CB-1.076

# A DIVERSIDADE REPRESENTACIONAL NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS VETORIAIS

Keila Tatiana Boni – Carlos Eduardo Laburú
keilaboni@hotmail.com – laburu@uel.br
Universidade Norte do Paraná/Universidade Estadual de Londrina – Brasil

Núcleo temático: I. Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais.
Modalidade: CB
Nível educativo: Terciário (16 a 18 anos)
Palavras chave: Educação Matemática. Diversidade Representacional. Aprendizagem. Vetores.

**Resumo**
*O presente trabalho apresenta resultados parciais de uma pesquisa mais abrangente com o objetivo de investigar algumas das atribuições de se promover um ensino na perspectiva da Diversidade Representacional para a aprendizagem de estudantes no estudo de Vetores. A partir da aplicação de questões contemplando conceitos vetoriais elementares, diagnosticou-se conhecimentos prévios de um estudante de Engenharia Elétrica. Após, o mesmo estudante envolveu-se com uma pluralidade de modos e formas representacionais em uma aula sobre conceitos vetoriais e, por fim, o mesmo questionário do momento diagnóstico lhe foi proposto. Com a análise interpretativa e descritiva dos dados obtidos nesses três momentos, evidenciou-se que uma aula na perspectiva da Diversidade Representacional, além de contribuir para a compreensão mais aprofundada de conceitos vetoriais elementares, auxiliou o estudante a observar e conhecer algumas das propriedades da operação de adição vetorial, bem como visualizar e apreender a equivalência entre métodos para realizar essa adição.*

## Introdução

O caminho para a construção de significados e para a compreensão na aprendizagem matemática é particular de cada sujeito e, no ensino, essa diferença precisa ser considerada. Nesse direcionamento, encontramos em referenciais da Diversidade Representacional (AINSWORTH, 1999; PRAIN; WALDRIP, 2006; entre outros) a defesa por um ensino que seja promovido na perspectiva plural em termos representacionais, justificando que modos e formas representacionais se constituem como alicerces para que o estudante possa construir uma compreensão mais aprofundada sobre conceitos científicos e matemáticos, a partir da ligação cognitiva entre representações de um mesmo conceito.


ISBN 978-84-945722-3-4

Em concordância com essa defesa, apresentamos nesse trabalho resultados de um recorte de uma pesquisa mais ampla em que, nesse recorte, visamos investigar algumas das atribuições de se promover um ensino na perspectiva da Diversidade Representacional para a aprendizagem de um estudante no estudo de Vetores.

**Diversidade Representacional**

Quando nos referimos à Diversidade Representacional incluímos nessa única menção o referencial da multimodalidade representacional e o das múltiplas representações. Tal inclusão justifica-se pelo fato da literatura raramente preocupar-se em definir a diferença entre multimodalidade e múltiplas representações, bem como por considerarmos que ambos são complementares e indissociáveis no ensino e na aprendizagem matemática.

Tendo em vista esclarecer ambos os referenciais que abrangemos, encontramos em Tytler et al. (2007) que a multimodalidade representacional corresponde à integração do discurso científico em diferentes modos representacionais do raciocínio, dos processos e das descobertas, exemplificando esses diversos modos como verbal (escrito ou oral), gráfico, tabular, diagramático, figurativo, analógico, entre muitos outros. Quanto às múltiplas representações, encontramos em Prain e Waldrip (2006) a alusão à prática de representar um mesmo conceito de várias formas distintas: descritivas (incluídas nos modos verbal, tabular, diagramática, gráfica ou matemática), figurativas (incluídas nos modos pictórico, analógico ou metafórico), cinestésicas (incluídas nos modos encenação e jogos), que utilizam objetos tridimensionais (3D) ou maquetes, experimentos, entre outros.

Ao considerarmos que na prática do ensino e da aprendizagem de Matemática a multimodalidade representacional e as múltiplas representações convergem para o mesmo objetivo de o estudante apropriar-se do significado de um conceito, a partir da compreensão de diferentes formas e modos representacionais de um mesmo referente, bem como ao qualificarmos, tal como Radford, Edwards e Arzarello (2009), a multimodalidade representacional como “recursos perceptivos” por meio dos quais as diversas formas representacionais podem ser pensadas, expressadas, comunicadas ou executadas, firmamos nossa concepção de que ambos os referenciais são indissociáveis no ensino e na aprendizagem matemática.


ISBN 978-84-945722-3-4

Para maior esclarecimento sobre modos e formas representacionais e suas intrínsecas relações, tomemos o exemplo de uma função matemática que pode ser apresentada em um mesmo modo representacional, o verbal escrito. Nesse mesmo modo, podemos apresentar a mesma função matemática de formas distintas, tais como, na forma de registro algébrico, de registro gráfico, de registro tabular ou em linguagem natural.

