LA GEOMETRIA GRIEGA

Elsa del Pilar Malisani

Introducción.

Los griegos no inventaron las primeras nociones matemáticas como comúnmente se supone, sino que es muy probable que las hayan aprendido de los egipcios y de los sumerios, quienes habían realizado algunos descubrimientos en el campo de la Geometría y de la Aritmética.

Los sumerios cultivaban la Aritmética y sus aplicaciones en la Astronomía, con el objeto de resolver cuestiones astrológicas. Por su parte, los egipcios habían logrado numerosos conocimientos matemáticos para aplicarlos al comercio, a las construcciones de templos y pirámides y a la mensura de tierras (realizadas anualmente después de las inundaciones del Nilo). Allí surge, precisamente, el término Geometría el cual proviene del griego: γεωμετρία que significa medir tierras.

Estos conocimientos geométricos eran adquiridos por procedimientos empíricos y tenían una finalidad práctica, es decir, estaban destinados a satisfacer necesidades materiales, lo cual muestra que los antiguos carecían de una concepción clara de la ciencia teórica.

En este artículo realizamos una breve reseña sobre el desarrollo de la Geometría durante la época griega. En la primera parte mostramos las características generales que adquiere la Geometría en dicha época y en la segunda, presentamos a sus principales exponentes con los valiosos aportes realizados.

El milagro griego.

Según Germain (GERMAIN, 1948: 243), todos los historiadores están de acuerdo en hablar del milagro griego cualesquiera sean sus opiniones sobre el aporte de Oriente a la Matemática de los griegos.

(*) El presente trabajo fue realizado durante la Beca de Iniciación del CONICET (período 1982-83).

Los griegos, muy probablemente, conocían la técnica utilitaria de los orientales, pero el milagro consiste en que, a partir de esos casos particulares organizaron y sistematizaron los conocimientos mediante el uso de un lenguaje adecuado. Es decir, su originalidad esencial consiste, precisamente, en un esfuerzo consciente para escribir las demostraciones matemáticas como una sucesión tal que no haya lugar a dudas al pasar de un eslabón al siguiente, forzando el asentimiento universal (BOURBAKI, 1969: 12). De esta manera, los conocimientos que hasta entonces eran empíricos adquieren un tratamiento científico puro pues se afirma la exigencia de un saber racional irreducible a la simple y mera colección de experiencias de la vida cotidiana: LA GEOMETRIA SE TRANSFORMA EN CIENCIA.

Con los griegos, dice Germain (GERMAIN, 1948:243), aparecen conceptos que hasta entonces habían permanecido, según todo lo hace suponer, en la sombra, sin haber sido discernidos con precisión: la abstracción, la generalización, el análisis, la síntesis. Todos estos procedimientos generales del pensamiento que dormitaban en el hombre pero que éste todavía no habia reconocido, entraron desde entonces al servicio de la razón humana.

Cabe destacar que, para los griegos LOS CONOCIMIENTOS MATEMATICOS SON PURAMENTE ABSTRACTOS, como los de número y figura. Un cuadrado, un triángulo, una circunferencia son nociones de naturaleza racional, existen sólo en el pensamiento; la figura no es más que una representación muy imperfecta de esas nociones y la relación entre estos términos (triángulo y figura, cuadrado y figura) es la misma que la que existe entre una idea y la palabra que la expresa. Por consiguiente, podemos decir que los griegos habían alcanzado el primer grado de abstracción, pues consideraron nociones generales, estudiaron objetos matemáticos y crearon un sistema deductivo.

A continuación presentamos a los principales exponentes de la "época griega" con los valiosos aportes realizados.

<u>Thales de Mileto</u> (siglo VI a.C.)

Es considerado por los historiadores como el primer matemático y el primer científico. Thales plantea el principio de <u>saber por saber</u>, es decir, estudiar para conocer los secretos de la naturaleza y de lavida. Este principio da valor a la ciencia por sí misma, en oposición al punto de vista pragmático conocido por los orientales (TORANZOS, 1949:15).

