

A função quadrática: variação, transparência e duas tipologias de exemplos.

Carlos Alberto Figueiredo, Escola Secundária D. Sancho II de Elvas (Portugal)

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España)

Recibido el 20 de Julio de 2012; aceptado el 2 de Noviembre de 2012

La función cuadrática: variación, transparencia y dos tipos de ejemplos

Resumen

El uso de ejemplos es un recurso que todos profesores de matemáticas utilizan para enseñar los contenidos matemáticos. Aunque las estrategias metodológicas utilizadas puedan ser muy diferentes, la ejemplificación que contienen puede tener aspectos comunes y, en este artículo, presentamos dos de esos aspectos: la variación y la transparencia. Estas dos características que los ejemplos presentan pueden ser concertadas de modo que las generalizaciones y abstracciones sean más fácilmente alcanzadas por los alumnos; en particular, mostramos esa simbiosis en el caso del estudio de las funciones cuadráticas.

Sin embargo, ejemplificaciones diferentes producen también tipos de ejemplos diferentes. En el estudio aquí descrito encontramos diferencias importantes que permitieron identificar dos tipologías de ejemplos muy diferentes, aunque con el mismo objetivo e igualmente eficaces.

Palabras clave. Ejemplificación, Variación, Transparencia, Abstracción, Geogebra

A função quadrática: variação, transparência e duas tipologias de exemplos.

Resumo

O uso de exemplos é um recurso do qual todos os professores de matemática se valem para ensinar os conteúdos matemáticos. Ainda que as estratégias metodológicas possam ser muito diferentes, a exemplificação que elas contêm pode ter traços comuns e, neste artigo, apresentamos dois desses traços: a variação e a transparência. Estas duas características que os exemplos apresentam podem ser combinadas de modo que as generalizações e abstrações sejam mais facilmente alcançadas pelos alunos; particularmente, mostramos essa simbiose no caso do estudo das funções quadráticas.

Todavía, exemplificações diferentes produzem também tipos de exemplos diferentes. No estudo que aqui descrevemos encontramos diferenças importantes que permitiram identificar duas tipologias de exemplos muito diferentes, embora com o mesmo objectivo e igualmente eficazes.

Palavras chave. Exemplificação, Variação, Transparência, Abstracção, Geogebra

Para citar: Figueiredo, C. A., & Contreras, L. C. (2013). La función cuadrática: variación, transparencia y dos tipos de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 3, 45-68

© Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). www.seiem.es

The quadratic function: variation, transparency and two types of examples

Abstract

The use of examples is a resource that all mathematics teachers bring into play to teach mathematical content. Although the teaching methods might be very different, the exemplification they include may have some features in common and, in this paper, we present two of those features: the variation and the transparency. These two aspects examples have may be combined in a way that generalization and abstraction can be better achieved by students; in particular, we illustrate this symbiosis in the case of the study of the quadratic function.

However, different exemplifications produce also different kind of examples. In the investigation here presented, we found major differences that allowed us to identify two types of very different examples, though with the same propose and equally effective.

Key words. Exemplification, Variation, Transparency, Abstraction, Geogebra

La función cuadrática: variación, transparencia et deux tipos d'exemples

Résumé

L'utilisation d'exemples est une ressource que tous les professeurs de mathématiques utilisent pour enseigner leurs matières. Même si les stratégies méthodologiques peuvent être très différentes, l'exemplification de celles-ci peuvent avoir des caractéristiques communes et, dans cet article, nous présentons deux de ces aspects: la variation et la transparence. Ces deux aspects que les exemples présentent peuvent être combinés de façon à ce que les généralisations et les abstractions puissent être plus facilement atteintes par les élèves, en particulier nous montrons cette symbiose dans le cas de l'étude des fonctions quadratiques.

Cependant, l'utilisation d'exemplifications différentes produit également des différents types d'exemples. Dans l'étude que nous décrivons ici, nous avons trouvé des différences importantes qui ont permis d'identifier deux types très différents d'exemples, mais avec le même objectif et tout aussi efficace.

Paroles clés. Exemplification, Variation, Transparence, Abstraction, Geogebra

1. Introdução

Como maior ou menor grau de consciência, todo o professor de matemática sabe que os exemplos que utiliza nas suas aulas têm um papel preponderante no ensino, pois a correta aprendizagem dos conceitos em estudo depende da sua escolha de exemplos e do uso que deles fizer. Em geral, no ensino da Matemática, a exemplificação do professor deve permitir que os alunos vejam o que é geral através daquilo que é particular. Zodik e Zaslavsky (2007) indicam alguns estudos onde se destaca o papel da seleção e sequenciação criteriosa dos exemplos e dos não exemplos que estão na base da diferenciação entre os aspetos críticos e os aspetos que não são importantes à construção de conceitos. “Um bom exemplo de ensino deve promover a generalização, isto é, deve realçar os aspetos necessários de um exemplo do caso a ilustrar e ao mesmo tempo indicar aqueles aspetos que são arbitrários e modificáveis” (Zaslavsky, 2010, p. 108).

As programações propostas para a disciplina de Matemática, nos diversos ciclos de ensino, incluem conceitos abstratos e representações que envolvem diferentes graus de generalidade.

A noção de exemplo, e a sua relação com a generalidade, é parte integrante da matemática. [...] qualquer teoria da aprendizagem que não envolva a forma como os alunos e professores tratam com, e sobre, os exemplos estará provavelmente incompleta, pelo menos no que concerne à matemática. (Bills & Watson, 2008, p. 77).

Segundo Watson e Chick (2011),

o uso de exemplos está associado aos diferentes tipos de exemplificação e parece ser de análise, de generalização e de abstração. A análise envolve a procura de relações plausíveis entre elementos de um exemplo, a partir das quais se possam gerar conjeturas. A generalização envolve a descrição das semelhanças entre exemplos, enquanto a abstração vai mais além e classifica exemplos semelhantes, designando a similitude como um conceito ou classe com qualidades próprias. (p. 284).

No sentido de ajudar os nossos alunos a generalizar e a abstrair, o recurso a sequências de exemplos permite que os alunos identifiquem o que existe de comum entre vários casos diferentes ou, noutras situações, permite identificar o que variou entre vários casos que se apresentam como semelhantes. A teoria da variação (Marton & Booth, 1997) diz-nos que os alunos devem experienciar variações nos aspetos críticos de um conceito, dentro de um espaço e tempo limitados, de modo que o conceito possa ser aprendido (Mason, 2011a). Por isso, para que se possa aperceber e compreender a generalidade intrínseca a um exemplo, a questão é sempre “o que pode ser modificado?” e “o que deve permanecer invariante?” de forma a manter-se “um exemplo” (Mason, 2011b).

O papel das representações torna-se essencial ao professor quando lida com objetos matemáticos, quando comunica ideias matemáticas ou quando auxilia na resolução de problemas (Zazkis & Sirotic, 2004). As representações matemáticas apresentam certos aspetos que têm a capacidade de dirigir a atenção do observador para determinadas características dos conceitos matemáticos a que se referem e, para esses aspetos, dizemos que a representação lhe é transparente. Assim, a transparência da representação a um dado aspeto do conceito é algo a ter em consideração quando o professor escolhe e apresenta exemplos, já que os exemplos devem deixar claro ao observador quais são os aspetos do exemplo que o tornam exemplar, permitindo a perceção do geral a partir do particular (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006).

Dar exemplos de conceitos, concretizar definições ou promover generalizações com base em exemplos é uma tarefa quotidiana para o professor de matemática e, contudo, é uma tarefa que nunca se apresenta simples, trivial ou irrefletida. E porque assim é, John Mason, de um modo muito perspicaz, afirma que

Aprender através de exemplos parece paradoxal, porque a fim de se perceber alguma coisa como exemplo de algo, tal como um conceito ou uma técnica, é necessário ter a noção do que se está a exemplificar; mas de forma a se ter a noção do que se está a exemplificar, é necessário ter-se a ideia daquilo que constitui um exemplo. (Mason, 2011b, p. 195).

Abordar a construção de um conceito considerando a variação e a transparência pode ser possível desde diferentes perspetivas ou estratégias metodológicas. O objetivo deste trabalho é mostrar como a utilização de exemplos, por parte de dois professores com experiência, evidencia o papel da variação e da transparência no ensino de alguns aspetos da função quadrática; ainda que, como se verá, as estratégias metodológicas usadas na generalização de alguns conceitos sejam tão diferentes.

Descrito de uma forma breve, este artigo enquadra-se teoricamente numa nova linha de investigação que estuda e descreve a exemplificação do professor de matemática e, mais concretamente, em dois aspetos fundamentais para o ensino e aprendizagem desta disciplina: a variação e a transparência. Para evidenciar o uso da transparência e da variação, decidimos descrever a forma como dois professores com experiência ensinaram noções sobre o conceito de função quadrática aos seus alunos, discutindo as diferentes estratégias metodológicas através das suas diferenças e semelhanças e, por

fim, concluindo sobre aqueles resultados que nos parecem mais importantes dentro do enquadramento teórico proposto.

