ANALISIS COMBINATORIO II

Enzo R. Gentile

En este artículo continuamos el trabajo iniciado en Análisis Combinatorio I, publicado en el número anterior (Vol. 2 - N° 3) de esta revista.

1. *Teorema Binomial*

Sean $a_1, \ldots, a_n$ números (reales o complejos). Consideremos el producto de expresiones binomiales

$$(x+a_1) \, . \, (x+a_2) \ldots (a+a_n)$$

donde x denota también un número o si el lector esta informado x denota una indeterminada en sentido de la teoría de polinomios. El desarrollo de la expresión anterior produce una expresión polinomial

$$c_o.x^n + c_1.x^{n-1} + c_2.x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}.x + c_n$$

(*Nota*: destaquemos el carácter *formal* de este desarrollo polinomial, el carácter de x es el de una variable independiente, o libre, todo es formal, no simplificamos *nada*).

Analicemos los coeficientes c_o, c_1, etc. Se tiene obviamente:

$c_o = 1$

$c_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$c_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_n + a_2a_3 + \ldots + a_ia_j + \ldots + a_{n-1}a_n \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n$

$c_3 = a_1a_2a_3 + \ldots + a_ia_ja_k + \ldots \quad (1 \leqslant i < j < k \leqslant n)$

Cada coeficiente c_k se forma con la suma de todos los posibles productos de k factores cuyos índices determinan una sucesión estrictamente creciente de k elementos de $1, 2, \ldots, n$. O sea cada c_k es una suma de C_k^n

productos, cada producto determinado por una combinación de k en n.

Si en particular $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ se tiene la fórmula

$$(x+a).(x+a)\ldots(x+a) = (x+a)^n = C_0^n.x^n + C_1^n.x^{n-1}.a + C^n.x^{n-2}.a^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_k^n.x^{n-k}.a^k + \ldots + C_n^n.a^n$$

Utilizando el signo de sumatoria Σ y conviniendo en escribir $x^0 = a^0 = 1$ se obtiene la clásica fórmula del binomio

$$(x+a)^n = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}.x^{n-k}.a^k$$

obviamente equivalente a

$$(x+a)^n = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}.x^k.a^{n-k}$$

(permutando el papel de x y a).

Una demostración inductiva de esta fórmula puede hacerse como sigue.

Probaremos primeramente el caso

$$(1) \qquad (1+x)^n = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}.x^k$$

Si n = 1 es Klar. Supongamos válida la fórmula anterior. Se tiene, escribiendo $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n.(1+x)$,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}.x^{k+1} + \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}.x^k \\ &= \Sigma_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}.x^k + \Sigma_{k=1}^n \binom{n}{k}.x^k + 1 \\ &= x^{n+1} + \Sigma_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right).x^k + 1 \\ &= x^{n+1} + \Sigma_{k=1}^n \binom{n+1}{k}.x^k + 1 \\ &= \Sigma_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}.x^k\end{aligned}$$

O sea la fórmula es válida para n+1. Invocando el PI queda probada (1).

Sea $a \neq 0$, sea $y = \frac{x}{a}$

$$(x+a)^n = a^n.(1+y)^n = a^n.\ \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}.y^k = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}.x^k.a^{n-k}$$

y hemos probado la fórmula en general. (Nota: Jarvis nos observa que en realidad hemos probado la fórmula del binomio sólo para dominios donde es posible *dividir*, o sea en cuerpos. La fórmula del binomio es válida en cualquier anillo con la única condición que $x.a = a.x$, por lo tanto es válida en todo anillo conmutativo. Le he prohibido a Jarvis que me haga observaciones con el calor que hace (enero 5, 1983)

Consecuencias de la fórmula del binomio.

i) $(a-b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k . \binom{n}{k} . a^{n-k} . b^k$

ii) $0 = \Sigma_{k=0}^{n} (-1) . \binom{n}{k}$, $2^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

iii) Sea x una indeterminada y sean n, m en N. La identidad

(1) $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n . (1+x)^m$

da lugar en cada miembro a un polinomio en x. Dos polinomios son iguales si y sólo si poseen los mismos coeficientes. Esta es la propiedad esencial consecuencia de ser x una indeterminada o sea un elemento algebraicamente libre.