Los historiadores suponen que Thales ha obtenido importantes resultados, organizando y sistematizando los ya conocidos y agregando otros nuevos. Un ejemplo de ello es el célebre teorema que lleva su nombre y que se refiere a la proporcionalidad de los segmentos determinados por tres o más paralelas intersectadas por dos rectas secantes.

Pitágoras (siglo VI a.C.)

Era discípulo de Thales en la escuela matemática jónica. Su pasión eran los números y su lema: "Todas las cosas son números".

Pitágoras y su escuela filosófica de Crotona realizaron importantes estudios, descubren el número irracional que constituye un gran aporte para la Aritmética y el teorema de Pitágoras en Geometría que hacía intervenir inmediatamente a estos números. A partir de este teorema que considera que, en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, Pitágoras demuestra la existencia de segmentos inconmensurables, en contra de toda apariencia empírica y hasta de sus propios principios filosóficos.

Cuenta la leyenda que la existencia de segmentos inconmensurables se mantuvo en secreto durante mucho tiempo en la escuela pitagórica. Un discípulo infiel, Hipaso de Metaponte, osó divulgarla: fue expulsado por el Maestro y tuvo que huir de la ciudad. Lo alcanzaron las iras de Júpiter, quien envió una gran tormenta que hundió la nave en que había embarcado el incauto (GEYMONAT, 1954:9).

La Escuela de Atenas

Es la continuadora del pitagorismo y sus principales representantes son Platón y Aristóteles.

- Platón

Ejerce una gran influencia sobre de la Matemática ya que la armonía, la claridad, la precisión que los griegos exigían para esta ciencia, se debía a la concepción platónica: "La belleza se encuentra en las ideas y no en lo que el hombre agrega a las ideas". Además, Platón considera a la Matemática como una forma de acceso a una verdad en sí y que los objetos acerca de los que versa poseen una existencia propia en el mundo de las ideas (BOURBAKI, 1969:27).

Esto se halla reflejado en un pasaje del Libro VII de la República, donde Platón dice: "Tanto la Aritmética como la Geometría pueden estudiarse con espíritu científio puro... Aún cargada ocasionalmente con una terminología mísera y ridícula..., como si se tratara de práctica y de finalidad práctica, también la Geometría puede cultivarse para el conocimiento de lo que siempre es, y no para lo que nace y perece, y, por tanto podría servir de árgana para levantar el alma hacia la verdad, y podría convertir el raciocinio en filosófico para mantener hacia arriba lo que ahora mantenemos hacia abajo" (cit. GEYMONAT, 1954: 20).

Platón alude a la expresión "terminología mísera y ridícula" porque rechaza hasta el propio término Geometría (del griego: medir tierras) al desestimar todo contacto con la experiencia. Por esta razón, establece una separación entre geometría pura que ilumina, y geometría métrica o práctica que ensombrece. Según Geymonat (GEYMONAT, 1954: 20), esta contraposición indujo a Platón a admitir como estudio científico sólo el de las figuras que podían construirse con rectas y circunferencias, excluyendo en cambio el estudio de las <u>curvas mecánicas</u>... En efecto: según él, acudir a los recursos mecánicos oscurecía la belleza de la geometría rebajándola al estado práctico, en lugar de elevarla y conferirle como objetivo las figuras eternas e incorpóreas.

Platón ha tenido una influencia muy grande en el desarrollo de la Geometría. Como bien lo dice Proclo en el Resumen Histórico (siglo V): "Platón dio un enorme empuje a la geometría con el gran amor que demostró por ella, como lo atestiguan suficientemente sus escritos, repletos de consideraciones matemáticas que en todo momento despiertan el entusiasmo por estas ciencias en todos aquellos que se dedican a la filosofía" (cit. GEYMONAT, 1954: 20).

Esta influencia no ha sido totalmente positiva desde el punto de vista matemático, porque la exigencia de pureza y el ideal de belleza (de ahí el rechazo por los segmentos inconmensurables) que Platón pretendía para los conocimientos:

el lenguaje riguroso y la autonomía respecto de la experiencia (de ahí el rechazo por las curvas mecánicas) y la concepción de verdades matemáticas como "verdades eternas pre-existentes en el espíritu humano, el cual las descubre por reminiscencia" (DAROS, 1980: 102), son las que eliminaron de la Geometría el uso de la intuición caracterizándola como ciencia perfecta, como ciencia racional perfecta: concepción que fue admitida durante dos milenios.