2. Enquadramento teórico

O uso de exemplos no ensino e aprendizagem da Matemática pode ser separado em dois grandes campos. Podemos usar os exemplos, por um lado, para ajudar os alunos a generalizar ou abstrair conceitos ou, por outro, para exercitar rotinas e procedimentos.

No âmbito da inferência indutiva através do uso de casos particulares, Watson e Chick (2011) explicam aquilo que T. Rowland e O. Zaslavsky designaram por “exemplos para” e “exemplos de” (Rowland & Zaslavsky, 2005 citados por Watson & Chick, 2011), “a relação entre os exemplos e os conceitos tem dois sentidos: ‘um conjunto de exemplos é unificado pela formação do conceito’ (exemplos para) e ‘os exemplos subsequentes podem ser assimilados pelo conceito’ (exemplos de)” (Watson & Chick, 2011, p. 285). Isto é, na prática, podemos apresentar vários *exemplos* de progressões aritméticas *para* que os alunos se apercebam do que é uma progressão aritmética antes que esta seja definida e, também, de um modo diferente, podemos apresentar *exemplos de* funções pares logo após a definição deste tipo de função.

O outro uso de exemplos consiste na utilização de coleções de vários exemplos que, em cada caso, são ilustrativos e permitem a prática, tendo como objetivo possibilitar a fluência e memorização através do ensaio de procedimentos (Rowland, 2008). Os alunos consideram este tipo de exemplos como modelos cuja estrutura genérica deve ser seguida quando confrontados com situações semelhantes.

No que concerne ao presente trabalho, as situações de ensino apresentadas enquadram-se mais no primeiro tipo. Veremos como os professores, fundamentalmente, apresentam aos seus alunos séries de *exemplos para* que eles abstraíam conceitos relativos à função quadrática, mediante o uso simultâneo da variação nos exemplos apresentados e da transparência da representação utilizada.

2.1. A Variação

De uma forma geral, é bem aceite pelos alunos que o professor lhes apresente casos, tradicionalmente chamados exercícios, para que possam praticar sobre os conteúdos a aprender. Para Watson e Mason (2004), praticar pode significar o uso de tarefas repetitivas com o intuito de promover o rigor e a fluência no desempenho de tarefas matemáticas. Muitos dos estudos que tratam o uso de sequências de exemplos sugerem que uma sequência específica de exemplos tem influência na aprendizagem. Em particular, recomenda-se a combinação de conjuntos de exemplos e de não-exemplos no seio das sequências de exemplos, de modo a focar a atenção dos alunos nos aspetos críticos dos exemplos que são relevantes (Bills *et al.* 2006) e, especificamente, o professor pode usar uma sequência de exemplos para ajudar os alunos a encontrarem um padrão subjacente a um fenómeno matemático (Zaslavsky, Harel, & Manaster, 2006).

A teoria da variação (Marton & Booth, 1997; Marton, Runnesson & Tsui, 2003) apresenta um conceito basilar designado como a *dimensão de variação*, que é aquilo que pode ser modificado sem que se altere o sentido geral. Watson e Mason (2005) ampliaram este conceito para a *dimensão de variação possível* para indicar que diferentes pessoas podem identificar diferentes aspetos que possam variar,

acrescentando a noção de *amplitude de mudança permissível* para indicar que aquilo que varia pode ser entendido como variações com amplitudes diferentes, por pessoas diferentes ou em situações diferentes; sendo que, a cada dimensão de variação possível corresponde sempre uma amplitude de mudança permissível. Assim, segundo Mason (2011b), na teoria da variação, aprender é tornar-se consciente daquilo que pode variar (dimensão de variação possível) e/ou da medida da amplitude em que essa variação se pode efetuar (amplitude de mudança permissível), sem que se altere substancialmente as características do objeto. Estar ciente daquilo que existe num dado caso que o transforma num exemplo de algo é crucial para que se possa aprender dele *como* exemplo. Para que a aprendizagem do aluno possa acontecer, ou para que o aluno possa fazer as generalizações pretendidas, o discernimento do aspeto em causa pode ser feito de duas formas: manter o aspeto a generalizar inalterado enquanto tudo o resto varia ou, então, aplicar mudanças no aspeto em causa enquanto tudo o resto se mantém invariante. Pegar num exemplo e proceder a pequenas modificações, alterar esse exemplo de forma que se mantenha exemplo de algo, cria uma coleção de exemplos com *um aspeto em comum* que se considera uma *classe de exemplos* do conceito. Este aspeto em comum é, segundo Watson e Mason (2006) o elemento crítico da teoria da variação, é o aspeto invariante em frente de um pano de fundo em que tudo o resto está a variar. Num contexto de aprendizagem através da construção de exemplos Mason (2011b) afirma que “à medida que se consegue discernir a variação que deixa o conceito invariante, o entendimento do conceito é enriquecido ao mesmo tempo que se expandem as classes de exemplos e se ensaiam as técnicas de manuseamento de exemplos” (p. 196).

No trabalho com os alunos, no que se refere às generalizações e abstrações, cabe ao professor controlar as dimensões de variação possíveis, e as respectivas amplitudes de mudança permitida, como forma de desenhar exercícios eficientes que encorajam os alunos a envolverem-se na estrutura matemática; para além disso, a análise das dimensões de variação possíveis podem indicar as potencialidades e as debilidades dos exercícios dentro de determinadas situações em particular (Watson & Mason, 2004, 2006). A consciência das dimensões da variação possível nos casos apresentados é, essencialmente, a consciência (perceção) da generalidade. Ajudar os alunos a abstrair um conceito matemático é equivalente a ajudá-los a tomar consciência tanto dos aspetos, características, relações e propriedades que são invariantes como, simultaneamente, dos aspetos e características importantes em que se permite variação (Mason, 2005).

A consciencialização das dimensões de variação possível e respetivas amplitudes de mudança permissíveis não deve ser promovida exclusivamente nos alunos. Considerando que não é razoável esperar que os alunos reconstruam todas as dimensões de variação possíveis por si próprios, mesmo com a assistência de exercícios esquematizados cuidadosamente elaborados, será muito vantajoso para os alunos se também os seus professores estiverem eles próprios conscientes e despertos para as diversas dimensões de variação possíveis (Mason & Watson, 2005).

2.2. A transparência

A noção de transparência está fortemente ligada à representação que se utiliza para um qualquer conceito. Uma representação *transparente* é aquela que não tem nem mais nem menos significado que a ideia ou estrutura que representa, enquanto uma

representação *opaca* enfatiza uns aspetos da ideia ou estrutura e atenua outros (Lesh, Behr, & Post, 1987).

Seguindo esta ideia, Zazkis e Gadowsky (2001) afirmam que todas as representações de números naturais são opacas, embora cada uma delas possa apresentar aspetos transparentes. Para ilustrar a afirmação as autoras apresentam várias representações do mesmo número 46656. Assim, 216^2 é transparente à ideia de que 46656 é um quadrado perfeito; 36^3 mostra que 46656 é um cubo perfeito; 3×15552 conclui que 46656 é múltiplo de 3 e de 15552; por último a representação $5 \times 7 \times 31 \times 43 + 1$ indica-nos que 46656 quando dividido por 5, 7, 31 ou 43 tem resto 1.

Ainda no campo dos números, Zazkis e Liljedahl (2004), referem conjuntos de números que compartilham as mesmas propriedades que podem ser representados através de notações algébricas. E dão exemplos. Assim, para qualquer inteiro k , $17k$ é uma representação transparente para os múltiplos de 17, sendo que esta propriedade pode ser vista nesta forma de representar. Todavia, não é possível determinar se $17k$ é múltiplo de 3 quando consideramos apenas esta representação, por isso dizemos que esta representação é opaca quanto à divisibilidade por 3.

A noção de representação transparente não é um conceito ligado apenas aos números. Zaslavsky e Lavie (2005) apontam aspetos transparentes das representações de funções, mais precisamente, no caso de funções quadráticas representadas pelas suas equações. Vejam-se os exemplos de funções quadráticas que Zaslavsky e Lavie (2005) sugerem:

$$y = (x-1)(x-3) \quad y = (x-1)^2 - 4 \quad y = x^2 - 2x - 3$$

Com algum cálculo elementar facilmente se deduz que são três equações da mesma função quadrática. Porém, cada uma delas é mais transparente a determinado aspeto e mais opaco a outros. Assim, a primeira equação é transparente às raízes da função, enquanto a segunda é transparente às coordenadas do vértice da parábola que a função define e, por fim, a terceira é transparente à intersecção da parábola com o eixo dos yy .

Mas a possibilidade de que esta transparência seja evidente para os alunos requer, por parte do professor, alguma orientação para que eles possam ler ou interpretar as expressões. Por isso, a função que os exemplos desempenham nessa orientação é fundamental. Será com os exemplos, ou com sequências deles, que os alunos poderão aperceber-se daquilo que varia e do que não varia, orientando a sua atenção para as generalizações que se pretende sejam alcançadas.