Si $1 \leqslant k < n+m$ el coeficiente de x^k en ambos miembros de (1) es

$$\binom{n+m}{k} = \Sigma_{i=0}^{k} \binom{n}{i} . \binom{m}{k-i}$$

fórmula que ya conocemos.

iv) Sea x una indeterminada y sea $n \in N$. A partir de la fórmula del binomio

$$(1+x)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . x^k$$

obtenemos derivando

$$n . (1+x)^{n-1} = \Sigma_{k=1}^{n} k . \binom{n}{k} . x^{k-1}$$

usando la fórmula del binomio en el miembro de la izquierda y comparando el coeficiente de x^r, $1 \leqslant r < n$

$$n . \binom{n-1}{r} = (r+1) \binom{n}{r+1}$$

o sea $\boxed{\binom{n}{r+1} = \frac{n}{r+1} . \binom{n-1}{r}}$

fórmula fácil de verificar directamente.

Veamos una aplicación de este resultado.

$$2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{k}+\dots+\binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0}+n.(1+\frac{1}{2}\binom{n-1}{1}+\frac{1}{3}\binom{n-1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n}\binom{n-1}{n-1})$$

o sea $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

En forma análoga se prueba que

$$\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\dots+(-1)^n.\frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}$$

Notar que si en la expresión de la derivada reemplazamos x por 1 resulta la identidad $n.2^{n-1} = \Sigma_{k=1}^{n} k.\binom{n}{k}$.

v) Sea x una indeterminada y sea $n \in N$. A partir de la fórmula del binomio resulta por "integración

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} = \Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{x^{i+1}}{i+1} + C \quad (C: = \text{constante})$$

Haciendo x = 0 resulta la identidad

$$\frac{1}{n+1} = 0 + C, \text{ por lo tanto } C = \frac{1}{n+1}$$

Haciendo x = 1 resulta la identidad

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \Sigma_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}.\binom{n}{i}$$

Se obtiene otra demostración de resultados en iv.

vi) Dejamos como ejercicio para el lector obtener una identidad combinatorial igualando los coeficientes de x^n en la identidad

$$(1+x)^{2n} = (1+2x+x^2)^n = (1+(2x+x^2))^n = (1+x.(2+x))^n$$

2. *Ejercicios*

1) Hallar el coeficiente de:

i. x^5 en $(x+\frac{1}{2x})^{10}$

ii. x^8 en $(x+2x^2)^5$

iii. x^n en $(x^2+2x)^n$

iv. $x^3\,y^6$ en $(x+y)^9$

v. $x^2\,y^2$ en $(x+y+z)^4$

vi. x^n en $(x^3+x^{-3})^n$

2) Sean a,b,c números reales (o elementos de un anillo conmutativo). Probar que $\forall n,\ n \in N$

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!.j!.k!}\cdot a^i b^j c^k$$

La suma debe entenderse tomada para *todas* las posibles ternas ordenadas i,j,k de números no negativos que suman n (particiones ordenadas de n en tres sumandos). Los coeficientes

$$\frac{n!}{i!.j!.k!}$$

son números enteros. (*Pregunta*: ¿Cuántos sumandos tiene aquella suma?).

3) Hallar el valor de k para el cual $\binom{12}{k}$ es máximo.

4) Probar las identidades:

i. $\binom{n}{0}+2.\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+2.\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+2.\binom{n}{5}+\ldots=3.2^{n-1}$

ii. $2.1.\binom{n}{2}+3.2.\binom{n}{3}+4.3.\binom{n}{4}+\ldots=n.(n-1).2^{n-2}$

iii. $\binom{n}{1}.\frac{1}{1}-\binom{n}{2}.\frac{1}{2}+\binom{n}{3}.\frac{1}{3}-\ldots\pm(-1)^{n-1}.\binom{n}{n}.\frac{1}{n}=$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

iv. $\Sigma_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}.(-1)^k.\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{1}{n}.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$

v. $\binom{n}{0}\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=2^k.\binom{n}{k}$

vi. $\binom{n}{0}\binom{n}{k}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=0$

vii. Probar e interpretar conjuntisticamente, la fórmula

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} = 4^n .$$

3. *Combinatoria con elementos indistinguibles (Bosones).*

Se trata de determinar, dados k elementos indistinguibles entre si y n cajas, el número total de formas de ubicar los k objetos en las n cajas. Por ejemplo k palomas y n jaulas (k japoneses en n tintorerías!). Tratemos de esquematizar racionalmente una tal distribución. Veamos un par de ejemplos.

