Divide y vencerás y La unión no hace la fuerza

por

Pedro J. Miana Sanz y Beatriz Rubio Serrano

(Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones)

Se suele atribuir a Julio César la máxima latina *Divide et impera* aunque esta frase como tal no aparece recogida en ninguna de sus obras; hay quien la encuentra escondida entrelíneas en *El arte de la guerra* de Sun Tzu (siglo IV a.C) , o en *El Príncipe* de Nicolas Maquiavelo. Hay otros que la ponen en labios de Napoleón Bonaparte. Sin embargo ninguno de estos genios militares conocían las matemáticas que demostraban que la simple división de la fuerza enemiga conducía a la victoria.

Frederick Lanchester (1868-1946), ingeniero e inventor británico, contribuyó notablemente al desarrollo del sector automovilístico y aeronáutico, mejorando amortiguadores, motores o hélices y desarrollando las ya existentes. Su afición por la aeronáutica y el inicio de la I Guerra Mundial, le llevó a interesarse por la modelización de los combates aéreos, y para ello formuló las conocidas *Leyes de Lanchester*. En 1916 publicó su tratado *Aeronaves en la batalla: el amanecer del cuarto ejército* en la que emplea ecuaciones diferenciales para describir el enfrentamiento entre dos fuerzas enemigas.

Aunque existen varios modelos estudiados por Lanchester, nosotros nos detendremos brevemente en el modelo de Fuego Dirigido (o ley de los Cuadrados). En éste, dos fuerzas de efectivos X e Y, variables en el tiempo, se enfrentan y la variación de sus magnitudes en el tiempo es proporcional al número de efectivos de la fuerza enemiga, así se tiene el sistema diferencial:

$$dX/dt = -aY,$$
$$dY/dt = -bX,$$

donde los coeficientes constantes a y b son la potencia de fuego (o efectividad en el combate) de la fuerza Y y de la fuerza X, respectivamente. Resolvemos el sistema anterior, y obtenemos que

$$-aXdX = -bYdy,$$

e integrando que

$$aX^2 - bY^2 = K,$$

donde K es una constante de fuerza de batalla que permanece invariable a lo largo de la misma. Por tanto si $K > 0$, vence la fuerza X; si $K < 0$, es la fuerza Y la vencedora y en el caso $K = 0$, se produce el empate de las dos fuerzas.

Si consideramos que los coeficientes a y b no se pueden modificar a lo largo de la batalla, está claro que la división de los efectivos de una de las fuerzas, favorecerá la victoria de la fuerza enemiga. Así, si la fuerza $X = 10$, se divide en dos unidades $X_1 = 5$ y $X_2 = 5$, entonces $X_1^2 + X_2^2 = 50$, justamente la mitad de $X^2 = 100$, *Divide y vencerás*.

Este modelo de Lanchaster ha sido aplicado, entre otros, para estudiar la batalla de Iwo-Jiwa (1945) entre Estados Unidos y Japón o los enfrentamientos del Estado de México contra el Narcotráfico en 2007 en Apatzingán. En un terreno más lúdico, en el juego del ajedrez, en el blog <http://analisisajedrecistico.blogspot.com.es/> se sugiere que modificaciones de las leyes de Lanchester podrían modelizar el desarrollo de partidas de ajedrez y se podría comparar esta aproximación con otros modelos matemáticos expuestos en el libro *Fundamentos de la estrategia ajedrecística* de Lars Bo Hansen.