Mais recentemente, a noção de transparência de uma representação foi dividida em *transparência imediata* e *transparência mediata* (Figueiredo, 2010; Blanco, Figueiredo, Contreras, & Mellado, 2010) relativamente a algumas representações do conceito de função. A transparência imediata (ou direta) coincide com a ideia de transparência que foi descrita anteriormente, enquanto a transparência mediata (ou indireta) permite identificar aspetos relativos às funções a partir dos elementos proporcionados pela transparência imediata. Ainda assim, o conceito de transparência mediata não se confina às representações de funções, como exemplo, a representação da progressão geométrica

$u_1 = -2 \wedge u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ é imediatamente transparente ao primeiro termo e à razão da progressão, $u_1 = -2$ e $r = \frac{1}{3}$, mas é mediata transparente à monotonia, é monótona crescente porque o primeiro termo é negativo e a razão é positiva e menor

que 1. No âmbito dos números complexos, a equação $|z-1|=|z-i|$ é imediatamente transparente à ideia de reta bissetriz do segmento de reta de extremos nos afixos de $z_1=1$ e $z_2=i$ e é imediatamente transparente a, digamos, dois aspetos: que essa reta coincide com a bissetriz dos quadrantes ímpares e que todos os complexos cujos afixos constituem a reta têm todos o mesmo argumento principal, que é igual a $\frac{\pi}{4}$. Também no caso dos aspetos que podem ser obtidos através da transparência mediata, a sua evidência não é natural para o aluno e também aqui a função do professor é crucial para que os alunos possam generalizar sobre expressões genéricas (por exemplo $|z-z_1|=|z-z_2|$), possibilitando que, em cada particularização, se possam obter aspetos mediatos que lhes são próprios.

Por tudo o que se expôs, reveste-se de uma importância crucial que os professores tenham em consideração as estruturas de representação de conceitos que utilizam, de forma que os alunos possam ver nas representações que se lhes apresentam aquilo que os seus professores veem e que constatem os aspetos aos quais a representação é transparente. Para isso fica a sugestão de Zazkis (2005, p. 216), “... se queremos que os alunos vejam o que nós vemos, podemos começar por simplesmente lhes pedir para *olharem* e, depois, para *olharem outra vez*” (o itálico é nosso), com o objetivo de se garantir que o aluno veja aquilo que o professor pretende que seja visto, já que muitas vezes os alunos não veem nos exemplos apresentados aquilo que o professor pretende que eles vejam.

Em suma, no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática devemos ter presente que “Capitalizar as potencialidades de uma dada representação é uma componente importante para a compreensão das ideias matemáticas” (Lesh, Behr, & Post, 1987 citados por Zazkis & Gadowsky, 2001, p.50), tendo como objetivo ajudar os nossos alunos a reconhecer padrões nas diversas representações, nos casos em que considerar esses padrões se mostre fundamental (Zazkis & Gadowsky, 2001, p.50).

2.3. A variação e a transparência inerentes à representação $f(x) = a(x-h)^2 - k$

A representação $f(x) = a(x-h)^2 - k$ apresenta três dimensões de variação possível que os professores podem focar. Cada dimensão está associada aos parâmetros a , h e k , e influem no sentido da concavidade e abertura, nas translações horizontais do gráfico e nas translações verticais do gráfico, respetivamente. Note-se que se pode considerar a translação oblíqua do gráfico como sendo uma composição entre uma translação horizontal e uma vertical. As respetivas amplitudes de mudança permissível são, no caso das dimensões relativas a h e a k , todo o conjunto dos números reais e, no caso do parâmetro a , qualquer número real não nulo.

Quanto à transparência desta representação, como já foi referido no enquadramento teórico e se verá mais detalhadamente adiante, é transparente às coordenadas do vértice da parábola definida e também ao sentido da concavidade.

3. O estudo

O estudo que aqui se relata é parte de uma investigação maior que incide sobre a forma como os professores de matemática do ensino secundário escolhem e usam os exemplos quando ensinam o conceito de função. Todavia, para a parte da investigação

aqui relatada, o conteúdo que serviu de base às aulas observadas foi a função quadrática e as noções incluídas neste tema vinculam-se com o estudo dos aspetos relativos às funções da forma $f(x) = a(x-h)^2 - k$. Assim, a programação prevê o estudo deste tipo de funções, e também do seu gráfico, quanto às coordenadas do vértice, contradomínio, sentido da concavidade, monotonia, eixo de simetria, zeros e sinal. É de salientar que este tema está inserido dentro de um capítulo dedicado às funções, sendo que os temas anteriores foram dedicados ao estudo de generalidades sobre funções, estudo dos seus gráficos e estudo da função afim. Em particular, sobre funções de 2º grau, os alunos já tinham tomado contacto com as funções quadráticas da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, nomeadamente no que se refere ao estudo das raízes, do sinal e do sentido da concavidade.

O foco deste artigo aponta para a análise da forma como são usadas a transparência e a variação nos exemplos utilizados por dois professores para ensinar o conceito de função quadrática através de duas estratégias metodológicas diferentes, uma com traços mais tradicionais e a outra utilizando *Geogebra*. Em particular, pretende-se encontrar e realçar os aspetos que são comuns e os aspetos que são diferentes quando se usa uma dada representação da função quadrática, considerando a variação e a transparência presentes nas duas propostas metodológicas.

O estudo maior pode ser visto como um conjunto de casos de estudo relacionados entre si por uma linha de investigação comum, a seleção e uso de exemplos no ensino da matemática; a metodologia de investigação é de cariz marcadamente qualitativo e cujo desenho segue os princípios da Grounded Theory (Stauss & Corbin, 1990), baseado na alternância entre interrogações e comparações e que levou à construção de um sistema de categorias que permite estudar determinados aspetos da exemplificação do professor sobre o conceito de função. Para esta parte do estudo selecionaram-se dois professores com mais de dez anos de experiência que lecionaram o mesmo conteúdo a alunos da mesma faixa etária, embora com estratégias metodológicas diferentes. O critério de seleção destes dois professores foi, justamente, o facto do conteúdo lecionado por ambos ter sido a função quadrática.

O material que se recolheu inclui todos os exemplos que foram usados para ensinar a função quadrática, as notas obtidas pela observação das aulas correspondentes e as gravações em vídeo de algumas dessas aulas. Esse material não foi considerado na sua totalidade para este trabalho, apenas aquele em que o uso da transparência e da variação se mostrou relevante e, de algum modo, significativo para a generalização e abstração de conceitos.

3.1. Os professores

Eva é professora de Matemática na Escola Secundária de D. Sancho II em Elvas e quando assistimos às suas aulas, tinha pouco mais de 10 anos de experiência docente. A sua formação académica e profissional foi obtida com a Licenciatura em Ensino da Matemática na Universidade de Évora, em Portugal.

Pessoalmente, Eva é uma pessoa simpática, afável, muito franca e preocupada com o percurso escolar dos seus alunos. Estes retribuem-lhe respeito e uma certa cumplicidade, nota-se na relação que Eva estabelece com os seus alunos que existe uma verdadeira comunicação e que o ambiente que se vive nas aulas é propício ao ensino e a aprendizagem da Matemática. Enérgica e decidida, transporta para as aulas estes dois traços de personalidade. Gosta das coisas “à sua maneira” e as suas aulas decorrem

segundo as suas regras, umas explícitas e outras implícitas. Uma das suas características mais evidentes é a exigência, para com os alunos e para com ela própria. E esta característica é sempre acompanhada pelo rigor que implementa no seu discurso matemático e de que gosta seja espelhado pelo discurso matemático dos seus alunos.

António é um professor que ensina matemática há 25 anos. Tal como Eva, exerce a sua profissão na Escola Secundária de Elvas e a sua formação académica e profissional também foi obtida com a Licenciatura em Ensino da Matemática na Universidade de Évora.

Nas suas aulas, António utiliza um discurso rigoroso sem que, no entanto, se torne demasiado hermético aos alunos, conseguindo um equilíbrio entre o rigor matemático e a adequação ao nível etário e desenvolvimento matemático dos seus alunos. O recurso às TIC é um elemento do seu quotidiano e esforça-se por integrar as tecnologias de forma adequada ao trabalho que desenvolve com os alunos. Quando ensina, António alterna entre a explicação da matéria e o trabalho autónomo dos alunos, procurando que as aulas não sejam demasiado expositivas mas em que, ao longo de cada aula, haja sempre novas contribuições teóricas que suportem o trabalho mais prático. O ambiente que cria nas aulas permite aos seus alunos trabalhar de forma autónoma, fundamentalmente aos pares de alunos, sendo que no final das várias atividades práticas é sempre feita uma síntese dos aspetos mais importantes. Tal como Eva, António também tem especial atenção à forma como os seus alunos comunicam matematicamente, tanto na forma verbal como na forma não verbal.

3.2. A utilização dos exemplos

Os elementos recolhidos nas aulas de ambos os professores foram analisados pelas perspetivas descritas no enquadramento teórico. Deu-se especial atenção à forma como os exemplos foram trabalhados e, naquele âmbito, como foi dada ênfase aos aspetos relativos à variação e à transparência. Ainda assim, sobre a utilização dos exemplos há que distinguir duas vertentes, a utilização dos exemplos com o objetivo de apresentar conteúdos e noções relativas à função quadrática, bem como a utilização prática de exemplos que o professor propõe aos seus alunos. Nas descrições que seguem, serão apresentados alguns exemplos (ou sequências deles) utilizados pelos dois professores no ensino da função quadrática, evidenciando a forma como os professores enfatizam o papel da variação e da transparência no seu modo de lecionar.