- Aristóteles

Aristóteles ha estructurado la Lógica en forma definitiva proporcionando, de este modo, una base sólida sobre la cual comenzaron a construirse las deducciones matemáticas (TORANZOS, 1949: 16).

El gran mérito de Aristóteles reside en haber conseguido sistematizar y codificar los razonamientos confusos y los procedimientos no formulados de sus antepasados, reduciendo todo razonamiento correcto a la aplicación de un pequeño número de reglas fijas, independientes de la naturaleza de los elementos con que se opere.

Para Aristóteles, la demostración es un razonamiento silogístico científico. El silogismo que constituye la base de la Lógica, es un razonamiento (lógos) en el cual, de algunas cosas puestas (premisas) se sigue necesariamente algo diferente (conclusión) de las cosas que yacen puestas, y esto sucede por el mero hecho de haberlas puesto (DAROS, 1980:37).

Escuela Alejandrina

La Matemática griega alcanza su más alto desarrollo con la aparición de la Escuela Alejandrina y, sobre todo, con sus principales representantes: Euclides, Arquímedes y Apolonio.

- Euclides

De Euclides se conocen muy pocos datos biográficos; se sabe que vivió en el siglo III a.C. y que escribió una obra de importancia relevante en el campo de la investigación científica: Stoikheia, es decir, Elementos. Esta obra que estuvo destinada a reunir los principales resultados de toda la Matemática griega, alcanzó una difusión tan grande a través del tiempo, sólo superada por la Biblia.

Santaló (SANTALO), 1969: 7) refiriéndose a los Elementos dice: "Es el libro de fundamentación geométrica y, su estilo y ordenación fueron los moldes a los que se ajustaron todas las obras posteriores de Matemática... Se trata de una estructura lógica que responde exactamente al concepto de Platón de la geometría: "Como si se tratara de alguna finalidad práctica, los geómetras hablan siempre de cuadrar, prolongar, agregar, cuando en verdad la ciencia se cultiva con el único fin de conocer" (Platón, República, Libro VII)".

Los historiadores modernos sostienen que son muy pocos los resultados originales incluidos e esta obra compuesta por trece libros; pues los dos primeros libros contienen nociones fundamentales de Geometría, conceptos y teoremas ya conocidos por la escuela pitagórica y el Libro V reúne los estudios realizados por Eudoxo sobre las proporciones. Además, otros historiadores afirman que el ordenamiento de los temas tratados en los trece libros coincide con el desarrollo cronológico de los mismos, llevado a cabo por los matemáticos griegos que vivieron en la época comprendida por el siglo de Pitágoras (VI a.C.) y el de Euclides (III a.C.).

De todas maneras, el valor de esta obra no radica en su originalidad sino en su metodología, ya que en ella, Euclides sistematiza los conocimientos matemáticos que se tenían hasta entonces y los estructura siguiendo las reglas de la lógica aristotélica.

Según Geymonat (GEYMONAT, 1954: 16), en los Elementos hallamos catalogados por primera vez, con rigor casi perfecto, los conceptos primitivos de la geometría, así como los axiomas y postulados que valen para ellos; cualquier otra proposición, estará incluída en la medida que logre deducirse de esos principios según reglas bastante claras, aunque no enunciadas explícitamente por el autor (reglas que, de todas maneras, resultan sin duda conexas con la sistematización aristotélica de la lógica). En este grandioso edificio de conceptos y proposiciones adquiere finalmente sentido preciso la afirmación de resultar demostrado un teorema, de ser resoluble un problema, de ser un enunciado contradictorio. De este modo, la ciencia reemplaza a los datos empíricos; la razón y el pen samiento, como instrumentos, sustituyen a los sentidos.

Para construir su geometría, Euclides se vale de definiciones, postulados y nociones comunes (axiomas). Establece 118 definiciones que dan nombre a los elementos con los cuales trabaja. Por ejemplo:

-Punto es lo que no tiene partes.