$\underline{\;\cdot\cdot\cdot\;}\quad \underline{\;\;\cdot\;\;}\quad \underline{\qquad}\quad \underline{\qquad}\quad \underline{\;\overset{\cdot}{\cdot\cdot\cdot}\;}\quad \underline{\;\;\cdot\;\;}$ 9 objetos en 6 cajas

Podemos representar esta situación en la forma siguiente

$$\cdot\cdot\cdot|\cdot|\;|\;|\cdot\cdot\cdot\cdot|\cdot$$

denotando las cajas con barras e indicando con el número a izquierda el número de objetos en esa caja, salvo en la caja de la extrema derecha que no es necesario escribirla. Por ejemplo

$$|\;|\;|\cdot\cdot|\;|\cdot\cdot\cdot$$

describe la distribución de 5 objetos en 6 cajas de esta forma: las tres primeras vacías, la cuarta tiene 2 elementos, la quinta esta vacía y la sexta contiene 3 elementos.

Por lo tanto en esta representación aparecen n-1 barras y k puntos. En definitiva se trata de hallar todas las permutaciones de k+n-1 objetos k iguales entre si y n-1 iguales entre si. Este número es

$$\frac{(k+n-1)!}{k!.(n-1)!} = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

A manera de recapitulación digamos que hay n^k formas posibles de distribuir k objetos distintos entre si, en n cajas (totalidad de aplicaciones de $[\![1,n]\!]$ en $[\![1,k]\!]$). Si ahora los objetos son *indistinguibles* el número total de posibles distribuciones es

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

<u>*NOTA*</u> (Ver W. Feller: An introduction to Probability Theory and its applications, Pag. 53). En Mecánica Estadística una situación corriente es considerar sistemas de k partículas indistinguibles (electrones, fotones, protones,..) en un cierto espacio. Dicho espacio es dividido en un número grande n, de pequeñas regiones o celdas, de manera tal que cada partícula tiene ubicación en una celda. En esta forma el sistema pretende describirse como una distribución al azar (random distribution) de k partículas en n celdas. Se trata ahora de asignar una probabilidad a cada distribución. En la estadística de Maxwell-Boltzman se considera la posibilidad de n^k distribuciones equiprobables. Mientras que en la estadística de Einstein-Bose se distinguen solamente $\binom{k+n-1}{k}$ posibles distribuciones. Cada distribución tiene asignada entonces una probabilidad igual a $\binom{k+n-1}{k}^{-1}$. Se demuestra en Mecánica Estadística que fotones y núcleos se comportan según este último esquema. Hay otra posibilidad según la estadística de Fermi-Dirac en la que es imposible para dos o mas partículas pertenecer a la misma celda. Es claro que esto requiere que $k \leq n$. El número posible de distribuciones de k objetos indistinguibles en n cajas de manera que haya a lo sumo un elemento en cada una es obviamente $\binom{n}{k}$. O sea cada distribución tiene la misma probabilidad $\binom{n}{k}^{-1}$. El modelo de Fermi-Dirac se aplica a electrones, neutrones y protones. Es costumbre referirse a *bosones* como elementos *indistinguibles* que pueden ocupar celdas sin restricción en su número, mientras que *fermiones* son elementos indistinguibles que pueden ocupar celdas pero a lo sumo uno por cada celda.

<u>*Ejemplos*</u>

1. Un ascensor lleva 10 pasajeros y puede detenerse en cualquiera de 12 pisos.

i. ¿En cuántas formas pueden descender los 10 pasajeros si no se hacen distinción de personas?

Respuesta. $\binom{10+11}{10} = \binom{21}{10} = 352.716$

ii. ¿En cuántas formas pueden descender si en cada piso desciende a lo sumo un pasajero?

Respuesta. $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$

2. ¿En cuántas formas pueden asignarse, en un examen, 30 puntos a 8 problemas con la condición que cada problema reciba al menos 2 puntos?

