CB-940

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E O PRINCÍPIO DE INCLUSÃO-EXCLUSÃO: CONCEPÇÕES DOS PROFESSORES E SUA DIFUSÃO NO ENSINO MÉDIO

José Roberto da Silva – Mª Aparecida da S. Rufino – Edmara Patrícia Américo Ferreira
jrobertosilva@bol.com.br -aparecidarufino@hotmail.com- edmara.americo@gmail.com
Universidade de Pernambuco (UPE) – Brasil

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formação de professores e de reciclagem
Palabras clave: Raciocínio lógico matemático, princípios lógicos básicos, sistema de processamento de informação lógico.

Resumo

Alguns conteúdos que compõem os Livros Didáticos (LD) de matemática são verdadeiras criações didáticas, na concepção chevallardiana, que são incorporados aos programas para facilitar a aprendizagem. Contudo, quando são ensinados sem um contexto significativo, sem se fazer a ponte com o saber matemático, figuram apenas como objeto de ensino em si mesmo. Referindo-se ao Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE), observa-se que os LD do 1º ano do Ensino Médio, fazem uma breve alusão geralmente priorizando a utilização do diagrama de Venn, sem explorar adequadamente o raciocínio de contagem a ele subjacente, o que o desvincula da Combinatória, seu campo de origem. Tendo como referencia a Teoria da Aprendizagem Significativa, busca-se investigar as concepções dos professores e as metodologias que utilizam no ensino do PIE, considerando-se as relações e filiações conceituais, enquanto generalização do Princípio Aditivo, no contexto combinatório. Situado no âmbito das pesquisas qualitativas, do tipo estudo de caso educativo descritivo e interpretativo, a partir da aplicação de um questionário diagnóstico, conclui-se que os professores investigados não reconhecem o PIE como uma técnica de contagem, muito menos apresentam uma estrutura de processamento de informação adequada sobre o mesmo, consequentemente não propõem metodológicas de ensino que favoreçam a Aprendizagem Significativa.

1 INTRODUÇÃO

O Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE) é abordado nos Livros Didáticos (LD) do 1º ano do Ensino Médio (EM) numa breve alusão ao tema, sem explorar apropriadamente o raciocínio de contagem a ele subjacente, o que o desvincula da Combinatória, seu campo de origem. Ademais, a priorização do diagrama de Venn como estratégia heurística, limita a aplicação

ISBN 978-84-945722-3-4

desse princípio, pois quando o número de conjuntos envolvidos for maior que quatro, torna-se geometricamente impraticável sua construção.

Conforme Chevalard (1991) alguns conteúdos de matemática são verdadeiras criações didáticas e seus resultados práticos muitas vezes ultrapassam os limites conceituais do saber matemático, sendo incorporadas aos programas para facilitar a aprendizagem e que quando ensinados sem um contexto significativo figuram apenas como objeto de ensino em si mesmo, sem necessariamente ter vínculos com aplicações compreensíveis para o estudante, cabendo ao professor fazer a ponte com o saber matemático.

Diante desses argumentos, cabe questionar se os professores ensinam o PIE adequadamente, explorando seu sistema de processamento de informação conceitual, de maneira a possibilitar uma aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2002) dos alunos ou, se a exemplo dos LD, priorizam muito mais a utilização do diagrama de Venn limitando-se a um número máximo de quatro conjuntos envolvidos na contagem?

Coerentemente com os propósitos investigativos do estudo, optou-se por apresentar o PIE através de um sistema de processamento de informação conceitual, em consonância com os aspectos teóricos da aprendizagem significativa ausubeliana e, a partir da aplicação de um questionário diagnóstico a um grupo de professores, busca-se conhecer as concepções, estratégias resolutivas e principais dificuldades para abordar esse tema.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

2.1 A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS)

A TAS supõe que as pessoas pensam e vivem num mundo de conceitos, em lugar de objetos, acontecimentos e situações. Daí a importância dos conhecimentos prévios, definidos por Ausubel (2002) como *subsunçores*, para a aprendizagem significativa, ao preconizar que se deve averiguar o que o aluno já sabe, para ensinar de acordo.