3.2.1. A professora Eva

Para iniciar o tema, a professora propôs aos seus alunos uma primeira atividade, que foi realizada pelos alunos com o recurso à máquina de calcular gráfica. Como esta atividade foi proposta para introduzir o tema, todos os exemplos foram tratados no quadro através de um diálogo entre a professora e os seus alunos. No final, os alunos obtiveram três referenciais com três parábolas cada um. No primeiro referencial representaram três parábolas que diferiam através de translações verticais; no segundo, figuram três parábolas que diferem por intermédio de três translações horizontais; e finalmente, o terceiro referencial mostra três parábolas com o mesmo vértice mas com aberturas e sentido das concavidades diferentes. No fim de cada item, com o incentivo da professora, os alunos puderam reconhecer como as translações horizontais dependiam do parâmetro h , as translações verticais do parâmetro k e a abertura e sentido da concavidade de pendiam do parâmetro a . Em termos da teoria da variação, a

professora trabalhou cada uma das três dimensões de variação possível que a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ suporta.

Reflexão /Discussão

1. Seja $a = 2$ e $h = 3$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $k = -3$, $k = 0$ e $k = 4$.
Explique o efeito no gráfico de f devido à alteração de k na fórmula que define a função.

2. Seja $a = 3$ e $k = -2$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $h = -2$, $h = 0$ e $h = 5$. Explique o efeito no gráfico de f devido à alteração de h na fórmula que define a função.

3. Seja $h = 1$ e $k = -3$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $a = -2$, $a = -1$ e $a = 0,5$.
Explique o efeito no gráfico de f devido à alteração de a na fórmula que define a função

$f(x) = a(x-h)^2 + k$.

4. Indique as coordenadas do vértice das parábolas definidas por expressões da forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

Figura 1. Atividade E1

O quarto ponto da atividade teve como objetivo que os alunos percebessem a generalidade que a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ transmite no que se refere às coordenadas do vértice da parábola.

Esta tarefa proporcionou aos alunos, através da variação adequada, uma compreensão do significado dos parâmetros h , k e a na expressão, como influem no gráfico, e, por isso, a razão pela qual as coordenadas do vértice são $V(h;k)$.

A sequência de exemplos que foram propostos como segunda atividade teve como fim a aplicação da generalidade anteriormente obtida a casos particulares:

Determine, em cada caso, e sem recurso à máquina de calcular, as coordenadas do vértice da parábola definida por

1. $f(x) = (x-3)^2$
2. $g(x) = -2(x-3)^2$
3. $h(x) = -2(x-3)^2 + 4$

Figura 2. Atividade E2

Estes três exemplos foram apresentados como particularizações da expressão geral obtida com a atividade anterior. Note-se o cuidado tido pela professora em modificar apenas um aspeto da equação de caso para caso, isto é, fazer modificações em apenas uma das três dimensões de variação possível de cada vez, encaixando perfeitamente naquilo que é fundamental na aplicação da teoria da variação.

A terceira atividade que os alunos desenvolveram já utilizou, de novo, a calculadora gráfica e envolve os alunos no estudo de vários aspetos da função quadrática através da visualização da parábola, como se pode observar na Figura 3.

Esta atividade foi realizada de forma autónoma pelos alunos, tendo a professora assumido um papel menos ativo, limitando-se a esclarecer alguma dúvida quando

solicitada. No final da resolução de cada item foram evidenciados pela professora os aspectos considerados importantes.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora gráfica esboce o gráfico das seguintes funções quadráticas e indique as coordenadas do vértice, o sentido da concavidade, o eixo de simetria, o contradomínio, os intervalos de monotonia e o tipo de extremo (máximo ou mínimo).

1. $f(x) = (x + 4)^2$

2. $g(x) = x^2 - 6$

3. $h(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$

4. $t(x) = -2(x - 3)^2 + \frac{4}{3}$

Figura 3. Atividade E3

O objetivo desta sequência de exemplos consistiu em levar os alunos a perceber que o eixo de simetria, o contradomínio, os intervalos de monotonia e o tipo de extremo dependem das coordenadas do vértice e do sentido da concavidade. Esta sequência parece ser diferente das anteriores dado que tudo varia e nada permanece invariante de caso para caso, porém, pode-se observar que nos três primeiros casos a concavidade permanece voltada para cima, as coordenadas dos vértices têm uma coordenada nula nos dois primeiros casos e nenhuma coordenada nula no terceiro. O quarto caso é idêntico ao terceiro, mas com a concavidade voltada para baixo. Desta forma, a professora percorreu todas as dimensões de variação possível, dando aos alunos a possibilidade de verificar que as coordenadas do vértice e o sentido da concavidade determinam sempre o eixo de simetria, o contradomínio, os intervalos de monotonia e o tipo de extremo. Quando parece que tudo varia, existe algo que permanece invariante, justamente, a relação que existe entre todos estes aspectos da função quadrática.

Por fim, como última atividade sobre este tema, a professora Eva pede aos seus alunos que trabalhem uma sequência de exemplos idêntica à anterior, mas, novamente, sem recorrer à calculadora gráfica:

Analicamente, para cada um dos casos seguintes, determine as coordenadas do vértice e o sentido da concavidade das parábolas e, depois, indique o eixo de simetria, o contradomínio, os intervalos de monotonia e o tipo de extremo (máximo ou mínimo).

1. $f(x) = (x - 2)^2$

2. $g(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

3. $h(x) = -\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{4}$

4. $t(x) = \frac{1}{7}\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{2}{7}$

Figura 4. Atividade E4

Outra vez de forma autónoma, os alunos puderam aplicar em casos novos aquilo que puderam generalizar através da atividade anterior. Apenas com alguma ajuda pontual da professora aos quatro ou cinco alunos que evidenciaram alguma dificuldade, pôde ser observado que a maioria dos alunos foi capaz de determinar o eixo de simetria,

o contradomínio, os intervalos de monotonia e o tipo de extremo somente a partir das coordenadas do vértice e do sentido da concavidade, não necessitando recorrer ao gráfico da função.

No fim desta quarta atividade, de uma maneira geral, os alunos puderam indicar os vários aspetos das quadráticas sem recorrer ao gráfico, fazendo-o apenas pelas coordenadas do vértice e observando o sentido da concavidade, o que permitiu à professora concluir que os seus alunos conseguiram identificar os vários aspetos aos quais a representação genérica $f(x) = a(x-h)^2 + k$ é transparente.

3.2.2. O professor António

De forma diferente, este professor apresentou aos seus alunos uma aplicação de Geogebra que apresenta o gráfico de uma função quadrática definida à custa da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$, em que os parâmetros h, k e a são passíveis de serem variados através de três botões.

O aspecto da aplicação inicialmente apresentado é o seguinte:

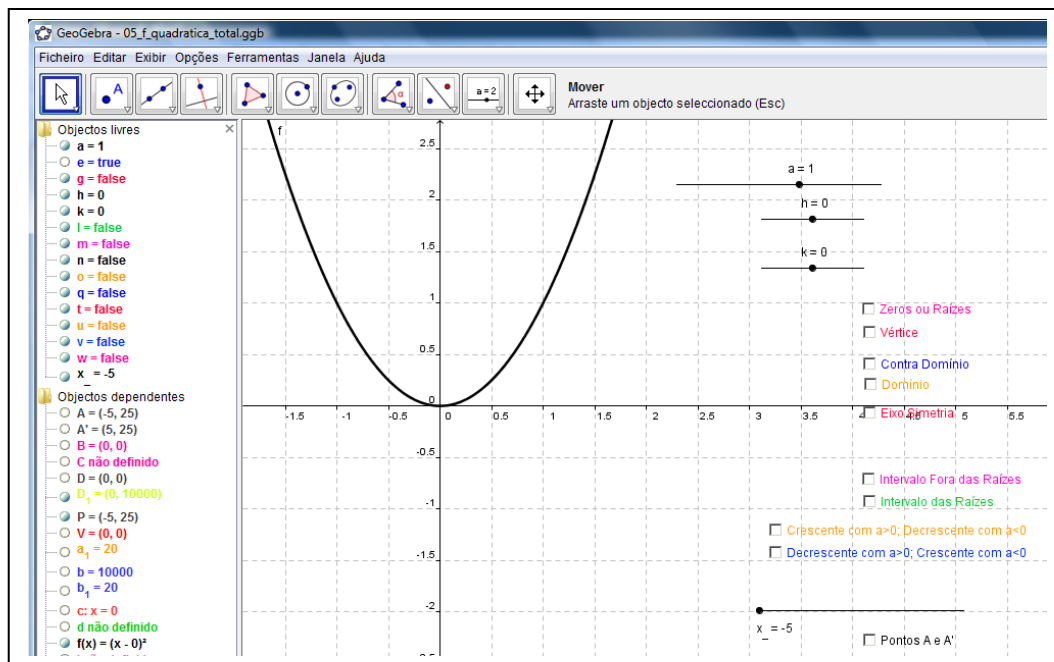


Figura 5. Aspeto geral da aplicação

A aplicação que foi apresentada tem ainda a particularidade de se poder escolher qual ou quais os aspetos da parábola que se pretende sejam apresentados. Como se pode observar na Figura 5, existem uns quadrados pequenos onde se pode seleccionar a apresentação dos zeros, do vértice, o contradomínio, até aos intervalos de monotonia.