Respuesta. $\binom{14}{7} = 116.280$

3. i. ¿En cuántas formas pueden distribuirse 8 palomas y 9 canarios en 10 jaulas?

Respuesta. $\binom{8+9}{8}.\binom{9+9}{9}$

ii. ¿En cuántas formas pero tal que no haya dos palomas en la misma jaula?

Respuesta. $\binom{9+9}{9}.\binom{10}{8}$.

iii. ¿En cuántas formas pero tal que haya a lo sumo una paloma y un canario en cada jaula?

Respuesta. $\binom{10}{8}.\binom{10}{9}$.

4. Calculemos todas las aplicaciones crecientes de $[\![1,k]\!]$ en $[\![1,n]\!]$.

(Una aplicación $f\colon [\![1,k]\!] \to [\![1,n]\!]$ se dice creciente si: $1 \leqslant i < j \leqslant k \Rightarrow f(i) \leqslant f(j)$).

Solución. Veamos como dar una tal aplicación es dar exactamente una distribución de k bosones en n celdas.

Se ve fácilmente con un ejemplo, sea $k = 5$, $n = 4$. A la distribución

..|.|.. o sea $\underline{..}\ \underline{.}\ \underline{}\ \underline{..}$

le hacemos corresponder la función creciente

1 1 2 4 4 o sea $f(1)=1, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=4, f(5)=4$

Por lo tanto hay:

$\binom{n}{k}$ aplicaciones estrictamente crecientes de $[\![1,k]\!]$ en $[\![1,n]\!]$ y

$\binom{k+n-1}{k}$ aplicaciones crecientes de $[\![1,k]\!]$ en $[\![1,n]\!]$.

5. (Particiones ordenadas)

i. ¿En cuántas formas es posible descomponer al número natural n en suma de k sumandos enteros $\geqslant 0$. Por ejemplo si $k = 2$ y $n = 4$ se tienen las particiones: $4 = 0+4 = 4+0 = 1+3 = 3+1 = 2+2$. El problema admite solución inmediata si distinguimos el orden de los sumandos. De otro modo el problema es difícil.
Se trata entonces de colocar n objetos en k celdas!. Su número es

$$\binom{n+k-1}{n}$$

ii. ¿En cuántas formas es posible descomponer al número natural n como suma de k números naturales?.
En este caso los sumandos no pueden ser 0. Se traduce en aplicar el caso anterior a k y n-k. Su número es pues

$$\binom{n-k+k-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

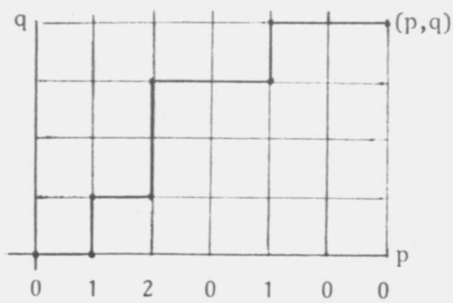
<u>Aplicación</u>: El número total de formas de distribuir n banderas distintas en k mástiles (se permite mástiles vacíos) es $\binom{n+k-1}{n}.n! = k.(k+1) \ldots (n+k-1)$. Si no se permiten mástiles vacíos el número pedido es $\binom{n-1}{k-1}$.

iii. ¿En cuántas formas pueden n personas desfilar en grupo no vacios de k personas?
<u>Respuesta</u>. $n!.\binom{n-1}{k-1}$.

iv. ¿En cuántas formas pueden disponerse n libros distintos en k estantes de una biblioteca de manera tal que no quede ningún estante vacío?

6. Consideremos el plano reticulado (ver figura). Se trata de cal-

cular el número total de caminos siguiendo segmentos del reticulado y en las direcciones positivas de los ejes X, Y, que puede recorrer una partícula que sale de (0,0) al punto (p,q), p,q enteros. Veamos como resolvemos este problema con "bosones"



Cada punto del reticulado sobre el eje X es una celda, p+1 en total. Se distribuyen q bosones en estas p+1 celdas. Esta distribución se traduce en un camino tal que se recorre, k segmentos en la dirección positiva del eje y en la abcisa i, si la celda i contiene k bosones.

El dibujo adjunto muestra claramente este relato.