Na Diversidade Representacional defende-se numerosas atribuições da integração de diversificados modos e formas representacionais no ensino e na aprendizagem matemática e científica. Dentre essas atribuições, podemos citar: i) a compreensão do estudante não se limita a uma única forma ou modo representacional, mas depende da atividade cognitiva de conversão e coordenação entre registros de representação (DUVAL, 2009) e da tradução e integração de modos representacionais; ii) cada forma representacional traz em si processos cognitivos distintos, que fazem com que uma forma possa ser mais fácil ou mais difícil do que outra em um sistema semiótico; iii) possibilita ao estudante realizar transladações de significados de um sistema de signos para outro, construindo significados equivalentes em sistemas de sinais distintos; e, iv) auxiliam a atrair o interesse do aluno, além de conduzi-lo a uma compreensão mais profunda do assunto que está sendo ensinado.

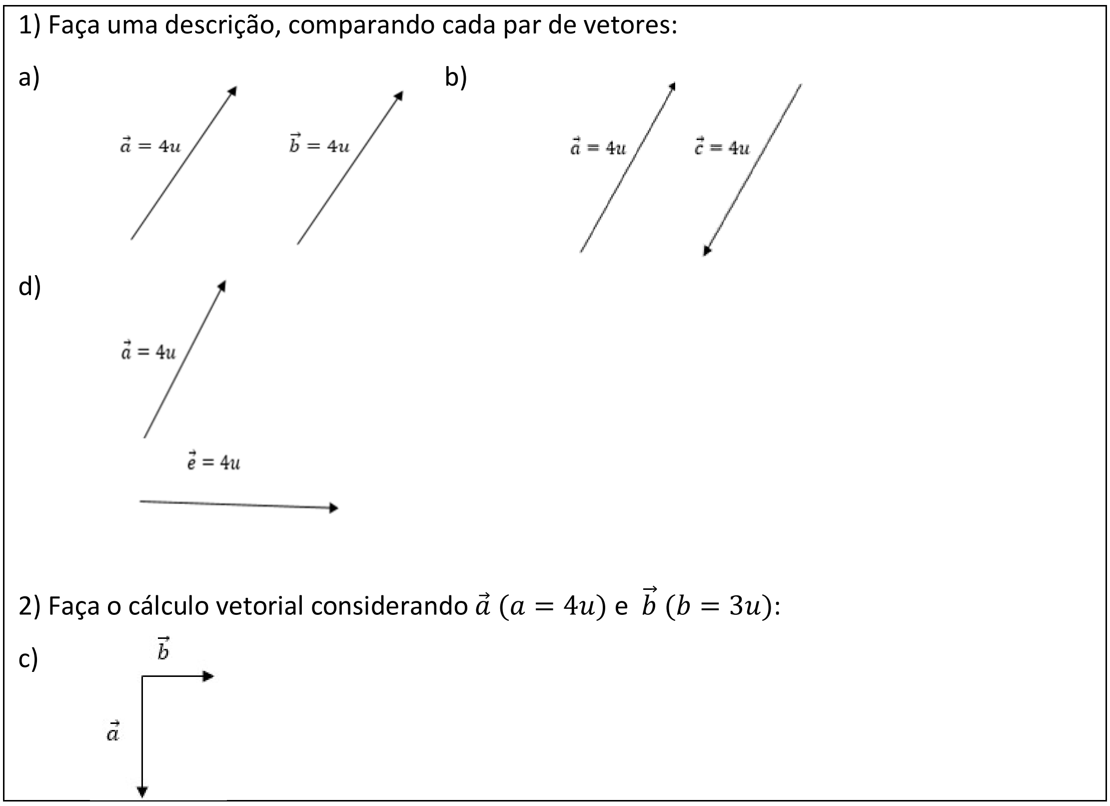
Além das atribuições elencadas, Ainsworth (1999) defende que há três funções principais das múltiplas representações em situações de aprendizagem, podendo essas funções serem estendidas ao engajamento multimodal (Ainsworth, apud Prain; Waldrip, 2006). A primeira função é a de *complementação*, que diz respeito à utilização de representações que contêm informações complementares ou que apoiam processos cognitivos complementares. A segunda função é a de *restrição*, que se refere à utilização de uma representação para restringir possíveis interpretações equivocadas na utilização de uma outra. A terceira e última função elencada por Ainsworth (1999) é a de *construir compreensão mais profunda*, que considera a utilização de diversas representações para promover a abstração, para incentivar a generalização e para ensinar a relação entre representações. Segundo Ainsworth (1999) a separação das funções apresentadas é apenas teórica, pois as representações utilizadas em um mesmo sistema podem cumprir com duas ou mais das funções relatadas, simultaneamente ou sequencialmente.