No início da atividade o professor informou os alunos que os gráficos que iriam visualizar seriam obtidos de funções quadráticas do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e que os valores de a, h e k podiam ser introduzidos na aplicação através dos botões. Ao correr a aplicação o gráfico apresentado é o da Figura 5, com $a = 1$ e $h = k = 0$, e o professor escreveu no quadro a quadrática correspondente $y = x^2$, mas informou que as expressões analíticas que definem as sucessivas parábolas podem ser vistas, em cor negra, na zona inferior esquerda da aplicação.

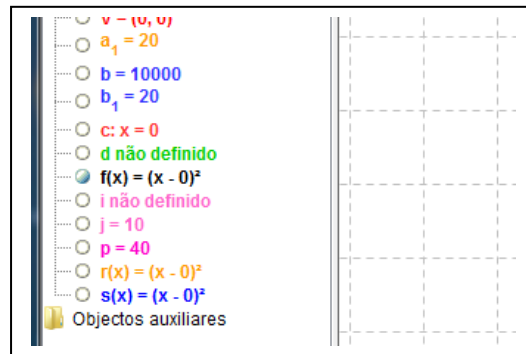


Figura 6. Equação inicial $f(x) = (x - 0)^2$

Ao variar o parâmetro h , pelo arrastamento do botão respetivo, os alunos puderam presenciar uma animação do gráfico. Ao arrastar-se o botão a parábola *deslocou-se* para a direita e para a esquerda, produzindo um efeito de movimento. Enquanto mostrava aos alunos o aspeto animado da aplicação, o professor António deteve-se em três valores de h e chamou a atenção dos alunos para esse facto. Foram eles os valores 1, -1 e 2, obtendo os seguintes gráficos:

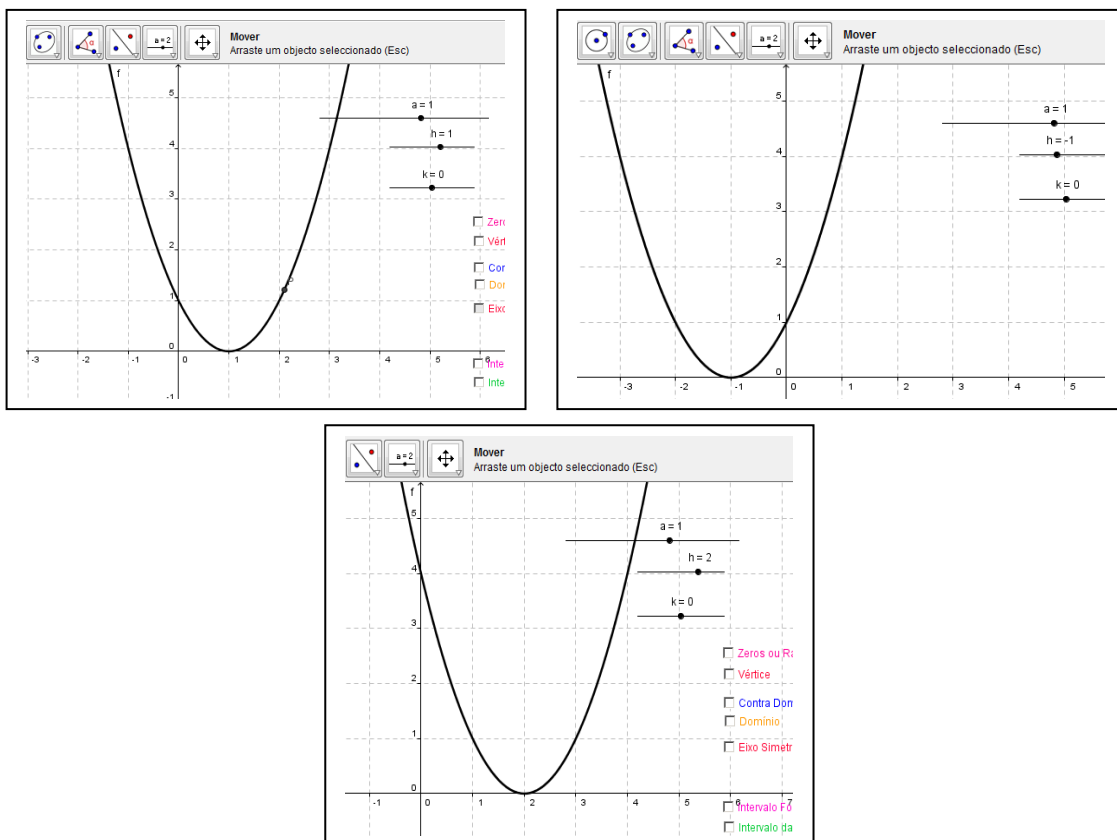


Figura 7. Parábolas obtidas para h igual a 1, -1 e 2

Depois de fazer variar os valores do parâmetro h , António perguntou qual o efeito que tal mudança tinha produzido no gráfico. A grande maioria dos alunos respondeu que a variação dos valores tinha produzido translações horizontais.

Ao assegurar que todos os alunos tinham identificado a relação entre as translações horizontais, o professor focou a atenção dos alunos para a outra dimensão de variação

possível, arrastando o botão relativo a k , e os alunos não tiveram dificuldade em relacionar a variação do parâmetro k com as translações (movimentos) verticais que sucessivamente se obtiveram.

Como segunda atividade, o professor propôs que se ativasse a visualização do vértice da parábola enquanto se variavam simultaneamente os parâmetros h e k , pedindo aos alunos que, para cada variação destes valores, os alunos escrevessem as coordenadas do vértice. Um dos vários gráficos obtidos foi:

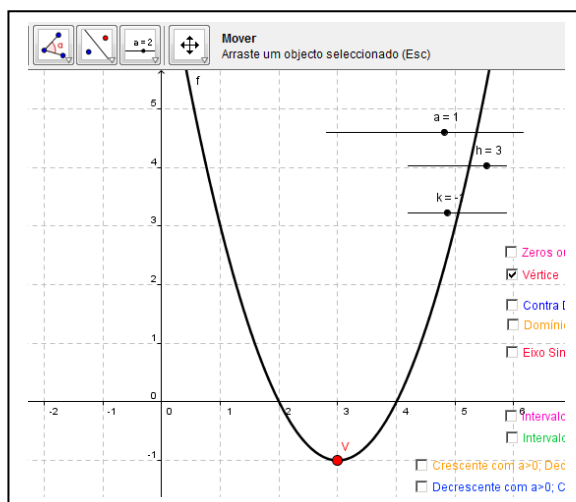


Figura 8. Coordenadas do vértice

Para finalizar esta etapa do tema, o professor pediu aos alunos que relacionassem as coordenadas do vértice com os valores atribuídos aos dois parâmetros e a conclusão dos alunos foi imediata e correta: a primeira coordenada do vértice corresponde ao valor atribuído a h e a segunda coordenada do vértice corresponde ao valor atribuído a k . Para se certificar que os alunos tinham generalizado esta relação, foi pedido aos alunos que realizassem autonomamente a atividade:

Indique quais as coordenadas dos vértices das parábolas definidas pelas equações

1. $f(x) = x^2 + 3$
2. $g(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$
3. $h(x) = (x + 2)^2 - 5$
4. $f(x) = (x - h)^2 + k$

Figura 9. Atividade A1

Nesta sequência de exemplos pode-se observar que o professor usa duas dimensões de variação possível, uma translação horizontal, uma vertical e uma combinação das duas que representa uma translação oblíqua. O facto interessante da sequência radica no último item, já que foi nele que o professor apresentou aos alunos a possibilidade de generalização e, desta forma, ficar estabelecida a transparência desta representação às coordenadas do vértice.

Tendo ficado por tratar a terceira dimensão de variação possível, o professor passou a variar o parâmetro a mantendo constante os parâmetros h e k . Assim, o professor

Antônio manteve $h=1$ e $k=-2$, procedendo à variação de a . O que foi dado a observar aos alunos consistiu numa parábola que, mantendo o vértice na mesma posição, *expandia, contraía* e alterava o sentido da concavidade, parecendo um “desenho animado”. De uma forma simples, foi referida a amplitude de mudança permissível, pois foi referido que a variação deste parâmetro poderia ser qualquer valor negativo ou qualquer valor positivo, mas nunca poderia assumir o valor zero, pois que a função deixaria de ser uma quadrática.