Se sigue entonces que el número total de caminos es igual al número de distribuciones de q bosones en p+1 celdas. Este número es

$$\binom{q+p}{q} = \binom{p+q}{p}$$

Ejercicio. Dibuje los 15 caminos de (0,0) a (2,4) del tipo señalado anteriormente.

4. *Apéndice*. Calcularemos para n, k ε N el número $S_{n,k}$ de aplicaciones de $[\![1,n]\!]$ sobre $[\![1,k]\!]$. Obviamente $S_{n,k} = 0$ si $n < k$.

Se tiene la siguiente fórmula

$$(1) \quad S_{n,k} = k^n - \binom{k}{1}.(k-1)^n + \binom{k}{2}.(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}.\binom{k}{k-1}$$

El método que usaremos para obtener esta fórmula es de *inversión*.

Lo pasamos a detallar

Sabemos que hay k^n aplicaciones de $[\![1,n]\!]$ en $[\![1,k]\!]$. Las mismas se clasifican en, aplicaciones de $[\![1,n]\!]$ sobre $[\![1,k]\!]$, aplicaciones de $[\![1,n]\!]$ sobre subconjuntos de $[\![1,k]\!]$ de k-1 elementos, etc. de manera que se tiene la fórmula

(2) $$k^n = S_{n,k} + \binom{k}{1}.S_{n,k-1} + \binom{k}{2}.S_{n,k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}S_{n,1}$$

Obtener (1) de (2) o viceversa es lo que se denomina una "inversión" y tiene que ver con la inversión de matrices.

Supondremos al lector familiarizado con la teoría elemental de matrices.

La fórmula (2) escrita para k, k-1, k-2,..., 2,1 se expresa matricialmente en la forma

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} & \cdots & \binom{k}{k-1} \\ 0 & 1 & \binom{k-1}{1} & \binom{k-1}{2} & \cdots & \binom{k-1}{k-2} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{k-2}{1} & \cdots & \binom{k-2}{k-3} \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} S_{n,k} \\ S_{n,k-1} \\ S_{n,k-2} \\ . \\ . \\ S_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^n \\ (k-1)^n \\ (k-2)^n \\ . \\ . \\ 1^n \end{pmatrix}$$

La matriz cuadrada de kxk precedente es inversible y su inversa es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\binom{k}{1} & \binom{k}{2} & -\binom{k}{3} & \cdots(-1)^k & \binom{k}{k-1} \\ 0 & 1 & -\binom{k-1}{1} & \binom{k-1}{2} & \cdots(-1)^{k-1} & \binom{k-1}{k-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\binom{k-2}{1} & \cdots(-1)^{k-2} & \binom{k-2}{k-3} \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

En efecto, esto se sigue de la identidad mostrada anteriormente:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} - \dots + (-1)^k . \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 0$$

Multiplicando la ecuación matricial (3) a izquierda por B resulta la identidad (1) buscada.

Aplicación El número total de formas posibles de distribuir n objetos *distintos* en k cajas, de manera que no quede ninguna caja vacía es $S_{n,k}$.

Por ejemplo el número de formas en que pueden distribuirse 5 libros distintos entre 3 personas de manera tal que todas reciban al menos un libro es $S_{5,3} = 3^5 - 3.2^5 + 3.1^5 = 150$

El número de formas posibles de envolver 5 libros en tres paquetes es $\frac{1}{3!} . S_{5,3} = 25$.

Sea $P_{n,k}$ el número de particiones de un conjunto de n elementos en k partes no vacías. Dejamos a cargo del lector probar que

$$k! . P_{n,k} = S_{n,k}$$

Otra aplicación del método de inversión permite calcular el número p_n de permutaciones f de $[\![1,n]\!]$ tales que $f(x) \neq x$ cualquiera sea $x \in [\![1,n]\!]$, o sea, las permutaciones que no fijan ningún punto.

En efecto, a partir de la fórmula evidente que clasifica las n! permutaciones de $[\![1,n]\!]$

$$n! = p_n + \binom{n}{1}.p_{n-1} + \binom{n}{2}.p_{n-2} + \dots + 1$$

obtenemos, por inversión, la fórmula

$$p_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n =$$

$$= n!.\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n . \frac{1}{n!}\right)$$

Referencia

N. Bourbaki, Theorie des Ensembles, Chap. III. Ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers. 1956