Sin embargo la unión no hace siempre hace la fuerza. La actualidad política catalana ha llevado al primer plano la posibilidad de que dos fuerzas políticas distintas obtengan menor representación parlamentaria juntas que por separado. El sistema de reparto de los escaños del sistema D'Hondt —actualmente en vigor en España— favorece a los partidos mayoritarios pero, en este caso perjudica a la unión de los dos partidos principales. Recordemos que el reparto de los escaños en el sistema D'Hondt se realizada en función de los cocientes sucesivos (dividiendo por la mitad y eliminando los valores que ya han obtenido escaño). Veámoslo con el siguiente ejemplo en el que se reparten 7 escaños entre 4 partidos: *A*, *B*, *C*, *D* que han obtenido 710 000 votos en total

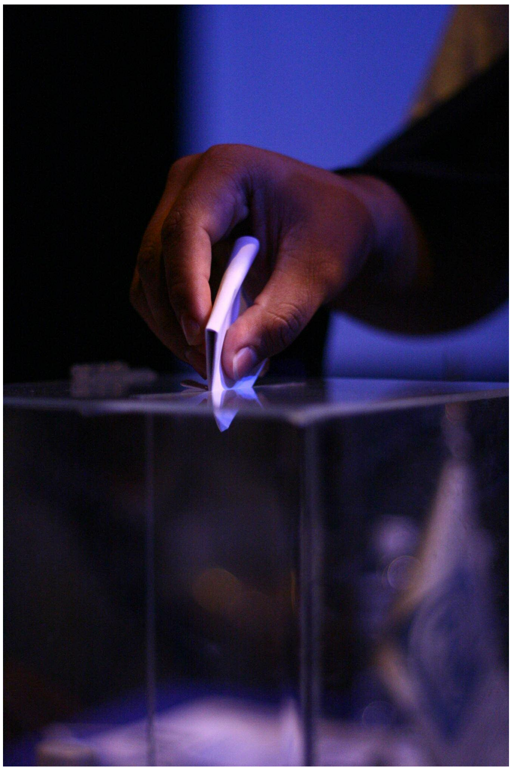
Partidos	*A*	*B*	*C*	*D*
Votos obtenidos	360 000	270 000	60 000	20 000
1.er cociente	180 000	135 000	30 000	10 000
2.º cociente	90 000	67 500	15 000	5 000
3.er cociente	45 000	33 750	7 500	2 500
4.º cociente	22 500	16 875	3 750	1 250
Porcentaje votos	50,7	38,03	8,45	2,82
Porcentaje escaños	42,86	42,86	14,28	0

Ahora supongamos que se unen *A* y *B*, en este caso el reparto sería así:

Partidos	*A+B*	*C*	*D*
Votos obtenidos	630 000	60 000	20 000
1 er cociente	315 000	30 000	10 000
2 º cociente	157 500	15 000	5 000
3 er cociente	78 750	7 500	2 500
4 º cociente	39 375	3 750	1 250
Porcentaje votos	88,73	8,45	2,82
Porcentaje escaños	71,43	28,57	0

Es claro que el beneficiario en este caso es el partido C, con la simple unión de A y B.

Por último, señalamos que en productividad empresarial, la ley de los rendimientos decrecientes afirma que al aumentar un factor productivo en la producción de un bien, si se mantienen constantes el resto de los factores, se alcanza un punto a partir del cual la producción total aumenta cada vez menos, incluso puede llegar a disminuir.



La ley de rendimientos decrecientes fue expuesta inicialmente por el francés Turgot (1727-1781) en relación con la productividad agraria, y posteriormente utilizada por el economista David Ricardo (1772-1823) para explicar el aumento de los precios de los productos agrícolas en la Gran Bretaña de 1814. Se comprende fácilmente con los siguientes ejemplos: en un campo el uso de fertilizantes aumenta la productividad de la superficie cultivada, sin embargo, existe un punto en que un aumento del fertilizante, hará que el aumento de la productividad será menor, e incluso puede llegar a disminuir. También es claro que en una cadena de montaje, un mayor número de operarios aumentará la productividad, existiendo un punto a partir del cual la productividad empezará a disminuir.

Como conclusión, señalamos que ni unir es siempre bueno (contraejemplo, Sistema D'Hondt) ni malo (Leyes de Lanchester); todo depende de los sistemas que estamos estudiando y de las leyes que gobiernen. En matemáticas como en la vida misma, hay que huir de los absolutismos y buscar uno su propia solución.