmente los matemáticos). En ese sentido, los conceptos de las ciencias físicas y matemáticas pueden ser entendidos como modelos del fenómeno empírico, pero a la vez el sistema de conceptos físicos tornase modelo del sistema matemático y viceversa.

Las prácticas matemáticas en contextos de PPM, entendidas como modelos matemáticos ganaron el papel de instrumentos cuando formaron parte de los argumentos con que dieron solución a la situación problemática formulada. Como instrumento, sirvieron de medio, tanto en la formulación del problema como la tentativa de resolución, pero también se constituyeron en resultado fruto de una permanente tensión entre niveles de generalización y particularización, y de procesos de *covariación* y *correlación* entre las cantidades de magnitud pertinentes a la situación estudiada.

Estas tensiones fueron apreciadas durante todo el proceso mediante las diferentes formas de enunciación discursivas. Un ejemplo es apreciado en el momento que los alumnos explicaron, en el trabajo escrito y en la presentación del proyecto a los colegas, que en la construcción de un instrumento simple de viento como el “Didgeridoo” y/o “Zanpoña”, debe tenerse en cuenta el largo del tubo y la velocidad del soplo para obtener una nota particular; o sea, una frecuencia específica. Explicaron que, para un tubo abierto (el Didgeridoo), si la longitud es constante, la frecuencia del sonido es directamente proporcional a la velocidad

ISBN 978-84-945722-3-4

del soplo; o si la velocidad es constante, es inversamente proporcional al largo del tubo. Para dar esa explicación se apoyaron en la siguiente fórmula: $f = \frac{NV}{2L}$ con f, frecuencia; V, velocidad del soplo; L, longitud del tubo; y N, una constante numérica entera.

Se puede percibir que la explicación conceptual física (modelo físico) apelan a una relación de *covariación* entre magnitudes: ser directa o inversamente proporcionales. Mientras que, en el modelo matemático apelan a la fórmula, una forma de *correlación* entre las cantidades y cuya naturaleza es estática, desprovista de su carácter espacio/temporal. Es importante recordar aquí, que las relaciones proporcionales, bajo proporcionalidad directa simple, son relaciones lineales cuyo principio invariante es la conservación de la razón entre dos cantidades correspondientes de magnitudes de la misma o de diferente naturaleza. Y, las relaciones proporcionales, bajo proporcionalidad inversa simple, son relaciones racionales, cuyo invariante es la conservación del producto entre las dos cantidades.

Las prácticas matemáticas (modelos matemáticos) que emergieron en el contexto de este PPM se constituyen fruto de la coordinación de procesos de variación espacio-temporales de las cantidades escogidas como pertinentes, con formas generales de correlación entre esas mismas cantidades y en las que, para el caso aquí presentado, el concepto de razón y/o de producto constante entre cantidades juega un papel fundamental en dicha coordinación. Análisis que se puede hacer extensivo para otros proyectos. En ese sentido, ya que los PPM son desarrollados en contextos educativos, tal proceso de coordinación puede surgir como una oportunidad para generar una práctica de enseñanza y aprendizaje de ese concepto matemático, que aun sin formar parte en ese instante del contenido conceptual de la clase, invita al profesor a romper protocolos curriculares preestablecidos y transformar la situación en un momento de enseñanza, aprendizaje y de producción de conocimiento situado.

1.5. Referencias bibliográficas

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and aplications in mathematics education: the 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Borba, M. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 453–465. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0188-2

ISBN 978-84-945722-3-4

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. United State of America: Springer.

Engeström, Y. (1987). Learning by Expanding: An Activity - Theoretical Approach to Developmental Research. Recuperado 29 de enero de 2014, a partir de http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm

Guthrie, W. K. C. (1962). *A history of Greek philosophy: the early Presocratics and the Pythagoreans* (Vol. I). New York: Cambridge University Press.

Jurdak, M. (2016). *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics: A Multiple-Perspective Framework for Crossing the Boundary*. Switzerland: Springer International Publishing.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2007). A developmental approach for supporting he epistemology of modeling. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 153-160). New York: Springer.

Leontiev, A. N. (1978). *Actividad, conciencia y personalidad*. Buenos Aires: Ediciones Ciencias del hombre.

Meyer, J. F., Caldeira, A., & Malheiros, A. P. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Urquhart, A. (2008). The Boundary Between Mathematics and Physics. En *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press: Paolo Mancosu.

Williams, J., & Goos, M. (2013). Modelling with mathematics and technologies. En M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international hanbook of mathematics education* (pp. 549-569). London: Springer.

ISBN 978-84-945722-3-4