Ainda nesse contexto, Ausubel (1968, *apud* MOREIRA e MASSINI, 2011) coloca que cada componente curricular possui uma estrutura articulada e hierarquicamente organizada de conceitos que constitui seu sistema de informação, devendo ser identificado pelos professores e ensinados aos alunos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Além da existência prévia de subsunçores na estrutura cognitiva, Ausubel (*ibid.*) preconiza que o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo e que o sujeito deve ter predisposição para aprender significativamente, sendo essas as três condições para que a aprendizagem significativa ocorra, caracterizando um processo de **interação** no qual os *subsunçores* são *ancoradouros* do novo conhecimento.

Em contrapartida, Ausubel (2002) define a aprendizagem mecânica como aquela em que as informações são aprendidas sem interação com subsunçores, um tipo de associação, que fica arbitrária e literal na estrutura cognitiva. Por outro lado, Moreira (2011a) atenta para o fato da aprendizagem mecânica continuar sendo mais utilizada pelos alunos e incentivada pelas escolas. O que é preocupante por ser uma aprendizagem memorística, não requerer compreensão, serve só para as provas.

Sendo a estrutura cognitiva dinâmica, nela caracterizam-se dois processos principais, a *diferenciação progressiva* que é um processo de interação em um subsunçor, que também se modifica, adquirindo novos significados, ou seja, vão progressivamente sendo diferenciado em termos de detalhe e especificidade e, a *reconciliação integradora***,** em que no curso de novas aprendizagens, antigas ideias podem se relacionar, se reorganizar e adquirir novos significados, explorando-se relações, apontando-se similaridades, diferenças e reconciliando discrepâncias reais ou aparentes.

Moreira (ibid.) argumenta, que se esses processos são fundamentais na aprendizagem significativa, nada mais óbvio do que usá-los como princípios programáticos no ensino, iniciando com um mapeamento conceitual, para identificar as ideias gerais, inclusivas, conceitos estruturantes e proposições-chave, numa seleção do que é importante e do que é secundário, onde os conteúdos gerais e específicos devem ser trabalhados na perspectiva de diferenciar e integrar, subindo e descendo nas hierarquias conceituais.

Será apresentado uma estrutura hierarquicamente organizada de conceitos básicos, em termos de conexões e filiações, sobre o PIE a qual pode ser considerada um sistema de processamento de informação na perspectiva de uma aprendizagem significativa.

2.1 Estrutura articulada e hierarquicamente organizada de conceitos sobre o PIE

ISBN 978-84-945722-3-4

Na Combinatória, contar é o conceito mais geral e mesmo em épocas primitivas, se possuía algum senso numérico de retirada ou acréscimo, marcado com objetos concretos até a chegada dos números naturais, quando contar passou a ser enumerar. Com a escrita e criação dos algarismos, facilita-se seu registro, permitindo efetuarem-se as operações.

Para Benítez e Brañas (2001) quando o número de elementos é "grande", o procedimento vai além de enumerar, surgindo o Princípio Aditivo (PA), associado a situações em que se pode realizar uma decisão de m maneiras e a outra de n e não há como realizar as duas simultaneamente, cujo total é $m+n$ realizações e o Princípio Multiplicativo (PM) que se aplica a situações que se pode decompor em duas ou mais decisões sucessivas e independentes. Se em duas, tem-se o produto $m \times n$.

Mediante uma formulação da teoria dos conjuntos, o PM expressa o produto cartesiano $n(A_1 \times A_2 \times, \ldots, \times A_n) = n(A_1) \times n(A_2) \times \ldots \times n(A_n)$ e o PA, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, com $A \cap B = \phi$. Mas, se $A \cap B \neq \phi$, a soma das cardinalidades individuais será maior que a cardinalidade da união dos elementos, $n(A) + n(B) > n(A \cup B)$, em decorrência da duplicidade das contagens comuns em A e B, representada por $n(A \cap B)$.

Faz-se necessário reformular o PA recaindo num princípio mais geral, o Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE), que na sua forma mais simples, conforme Morgado *et al*. (2006), calcula a cardinalidade da união de dois conjuntos A e B, com $A \cap B \neq \phi$, incluindo-se inicialmente as cardinalidades individuais e excluindo-se a cardinalidade comuns, $n(A \cap B)$, para não cometer o erro de contá-los duas vezes, em $n(A)$ e em $n(B)$, ou seja, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, conforme ilustrado na figura 2.