-Línea es una longitud sin anchura.

-Superficie es lo que únicamente tiene longitud y anchura.

-Plano es la superficie igualmente situada respecto de sus rectas.

Estas definiciones son inconsistentes, según Santaló (SANTALO, 1969: 28), pero responden al afán que la autoridad de Euclides hizo perdurar durante siglos, de "definir todo", hasta las nociones primitivas de las cuales se parte en cualquier construcción lógica y que, por consiguiente no pueden ser definidas en términos más simples. Otros autores, en cambio, sostienen que los matemáticos griegos, aparentemente, creían no haber podido dilucidar las nociones primeras que les servían de punto de partida; si bien formulaban "definiciones" de ellas, lo hacían con el solo objeto de tranquilizar su conciencia (BOURBAKI, 1969: 28).

En las construcciones axiomáticas modernas, las nociones primeras no se definen explícitamente sino que se caracterizan implícitamente por los axiomas.

Una vez formuladas las definiciones, Euclides establece cinco postulados que deben ser aceptados sin prueba alguna, es decir, los postulados son juicios que no tienen otra razón para su formulación que la necesidad de ser aceptados para no llegar a contradicciones dentro del sistema teórico.

Estos postulados son los siguientes:

- Desde cualquier punto a cualquier otro se puede trazar una recta.

- Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.

- Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.

- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Si una recta, al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Por último, Euclides formula las nociones comunes o axiomas, que son aceptadas como válidas, por ejemplo:

- Cosas iguales a una misma cosa, son iguales entre sí.
- Si a cosas iguales se les agregan cosas iguales, las sumas son iguales.
- Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
- Cosas que se pueden superponer una a la otra son iguales entre sí.
- El todo es mayor que la parte.

De este modo, cualquier otra proposición pertenecerá al sistema, es decir, será verdadera si puede deducirse de los principios establecidos, mediante la aplicación de las reglas de la lógica. Más específicamente (GEYMONAT, 1954: 16), estos principios constituyen los únicos criterios de verdad para todas las demás proposiciones; y la deductibilidad lógica de ellas constituye el único método admitido en la demostración.

Al conocer ahora, cómo Euclides ha construído su geometría, cabe preguntarnos: cómo han elaborado los griegos, las reglas de razonamiento.

Según Bourbaki (BOURBAKI, 1969: 27-28) han tenido que elaborarse necesariamente en contacto con la experiencia para poder llegar a ofrecer una completa confianza; antes de poder llegar a considerarlas indiscutibles ha tenido necesariamente que pasarse por muchos tanteos y paralogismos. Habría que desconocer el espíritu de los griegos y su gusto por la discusión y la sofística, para poder pensar que los "axiomas" que a Pascal le parecían más evidentes no fueron objeto de largas discusiones. Pero, es necesario añadir que fijados los axiomas, no se admitía en principio ningún uso de la intuición. Es decir, una vez que se ha entrado en la práctica de los matemáticos, no parece que las reglas del razonamiento hayan sido puestas en duda hasta una época muy reciente; si bien, en Aristóteles y los estoicos, algunas de estas reglas se deducen a partir de otras mediante ciertos esquemas de razonamiento, las reglas primitivas se aceptan siempre como evidentes.

Los críticos modernos han demostrado que existen algunas fallas en los encadenamientos lógicos seguidos por Euclides y, por consiguiente, los Elementos serían susceptibles de perfeccionamiento; pero esto no disminuye la importancia fundamental que posee la obra euclidiana, desde el punto de vista metodológico. Pues, según Toranzos (TORANZOS, 1949: 17), ha señalado el camino con el cual la Matemática puede constituirse en disciplina racional autónoma. Y según Geymonat (GEYMONAT, 1954: 16), éste fue y es la primera tentativa lograda para construir un lenguaje científico riguroso, como tal señala una de las etapas fundamentales en la historia del pensamiento científico. Demuestra que el hombre había llegado, en el siglo III a.C., a tener plena conciencia del valor del lenguaje como instrumento indispensable de la investigación científica.