Vejam-se dois dos vários gráficos que puderam ser obtidos com apenas a variação do parâmetro a :

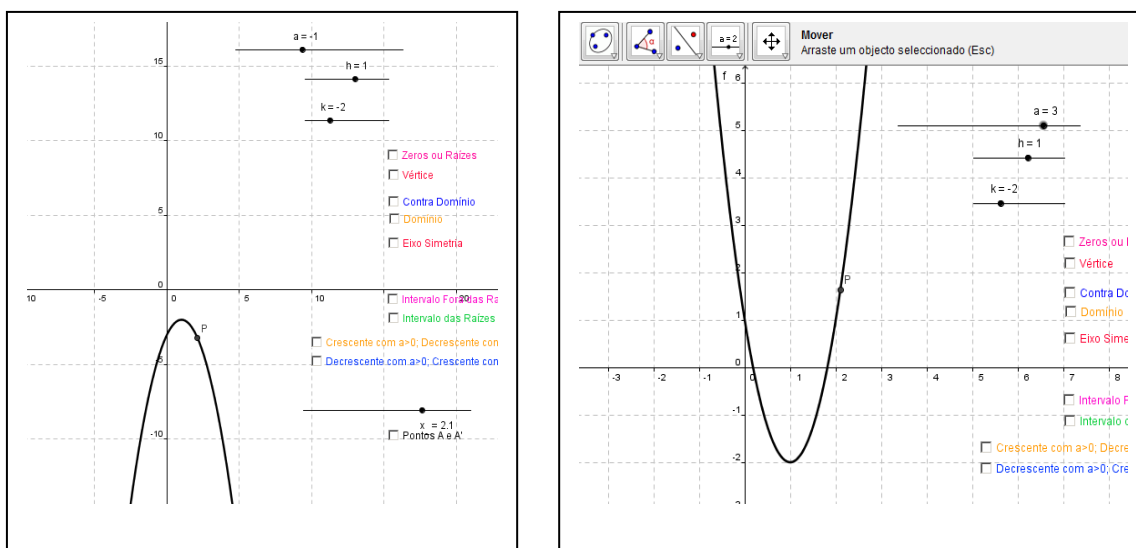


Figura 10. Parábolas obtidas para a igual a -1 e 3

Após a visualização dos vários gráficos, os alunos puderam estabelecer que o valor do parâmetro a alterava o sentido da concavidade e a abertura do gráfico e, todavia, as coordenadas do vértice permaneceram invariantes. Desta forma o professor ampliou a generalidade da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ às três dimensões de variação possível e, conseqüentemente, ampliou a transparência da representação às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade do gráfico.

Seguidamente, o professor propôs aos alunos uma nova atividade. Os alunos podiam voluntariar-se para explorar a aplicação relativamente aos quatro aspetos que iam ser estudados:

1. Eixo de simetria
2. Contradomínio
3. Intervalos de monotonia
4. Tipo de extremo: máximo ou mínimo

O professor impôs duas condições, que o vértice estivesse ativado e que cada aspeto fosse tratado isoladamente.

Como exemplos apresentam-se:

1. Dois dos gráficos relativos ao estudo do eixo de simetria:

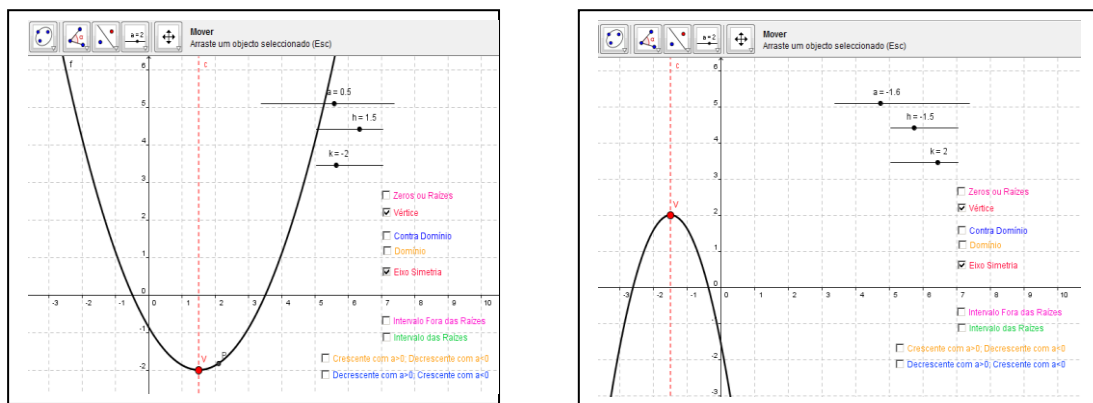


Figura 11. Visualização do eixo de simetria

o eixo de simetria é visível a tracejado vermelho e a passar pelo vértice.

2. Dois gráficos relativos ao estudo do Contradomínio:

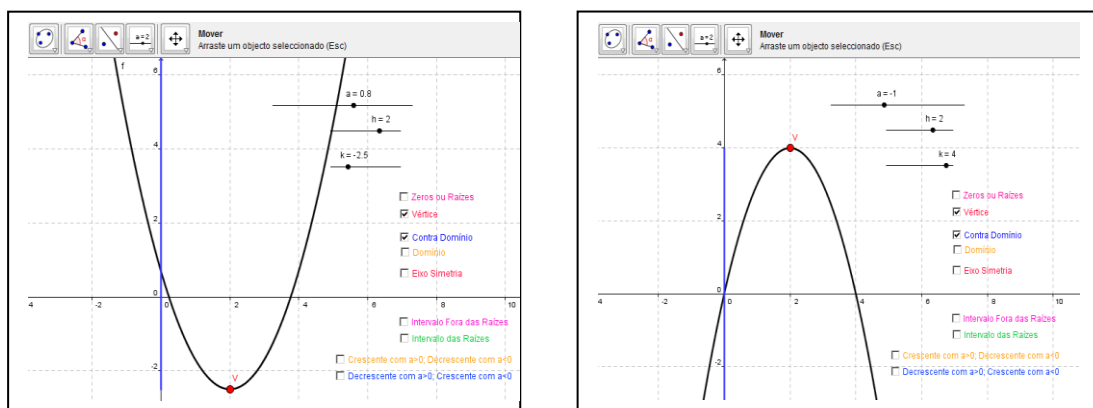


Figura 12. Visualização do contradomínio

a indicação do Contradomínio pode ver-se a azul no eixo dos yy .

3. Dois gráficos relativos ao estudo dos intervalos de monotonia

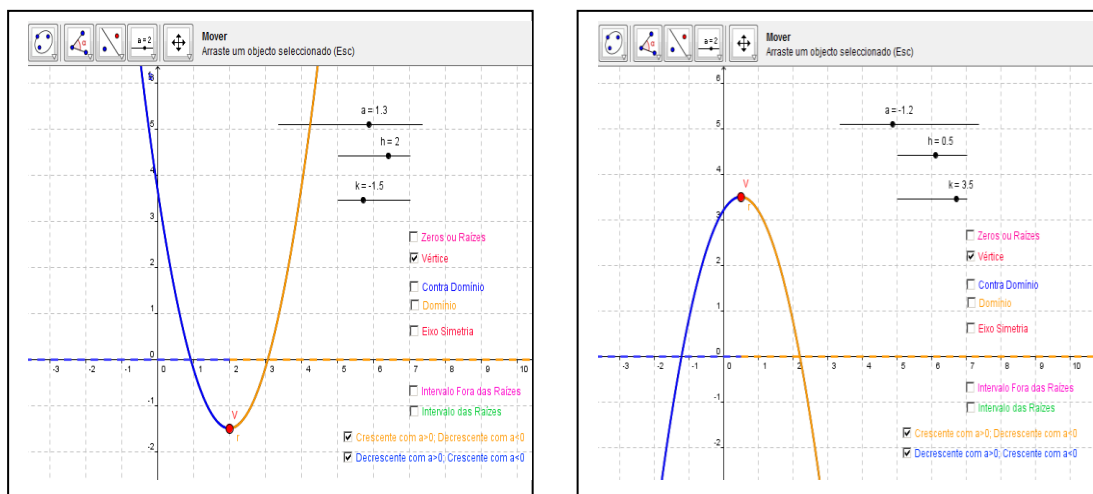


Figura 13. Visualização dos intervalos de monotonia

Los intervalos de monotonia estao representados no eixo dos xx e correspondem aos troços crescente e decrescente na parábola, a laranja e a azul.

4. O tipo de extremo foi tratado diretamente com as parábolas e somente com o vértice ativado.

Ao serem tratadas uma dimensao de variaao possível de cada vez, os alunos tiveram a oportunidade de focar a sua atenao em apenas um dos aspetos a tratar e, assim, relacioná-lo mais facilmente as coordenadas do vértice.

Não foram observadas dificuldades nas generalizaoes obtidas pelos alunos. Facilmente os alunos verificaram que a primeira coordenada do vértice (parâmetro h) determina a equaao do eixo de simetria e os extremos finitos dos intervalos de monotonia, enquanto a segunda coordenada (parâmetro k) determina o extremo finito do contradomínio. Por outro lado, durante a exploraao de cada aspeto, os alunos notaram que os vários aspetos a estudar se alteravam consoante a parábola estava voltada para cima ou voltada para baixo, identificando a influência do sentido da concavidade no tipo de extremo (máximo ou mínimo), no contradomínio e nos intervalos de monotonia (ser crescente ou decrescente em $]-\infty; h]$ e em $[h; +\infty[$).