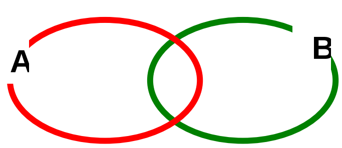

Figura 2: Um Diagrama de Venn para representar a cardinalidade da união de dois conjuntos

Para três conjuntos com $A \cap B \cap C \neq \phi$, a fórmula do PIE inclui as cardinalidades individuais de, A, B e C, exclui as cardinalidade de $(A \cap B)$, $(A \cap C)$ e $(B \cap C)$ para não contar em duplicidade os elementos comuns a cada dois conjuntos. Por sua vez, os elementos

ISBN 978-84-945722-3-4

comuns aos três $(A \cap B \cap C)$, foram contados três vezes, uma em $n(A)$, $n(B)$ e em $n(C)$ e, descontados também três vezes, em $(A \cap B)$, em $(A \cap C)$ e em $(B \cap C)$, ou seja, ainda não foram contados, isso poderá ser feito na formatação, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Essa contagem também será representada em um diagrama de Venn, na figura 3, sendo geometricamente inviável representá-la quando o número de conjuntos vai aumentando.

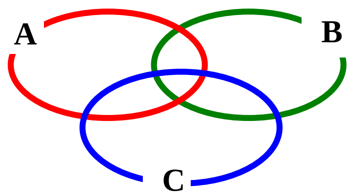

Figura 3: Um Diagrama de Venn para representar a cardinalidade da união de três conjuntos

Para a generalização da fórmula do PIE, basta entender que se trata da inclusão das cardinalidades individuais, exclusão das cardinalidades comuns tomadas dois a dois conjuntos, inclusão das cardinalidades três a três, exclusão das cardinalidades quatro a quatro e sucessivamente, daí o nome Princípio de Inclusão-Exclusão. Mas isso não é algo a ser automatizado, mas compreendido quando e por que incluir e excluir as cardinalidades, considerando que essas maneiras dependem da quantidade de conjuntos.

Para calcular $n(A \cup B)$, tem-se 2 possibilidades para agrupar esses conjuntos tomando-os um a um, e 1 para tomar os dois em um só grupo, $n(A \cup B) = \underbrace{n(A) + n(B)}_{2} - \underbrace{n(A \cap B)}_{1}$. Já para calcular $n(A \cup B \cup C)$, tem-se 3 possibilidades para agrupar esses conjuntos tomando-os um a um, 3 para agrupá-los tomando-os dois a dois e 1 para tomar os três em um só grupo,

$$n(A \cup B \cup C) = \underbrace{n(A) + n(B) + n(C)}_{3} - \underbrace{n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}_{3} + \underbrace{n(A \cap B \cap C)}_{1}.$$

No caso de $n(A \cup B \cup C \cup D)$, tem-se 4 possibilidades de agrupar os conjuntos tomando-os um a um, 6 para agrupa-los dois a dois, 4 vezes três a três e 1 em grupo de quatro,

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = \underbrace{n(A) + n(B) + n(C) + n(D)}_{4} - \underbrace{n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D)}_{6}$$

$$+ \underbrace{n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D)}_{4} - \underbrace{n(A \cap B \cap C \cap D)}_{1}.$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Segundo Santos *et al* (2007, p. 124), para n finito conjuntos, vale a generalização

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\ - \sum_{1 \le i < j < k < p \le n}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \cdots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

3 METODOLOGIA

Trata-se de um estudo qualitativo, que busca descrever, mas também encontrar padrões e desenvolver categorias conceituais de análise que possibilitem ilustrar, confirmar ou mesmo opor-se a suposições teóricas levantadas, classificado como um estudo de caso educativo descritivo interpretativo, conforme Serrano (1998, *apud* MOREIRA, 2011b).

A investigação foi realizada com 05 professores de matemática, da cidade de Paulista/Pernambuco-BR, das redes privada e pública municipal e estadual, os quais tiveram um tempo máximo de 30 minutos para responder a um questionário diagnóstico, composto por 4 perguntas, cujas respostas foram organizadas segundo as tabelas que serão apresentadas no tópico referente a análise e discussão dos resultados.

4 ANÁLSE E DISCUSSAO DOS RESULTADOS

1ª Questão: Você conhece o Princípio de Inclusão-Exclusão? Em que ele consiste?