- <u>Arquímedes y Apolonio</u>

Los trabajos de Arquímedes y Apolonio son muy distintos de los llevados a cabo por Euclides, ya que no realizan una sistematización y estructuración de los conocimientos existentes, sino más bien, se dedican a perfeccionarlos o a descubrir nuevas teorías.

<u>Arquímedes</u> se preocupa por la evaluación de áreas y volúmenes de la esfera, cilindro, conoides, esferoides (usando para ello verdaderos métodos infinitesimales); realiza trabajos sobre la cuadratura de la parábola, y estudia propiedades de figuras que aún no habían sido descubiertas. Por otra parte, a diferencia de la mayoría de los matemáticos griegos seguidores de la filosofía platónica, se ocupa de las aplicaciones de la Matemática y obtiene resultados interesantes como el principio de la hidrostática que lleva su nombre y las leyes de la palanca.

Cabe destacar, que Arquímedes supera esa "desconfianza del infinito" que manifestaban los griegos; pero trata de eludir los razonamientos dirigidos a infinitos o infinitésimos reconduciéndolos a un sistema de desigualdades, mediante demostraciones por el absurdo: método de exhaución (de aniquilar la diferencia) (TREJO, 1977: 268).

Una de las críticas que, en el siglo XVI, se le realiza al método de exhaución con el cual Arquímedes había demostrado algunos resultados de las cuadraturas, es la siguiente: Si bien los razonamientos expuestos eran, sin duda, impecables, el hilo conductor de sus argumentaciones se mantenía, sin embargo, en la oscuridad. En general, sus argumentaciones se desarrollaban indirectamente, es decir, por el absurdo; y por tanto como todas las demostraciones indirectas ocultaban el núcleo central de validez. Es por ello que resultaba difícil desarrollarlas más allá del punto que él había alcanzado, y afrontar con el mismo método nuevos problemas (GEYMONAT,1954: 31).

Por otra parte, una falla detectada en el razonamiento de Arquímedes, es la de no plantearse el problema de la existencia del área, ya que él estaba convencido, intuitivamente, de que toda figura poseía cierta área. Pero se considera que ésta no fue sólo una falla en su razonamiento, sino una laguna en el marco total de la Geometría griega.

Apolonio realiza numerosos trabajos en Geometría;su principal obra se refiere a las cónicas y en ella se encuentran gran parte de los contenidos que se conocen actualmente sobre estas curvas.

La Matemática había alcanzado su máximo esplendor con la Escuela Alejandrina; pero tras la decadencia de la Edad Antigua se produce una profunda crisis en el ámbito científico. Como consecuencia de ello, la ciencia por perfecta que fuese después de la época griega debía esperar varios siglos (hasta los siglos XVI y XVII) antes de alcanzar un nuevo grado de desarrollo.

Referencias bibliográficas.

BOURBAKI, Nicolás

1969. Eléments d'histoire des mathématiques (París:Hermann). Elementos de historia de las matemáticas, traducido por Jesús Hernández (Madrid: Alianza, 1976, 2a. ed.).

DAROS, W.R.

1980. Relacionalidad, ciencia y relativismo (Rosario: Apis).

GERMAIN, Paul

1948. Les grands lignes de l'évolution des Mathématiques (Recopilado por Le Lionnais, Francois y colaboradores, Les grands courants de la pensée mathématique (París: Cahiers du Sud). Las grandes corrientes del pensamiento matemático, traducido por Néstor Míguez (Buenos Aires: Eudeba, 1976, 3a. ed.).

GEYMONAT, Ludovico

1954. Il pensiero scientifico (Milán: Aldo Garzanti). El pensamiento científico, traducido por José Babini (Buenos Aires: Eudeba, 1972, 6a. ed.).

SANTALO, Luis

1961. Geometrías no euclidianas (Buenos Aires: Eudeba, 1969, 4a. ed.).

TORANZOS, Fausto

1949. Introducción a la Epistemología y Fundamentación matemática (Buenos Aires: Espasa).

TREJO, César A.

1977. Matemática elemental moderna. Estructura y método (Buenos Aires: Eudeba, 4a. ed.).