Para finalizar, o professor Antnio pediu aos alunos que indicassem o eixo de simetria, o contradomínio, os intervalos de monotonia e o tipo de extremo do gráfico de algumas quadráticas, agora sem a ajuda da aplicaçao *Geogebra*. Os primeiros exemplos foram retirados do manual adotado e o último foi por ele adicionado:

1. $f(x) = 3x^2 - 27$
2. $g(x) = (x + 2)^2$
3. $h(x) = (x - 1)^2 + \frac{3}{2}$
4. $s(x) = -x^2 - \frac{1}{4}$
5. $t(x) = -5(x - 2)^2 - 8$
6. $u(x) = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}$
7. $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Figura 14. Atividade A2

Durante a resoluao dos cinco primeiros exemplos o professor assistiu alguns alunos que solicitaram a sua ajuda, mas sem que se notassem dificuldades de maior.

 interessante reparar que, tmbem nesta sequência de exemplos, o professor incluiu o caso mais geral dado pela expressao $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Todavia, ao contrário dos outros itens, a resoluao no quadro do item 7, o caso geral, revelou-se mais discutida porque alguns dos alunos não tiveram a preocupaao de separar os casos em que o parâmetro a  positivo ou  negativo, obrigando o professor a regressar  aplicaçao para que não restassem dvidas.

4. Discussão

Embora as estratégias metodológicas sejam diferentes, uma baseada na calculadora gráfica e a outra no programa *Geogebra*, a utilização da variação para conseguir que os alunos generalizem é um fator comum a ambas. Um aspecto chave em ambas as metodologias foi o uso da representação gráfica da função para melhor se perceber a variação e, por esse meio, deu-se sentido a cada um dos parâmetros da representação analítica. No final do processo, os alunos puderam conceptualizar a representação analítica da função quadrática $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e perceber como os parâmetros, em qualquer exemplo, influenciam a parábola definida sem que seja necessária a sua visualização.

Como se verá nas linhas que se seguem, no que respeita à generalização de conceitos, a variação e a transparência trilham o caminho lado a lado, sendo a transparência da representação importante para que os alunos possam “ver” a variação e, por seu lado, que a variação é fundamental à percepção daquilo a que a representação é transparente.

Para que os resultados que se obtiveram deste estudo possam ser melhor discutidos, decidimos estabelecer as semelhanças e as diferenças encontradas entre as duas estratégias metodológicas, porque também foi deste modo que os resultados naturalmente surgiram.

4.1. Semelhanças entre as metodologias

Nas metodologias utilizadas pelos dois professores, pôde ser observado que o primeiro objetivo a ser concretizado pelos alunos foi a identificação das coordenadas do vértice das parábolas definidas por expressões do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Para isso, o papel da variação foi fundamental para que os alunos pudessem generalizar sobre as coordenadas do vértice da parábola; ao identificarem as coordenadas do vértice em qualquer caso os alunos aperceberam-se da transparência desta representação da função quadrática, mostrando que a generalização que alcançaram vem juntamente com a percepção da transparência imediata da representação.

Após perceberem a transparência imediata da representação $f(x) = a(x-h)^2 + k$, os alunos estão preparados para relacionar as coordenadas do vértice da parábola e o sentido da sua concavidade com os outros quatro aspetos aos quais a representação não é imediatamente transparente. Também aqui se nota a semelhança de estratégias adotadas pelos dois professores, é com base na variação que os professores possibilitam que os alunos generalizem sobre o contradomínio, o eixo de simetria, os intervalos de monotonia e a natureza do extremo com base nos dois aspetos imediatamente transparentes.

Nestas duas etapas, a variação é apresentada aos alunos de uma forma analítica – fazendo variar na expressão genérica os parâmetros a , h e k – mas que tem repercussões gráficas. É natural que assim tenha sido, já que todos os aspetos em estudo são características da parábola, mas as generalizações que os alunos alcançaram verificam-se quando eles conseguiram determinar estes aspetos sem o recurso ao gráfico da função, apenas com base nas duas transparências da expressão analítica da função quadrática.

A estratégia comum é composta por dois passos e duas generalizações ou, se quisermos, dois passos e duas transparências, sendo representável pelo esquema apresentado na *Figura 15*.

Em síntese:

- i. A transparência da representação permite que a variação seja notada pelos alunos e a variação permite que os alunos possam “ver” todos os aspectos aos quais a representação é imediata e mediata transparente.
- ii. As generalizações e a capacidade de “ver” os aspectos aos quais a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ é transparente são obtidas pelos alunos de forma simultânea, correspondendo a cada generalização um aspecto ao qual a expressão é transparente.
- iii. A simbiose entre a variação e a transparência é um elemento chave para que os alunos abstraíam sobre a função quadrática na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

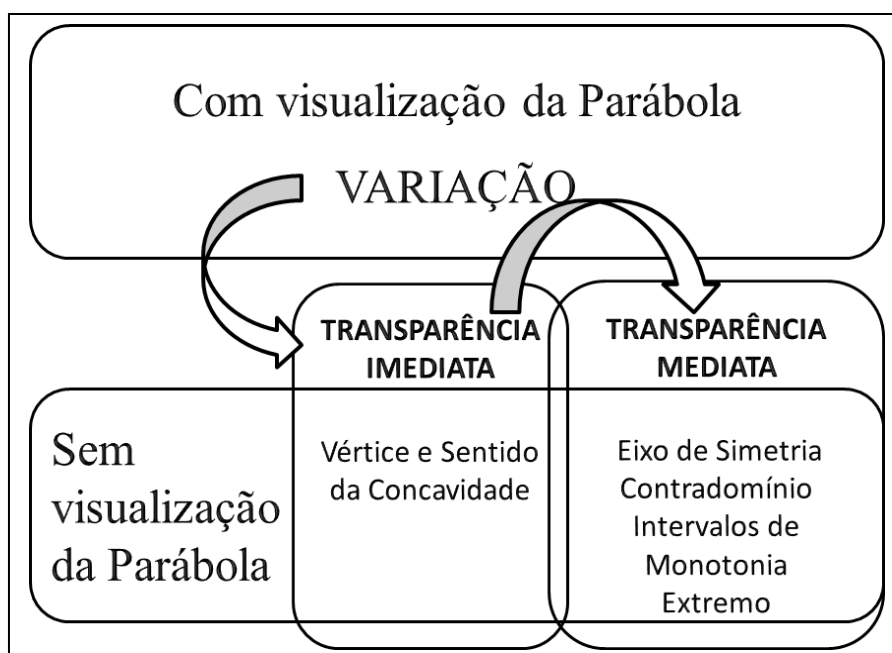


Figura 15. A estratégia comum aos dois professores

4.2. Diferenças entre as metodologias

A principal diferença na forma de obter a variação está nos meios utilizados, com a apresentação de seqüências de exemplos, no caso da professora Eva, e com a animação produzida pela aplicação de *Geogebra*, no caso do professor António. Embora o professor António use seqüências de exemplos, a função das seqüências é de controlo, enquanto no caso da professora Eva a função é veicular a variação, sendo usadas como parte do processo de generalização. É nas seqüências apresentadas pela professora Eva onde melhor se observa a essência da teoria da variação, a mudança de um aspecto à frente de um fundo invariante; nas seqüências do professor António este aspecto, embora presente, não é tão evidente.

Na perspectiva dos alunos, uns perceberam a variação tratando sequências de exemplos de parábolas imóveis e os outros viram, literalmente, parábolas em movimento. Como se fosse uma série de diapositivos, nuns, e um filme, noutros. Sem dúvida alguma, podemos falar que existiu uma forma de exemplificação em cada professor, todavia bastante diferentes.

O papel dos alunos na sua própria aprendizagem é diferente. Nos alunos da professora Eva a sua participação é mais ativa, pois tiveram que ser eles a trabalhar com a máquina de calcular para que pudessem visualizar as parábolas. No caso dos alunos do professor António o seu papel foi mais passivo, bastando-lhes ter observado o que aconteceu na tela e, talvez por isso, em determinado momento, o professor tenha sugerido que fossem eles próprios a explorar a aplicação.

Este estudo permitiu identificar dois exemplos com tipologias totalmente diferentes, os *exemplos estáticos* e os *exemplos dinâmicos*. A exemplificação utilizando exemplos estáticos pode ser desenvolvida com o recurso a lápis e papel, a quadro e giz, ao manual ou com a utilização de uma calculadora gráfica; por outro lado, a exemplificação com a utilização de exemplos dinâmicos requer a utilização de recursos informáticos ou a utilização muito específica de certas calculadoras gráficas. Esta diferença na utilização dos recursos tecnológicos remete-nos para um conhecimento que começou a ser estudado recentemente, o conhecimento didático do conteúdo tecnológico (e.g. Mishra & Koehler, 2006), que não coube neste trabalho mas que merece ser considerado. A utilização de exemplos estáticos e de exemplos dinâmicos pressupõe uma interação diferente com os alunos e exige uma atitude e um papel diferentes dos alunos em relação ao decurso dos trabalhos; os alunos pareceram mais motivados perante o uso de exemplos dinâmicos. A forma como as dimensões de variação possível são tratadas com sequências de exemplos estáticos e com um exemplo dinâmico são diferentes, utilizando uma terminologia matemática, de forma discreta, num caso, e de forma contínua, noutro. O tratamento das amplitudes de mudança permissível é mais limitada no caso do exemplo dinâmico, estando limitado à amplitude dos botões, enquanto nas sequências de exemplos estáticos podemos utilizar nos vários parâmetros valores reais que desejarmos. Por fim, pelo desenrolar das aulas de ambos os professores, consideramos que a utilização de exemplos estáticos apresenta uma maior flexibilidade no que respeita à modificação dos exemplos, em qualquer momento podemos introduzir exemplos na sequência caso se revele necessário; o uso do exemplo dinâmico pareceu-nos mais rígido e menos dado a modificações de contingência.