**Procedimentos metodológicos e analíticos**


ISBN 978-84-945722-3-4

Para o presente trabalho, de cunho qualitativo, os dados foram obtidos a partir de três momentos com um estudante do 3º semestre de Engenharia Elétrica de uma instituição particular de ensino do norte do Paraná, Brasil. Vale destacar que o estudante, ao participar da pesquisa, ainda não havia cursado a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Vetorial, portanto, consideramos que suas respostas foram pautadas em conhecimentos construídos durante o Ensino Médio e em seu senso comum.

No primeiro momento o estudante respondeu a um questionário diagnóstico contendo questões sobre definição de vetores e adição vetorial. Neste trabalho apresentamos apenas os itens *a*, *b* e *d* da questão 1 e o item *c* da questão 2 desse questionário (ver Figura 1), aos quais nos referimos, respectivamente, como 1A, 1B, 1D e 2C. No segundo momento, a primeira autora deste trabalho, que chamamos de "professora", ministrou uma aula sobre Vetores à luz da Diversidade Representacional. No terceiro e último momento, aplicou-se um questionário igual ao do primeiro. Todos esses dados foram submetidos, posteriormente, à uma análise interpretativa e descritiva.





VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

***Figura 1: Algumas das questões propostas no questionário aplicado ao estudante no primeiro e no terceiro momento da investigação***

No primeiro momento, para a questão 1, o estudante referiu-se à direção e ao sentido como "ordem" crescente, decrescente e horizontal, conforme exemplificamos com a figura a seguir:

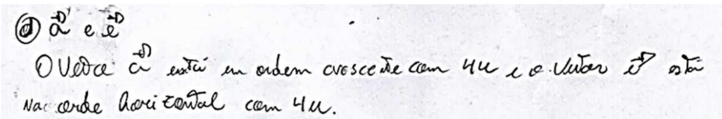



***Figura 2: Resolução do estudante para a questão 1D no primeiro momento***

Com as resoluções apresentadas pelo estudante nos itens propostos na questão 1 evidenciamos que há confusão sobre direção e sentido de vetores. Além disso, quando o estudante se refere aos vetores com sentido para cima como "de ordem crescente" e os vetores no sentido para baixo como "de ordem decrescente", inferimos que ele estava associando as representações de vetores por meio de flechas com uma representação gráfica no plano cartesiano. Essa inferência também foi embasada na resolução apresentada pelo estudante para a questão 2C:

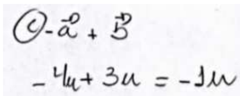



***Figura 3: Resolução do estudante para a questão 2C no primeiro momento***

Observa-se nessa resolução que o estudante atribui o sinal negativo para o vetor com sentido para baixo ($\vec{a}$) e o sinal positivo para o vetor na direção horizontal, com sentido da esquerda para a direita, ($\vec{b}$). Após conversa com o estudante, confirmamos a inferência de que ele estava associando as representações geométricas do vetor aos eixos do plano cartesiano, em que o vetor $\vec{a}$ corresponde ao eixo das ordenadas ($y$) no sentido negativo e, o vetor $\vec{b}$, ao eixo das abscissas ($x$) no sentido positivo.

Ainda, com a resolução do item 2C, evidenciamos que o estudante desconsidera a disposição dos vetores ao realizar operações, desenvolvendo a soma vetorial de maneira análoga à soma de escalares.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

No dia seguinte ao da aplicação do questionário diagnóstico, a professora ministrou uma aula na perspectiva da Diversidade Representacional, uma vez que integrou diversos modos e formas representacionais em seu discurso e ações durante a aula, tais como o verbal (oral e escrito), figuras, animações (recursos visuais em *flash*) e registros matemáticos (aritméticos e algébricos).

A professora iniciou a aula com a definição de vetor. Para iniciar essa abordagem, ela explicou sobre algumas grandezas físicas (escalares e vetoriais) e fez uso de diversas figuras para diferenciar sentido e direção. Na sequência, explicou adição vetorial pelo método do polígono e pelo método do paralelogramo a partir de desenhos e esquemas de vetores construídos por ela, bem como com o auxílio de um recurso computacional. Esse recurso é uma animação em flash, disponibilizada gratuitamente pela Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil. Assim, essa pluralidade representacional foi proposta pela professora com o intuito de *complementar* (AINSWORTH, 1999) suas explicações sobre adição vetorial.

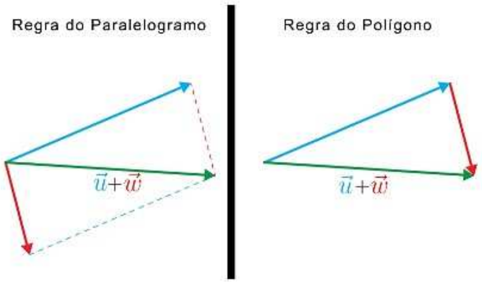



***Figura 4: Captura do momento final em que a animação em flash mostra a comparação e a equivalência entre os dois métodos. Disponível em: <[http://fisica.ufmt.br/nuvem/?p=127](http://fisica.ufmt.br/nuvem/?p=127)> Acesso em: 29 dez. 2016.***

Com a animação em *flash* foi possível visualizar que os métodos do polígono e do paralelogramo são equivalentes.