Tabela 1- Concepções dos professores

Critérios / Nº de Respostas	Ideias básicas do PIE			Categorização das respostas		
	c_1	c_2	c_3	*CNA*	*CPA*	*CA*
Nº de Respostas	2	0	1	3	2	0

Legenda: c_1 :técnica de contagem; c_2 :generalização do PA; c_3 :Conta a cardinalidade da união de conjuntos não disjuntos; CNA:Concepção Não Adequada; CPA:Concepção Parcialmente Adequada; CA:Concepção Adequada.

Percebe-se que os professores não reconhecem os conceitos básicos do PIE, principalmente no aspecto de que é uma generalização do Princípio Aditivo (PA).

2ª Questão-Dados os problemas, resolva e nomeie o princípio de contagem que utilizou: I-Supondo o lançamento de dois dados distintos, calcule as seguintes possibilidades:

a) De quantas formas pode-se conseguir que a soma dos pontos seja 7 ou 8.

Tabela 2 (Ia)- Identificação e utilização do PA

Critérios / Nº Respostas	Quanto à Resolução			Quanto à Nomeação			Categorização das respostas		
	NR	*RE*	*RC*	*NN*	*NE*	*NC*	*RNS*	*RPA*	*RS*
Nº Respostas	0	4	1	4	0	1	3	2	0

Legenda- NR:Não Resolveu; RE:Resolveu Errado; RC:Resolveu Correto; NN:Não Nomeou; NE:Nomeou Errado; NC:Nomeou Correto; RNS: Resp. Não Satisfatória; RPS: Resp. Parcialmente Satisfatória; RS: Resp. Satisfatória.

ISBN 978-84-945722-3-4

Os erros reforçam a ideia de que o ensino do PA é feito de forma automática (intuitiva), dificultando sua compreensão e ampliação para outras técnicas, no caso para PIE.

b) Quantas formas pode-se conseguir que a soma dos pontos seja múltiplo de 4 ou de 6.

Tabela 3 (Ib)- Reconhecimento da passagem do PA para o PIE

Critérios / Nº Respostas	Quanto à Resolução			Quanto à Nomeação			Categorização das respostas		
	NR	*RE*	*RC*	*NN*	*NE*	*NC*	*RNS*	*RPA*	*RS*
Nº Respostas	0	5	0	4	1	0	5	0	0

Legenda- igual da Tabela 2

Observa-se que não perceberam a necessidade de ampliação do PA para o PIE, contando duas vezes o mesmo número, não compreendendo adequadamente o PIE.

II- De 78 alunos, 32 fazem um curso de francês; 40 de física; 30 de matemática; 23 de história; 19 francês e física; 13 francês e matemática; 15 física e matemática; 2 francês e história; 15 física e história; 14 matemática e história; 8 francês, física e matemática; 8 francês, matemática e história; 2 francês, física e história; 6 física, matemática e história e 2 todos os quatro cursos. Quantos fazem pelo menos um dos quatro cursos?

Tabela 4- Aplicação e utilização da fórmula do PIE

Critérios / Nº Respostas	Quanto à Aplicação			Quanto à Solução			Categorização das respostas		
	NA	*AE*	*AC*	*NS*	*SE*	*SC*	*RNS*	*RPA*	*RS*
Nº Respostas	4	1	0	2	3	0	5	0	0

Legenda- NA:Não Aplicou; AE:Aplicou Errado; AC:Aplicou Correto; NS:Não Solucionou; SE:Solucionou Errado; SC:Solucionou Correto; RNS: Resp. Não Satisfatória; RPS: Resp. Parcialmente Satisfatória; RS: Resp. Satisfatória.

Nota-se que mesmo entendendo a necessidade da utilização do PIE, sua aplicação não foi adequada. Isso pode está relacionado ao uso equivocado do diagrama de Venn

3ª Questão: Quais principais dificuldades você encontra para lidar com o ensino do PIE?

Tabela 5 - Dificuldades para Ensinar o PIE

Critérios / Nº de Respostas	Relacionadas ao professor (D_p)				Relacionadas ao aluno (D_a)			
	D_{p_1}	D_{p_2}	D_{p_3}	D_{p_4}	D_{a_1}	D_{a_2}	D_{a_3}	D_{a_4}
Nº de Respostas	1	0	0	0	2	2	1	1

Legenda: D_{p_1} :desconhecer as bases conceituais; D_{p_2} :potencializar aprendizagem significativa; D_{p_3} :criar procedimentos de ensino; D_{p_4} :outras dificuldades do professor; D_{a_1} - interpretar enunciado das questões; D_{a_2} :reconhecer fundamentos do princípio; D_{a_3} :falta de interesse na aprendizagem; D_{a_4} :outras dificuldades do aluno.