5. Conclusão

Os professores Eva e António, para ensinar a função quadrática e para estudar a parábola, usaram uma estratégia comum mas com técnicas substancialmente diferentes. A estratégia, como se viu, consistiu na utilização da variação para conseguir que os alunos pudessem “ver” os aspetos transparentes das expressões do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k$ e, com isso, generalizar e abstrair sobre esta forma de definir uma função quadrática. Contudo, as técnicas utilizadas basearam-se em processos diferentes – o uso de sequências de exemplos estáticos, pela professora Eva, e o uso de uma aplicação dinâmica de *Geogebra*, pelo professor António – e em tecnologias diferentes, a calculadora gráfica e um software para PC. Sem que o estudo se centrasse no papel da calculadora gráfica nem do *Geogebra*, as tecnologias são dois fatores basilares nas duas formas de exemplificar, é fácil observar como potenciam a apresentação da variação e

da transparência aos alunos, bem como a sua contribuição para a generalização e abstração dos conceitos. Dando força à argumentação de Mishra e Koehler (2006), não basta introduzir as tecnologias nas salas de aula, é necessário observar como os professores as usam e se o seu uso é adequado.

Embora não se tenha feito uma caracterização profunda das turmas, cabe dizer que ambas são muito semelhantes em termos socioeconômicos; talvez por isso não se tenham identificado diferenças significativas quanto às dificuldades sentidas pelos alunos aos exemplos propostos nem quanto às suas aprendizagens. Todavia, existiu um momento na turma do professor António onde dificuldades acrescidas foram observadas, tal aconteceu na resolução do item 7, o caso mais geral, da última sequência de exemplos. Não se pôde contrastar esta dificuldade destes alunos com os alunos da professora Eva, já que determinar no caso geral o eixo de simetria, intervalos de monotonia, contradomínio e tipo de extremo não foi tratado por esta professora.

Julgamos que o estudo aqui descrito deixou patente como o bom uso da variação é fundamental para a aquisição da capacidade de identificação dos aspetos transparentes de uma dada representação. Isto é, como a variação *necessita* da transparência para ser melhor notada e, por sua vez, como a transparência *carece* da variação para poder “mostrar” as potencialidades da representação. A sinergia entre variação e transparência é o fator de ensino que possibilita que os alunos generalizem e abstraíam sobre o conceito de função quadrática, não sendo difícil que, partindo deste estudo, se possa alargar a mesma ideia a outras funções e mesmo a outras áreas da matemática.

Neste processo de generalização e de abstração que investigámos pudemos identificar duas formas distintas de exemplificar mas que, no final, podemos considerar equivalentes. Em relação às generalizações conseguidas pelos alunos sobre a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$, ou a percepção dos aspetos aos quais ela é transparente, tanto a utilização de sequências de exemplos estáticos como a de exemplos dinâmicos se mostraram eficazes. Do mesmo modo, no final, todos os alunos puderam identificar os aspetos a estudar das funções quadráticas apresentadas sem recurso às respetivas parábolas. Foi nosso objetivo mostrar como a variação e as transparências facilitam a abstração de conceitos e distinguir também duas tipologias de exemplificação, a estática e a dinâmica. Pensamos ter dado uma descrição suficiente que permita ao leitor avaliar o benefício do uso conjunto da variação e da transparência, para além das diferenças entre o uso de uma sequência de exemplos estáticos e entre o uso de um exemplo dinâmico, no que às vantagens e às desvantagens desse uso se refere.

No fundo, o que se pretende é que os alunos saibam “ver” aquilo que as representações mostram. Posto de outro modo, as representações não são transparentes de forma automática, teremos que ser nós, os professores, a ajudar os alunos a “ver” aquilo que elas têm para mostrar. E então, quando os alunos conseguirem “ver” os aspetos transparentes das representações, poder-se-á afirmar que a generalização ou a abstração do conceito se efetivou.

Referências

- Blanco L. J., Figueiredo, C. A., Contreras, L. C., & Mellado, V. (2010). The use and classification of examples in learning the concept of function: A case study. In R. V. Nata (Ed.), *Progress in Education 9*, (pp. 129-156), New York, USA: Nova Publishers.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. In J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N.

- Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME
- Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 77-79.
- Figueiredo, C. A. (2010). *Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional*. (Tese de Doutoramento), Universidad de Extremadura, Badajoz, Espanha.
- Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.
- Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2003). The space of learning. In F. Marton & A. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mason, J. (2005 não publicado). *What is Exemplified in Mathematics Classrooms?* Descarregado em Maio de 2006 da página: <http://mcs.open.ac.uk/jhm3/OtherPapers/Mason%202005%20What%20is%20Eg%27d>.
- Mason, J. (2011a). Explicit and Implicit Pedagogy: variation theory as a case study. In C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 31(3), 107-112.
- Mason, J. (2011b). Phenomenology of Example Construction. *ZDM*, 43(2), 195-204.
- Mason, J., & Watson, A. (2005). *Mathematical Exercises: what is exercised, what is attended to, and how does the structure of the exercises influence these?* Invited Presentation to SIG on Variation and Attention. EARLI, Nicosia.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record* 108, 1017-1054.
- Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 149-163.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*, London, Sage.
- Watson, A., & Mason, J. (2004). The Exercise as Mathematical Object: Dimension of Possible Variation in Practice. *Proceedings of the 24th Conference of the British Society of Research in Learning Mathematics*, (Vol. 2, pp. 107-112). Leeds, U.K.: BSRLM.
- Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: using variation to structure sense-making. *Mathematics Thinking and Learning*, 8(2), 91-111.
- Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM*, 43(2), 283-294.
- Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics. Challenges for teaching. In M. K. Stein, & L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines*. New York, USA: Springer.
- Zaslavsky, O., & Lavie, O. (2005). *Teachers' use of instructional examples*. Paper presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brazil.
- Zaslavsky, O., Harel, G., & Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková

(Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 5, pp. 457–464) Prague, Czech Republic.

Zazkis, R. (2005) Representing numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 207-217.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41-52). Reston, VA, USA: NCTM.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 164–186.

Zazkis, R & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. In M.J. Hoines, & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4, pp. 497-505). Bergen, Norway.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2007). *Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply?* Paper presented at the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5), Larnaka, Cyprus.

Referências dos autores

Carlos Alberto Figueiredo, Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, (Portugal).
carlosaafigueiredo@sapo.pt

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España). lcarlos@uhu.es

The quadratic function: variation, transparency and two types of examples

Carlos Alberto Figueiredo, Escola Secundária D. Sancho II de Elvas (Portugal)

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España)

The theme of this article is teachers' use of examples to generalize and abstract mathematics concepts. The process of generalizing and abstracting consists of finding common characteristics in a set of examples. To make it easier for pupils to successfully put this process into practice, the sequences of examples may present a variation that helps the pupils to identify those characteristics. This variation consists in identifying in a given example what can, or cannot, be modified and still leave the example as a good instance of the concept in question.

Representations play a fundamental role in how mathematics concepts are communicated. The notion of transparency is closely related to representations. Representations may be transparent to certain aspects of the concept. For instance, 3×5 is a representation of the natural number 15 that is transparent to the idea of multiple of 3 (and also of 5). Similarly, that 36 is a square is a transparent representation, but the idea of its being divisible by 12 is opaque.

Different perspectives or methodological strategies may be taken to the conjoint use of variation and transparency for the pupils' construction of a mathematics concept. The objective of the present work is to describe how two experienced teachers' use of examples sheds some light on the role of variation and transparency in teaching certain aspects of the quadratic function. The two teachers took quite different methodological approaches to the generalization of concepts related to this content of the mathematics curriculum. One employed example sequences that involved the use of graphing calculators to teach aspects of the quadratic function in the form $f(x) = a(x-h)^2 + k$. The other used an application of the open-source GeoGebra software. The two approaches allowed one to identify important aspects of the use of variation, immediate transparency, and mediated transparency. It also clearly brought out the differences and the commonalities in teaching the same content. The differences showed that two kinds of examples were used – static and dynamic. The commonalities showed that there was an integrative and synergetic use of variation and transparency, and that there was a differentiation between immediate and mediated transparency.

The conclusion that this work allowed to be drawn was that the synergy between transparency and variation makes it easier for pupils to generalize and abstract the concept of quadratic function, regardless of whether the examples they are presented with are static or dynamic. There seems to be no reason that the same idea cannot be extended to other functions, and even possibly to other areas of mathematics.