Percebe-se que citam muito mais as dificuldades dos alunos, revelando um despreparo para reconhecer seus próprios limites, pois é inegável que as dificuldades citadas sofrem interferências da pouca compreensão que tais profissionais têm sobre esse conteúdo.

ISBN 978-84-945722-3-4

4ª Questão: Que metodologias utiliza para superar as dificuldades citadas na questão 3?

Tabela 6: Metodologias utilizadas no ensino do PIE

Critérios / Nº de Respostas	Ideias básicas do PIE	
	MFAS	*MFAM*
Nº de Respostas	1	4

Legenda: *MFAS* - Metodologias que Favoreçam a Aprendizagem Significativa.
MFAM - Metodologias que Favoreçam a Aprendizagem Mecânica.

A maioria das metodologias indicadas favorecem a aprendizagem mecânica, indicando que a concepção mecânica sobre esse conhecimento é perpetuada no seu ensino.

5 CONSIDERAÇÕES EDUCACIONAIS

Os professores investigados não reconhecem o sistema de processamento de informação conceitual que compreende o PIE. Consequentemente, apresentam esse conhecimento através de um ensino que não explora a aquisição de significados, mas a automatização de um artifício didático, com validação restrita a certas aplicações, como é o caso do diagrama de Venn, seguindo a configuração de grande parte dos livros didáticos.

Chama-se a atenção para a importância de uma aquisição conceitual adequada para a compreensão apropriada das técnicas de contagem. Todavia, isso requer uma mudança de postura do professor tanto na concepção do conhecimento matemático, devendo ser entendido como um corpo teórico composto por conceitos e princípios, quanto na sua visão pedagógica, reestruturando seu ensino em defesa de uma aprendizagem significativa, pois os professores discutem muito a respeito do baixo rendimento dos alunos, mas não buscam, em sua maioria, discutir a necessidade em desenvolver metodologias importantes que possam favorecer a aprendizagem significativa.

Logo, há uma urgente necessidade de implantar e implementar capacitações continuadas para os professores que possam discutir mais sobre as bases do conhecimento matemático de maneira a ampliar algumas informações que por vezes não são aprofundadas na graduação e que não foram vistas como conteúdos a serem ensinados.

Ademais, julga-se importante um olhar crítico sobre os livros didáticos e no caso de não parecerem “adequados”, os professores devem elaborar seus próprios textos de apoio,

ISBN 978-84-945722-3-4

conforme ocorreu nessa investigação, onde se obteve descobertas importantes sobre o conteúdo, que não estavam nos livros didáticos, pelo menos nos adotados no EM.

Contudo, este estudo espera ter contribuído para a apresentação de uma base mínima necessária de significados, construída a partir das semelhanças entre a gama de concepções academicamente estabelecidas sobre esses conteúdos para que os professores possam reconhecer e atuar de forma consciente frente a variação de situações problemas que vão além do que propõem os livros didáticos.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: Una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Padiós.

BENÍTEZ, P. R. A. & BRAÑAS, J. R. F. (2001). *Introducción a la matemática aplicada,* Colección Textos Universitarios. Canarias: Litografía A. Romero S. A.

CHEVALLARD, Y.(1991). *La Transposition Didactique*. Paris: La Pensèe Sauvage.

MOREIRA, M. A. (2011a). *Aprendizagem Significativa*: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física.

____________. (2011b). *Metodologias de pesquisa em ensino*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

MORGADO**,** ALGUSTO C ; OLIVEIRA. et *al*. (2006). *Análise Combinatória e Probabilidade*. 9ª ed. Rio de Janeiro : Grafica Wagner Ltda.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M.P.; MURARI, I.T.C. (2007). *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

SERRANO, G. P. *Investigación cualitativa*. (1998). In: MOREIRA, M. A. *Metodologias de Pesquisa em Ensino*. (2011b), São Paulo: Editora Livraria da Física.

ISBN 978-84-945722-3-4