Foi durante esse segundo momento da pesquisa que a professora tentou desconstruir as ideias equivocadas do estudante sobre os conceitos de vetores. Para isso, a professora promoveu uma proposta de ensino pautada na perspectiva da Diversidade Representacional, com o intuito de auxiliar o estudante a construir conhecimentos de acordo com o que almeja e que é balizado pelo currículo.

> **Professora**: *Vamos supor um vetor $\vec{x}$ de tamanho ou módulo 3u e um vetor $\vec{y}$ de tamanho 4u. Como somamos os dois?*
> **Estudante**: *É para somar os dois? 3 + 4?*


ISBN 978-84-945722-3-4

**Professora**: *Será? Faça o desenho.*
Após fazer o desenho:
**Estudante**: *Aqui tem que fazer o cálculo vetorial... cateto oposto, hipotenusa...*
**Professora**: *E por que você acha que tem que fazer isso?*
**Estudante**: *Cateto, hipotenusa* (ele indica no desenho que fez)*... tem um ângulo de 90°. Não é?*

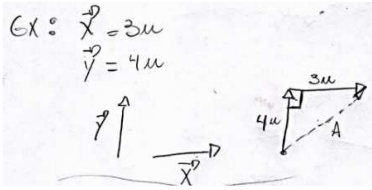



***Figura 5: Resolução apresentada pelo estudante***

Ao solicitar o desenho para o aluno, a professora recorre a essa representação com o intuito de *restringir* (AINSWORTH, 1999) uma interpretação equivocada. Além disso, a representação apresentada pelo estudante foi propícia para explorar as propriedades de comutatividade e associatividade da adição vetorial. Nota-se na resolução apresentada pelo estudante que, apesar do cálculo ter sido desenvolvido corretamente, o desenho apresentado por ele para a adição vetorial pelo método do polígono não foi realizada exatamente da forma como foi solicitada. Isso porque foi solicitado a adição de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, porém o estudante desenhou os vetores como se estivesse somando $\vec{y}$ e $\vec{x}$.

No terceiro momento, foi proposto ao estudante o mesmo questionário do primeiro momento. Na figura a seguir apresentamos a resolução do estudante para a questão 2C:

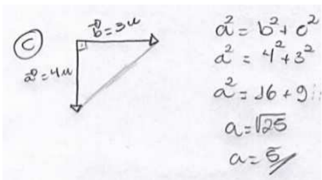


***Figura 6: Resolução apresentada pelo estudante para a questão 2C no terceiro momento***

Nesse momento, verificamos que o estudante operacionalizou corretamente a adição vetorial solicitada, contudo, mais uma vez notamos uma representação geométrica equivocada da adição vetorial. Dessa vez, o estudante envolveu concomitantemente os dois métodos estudados, do polígono e do paralelogramo, pois, em sua representação, o estudante utilizou o mesmo esquema proposto na questão para realizar a regra do polígono. Para aproveitar o esquema já proposto na questão, o estudante deveria ter utilizado a regra do paralelogramo,


ISBN 978-84-945722-3-4

projetando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de forma a obter um paralelogramo, onde sua diagonal corresponde à resultante da adição entre os dois vetores. Para utilizar a regra do polígono, o estudante deveria ter apresentado outra representação, unindo a origem de $\vec{b}$ na extremidade de $\vec{a}$ para determinar o vetor soma. Entretanto, apesar da representação equivocada, seus cálculos foram desenvolvidos corretamente e, ao compararmos com a resolução apresentada para a mesma questão no primeiro momento, concluímos que o estudante compreendeu o conceito de adição vetorial e que ambos os métodos para realizar esse procedimento são equivalentes. Para os itens A e B da questão 1, evidenciamos que o estudante compreendeu os conceitos de direção e sentido de vetores, bem como o de equivalência. Contudo, no item 1D ele apresentou um equívoco com relação ao sentido:

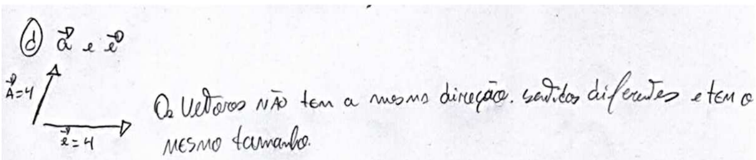



***Figura 7: Resolução do estudante para a questão 1D no terceiro momento***

Apesar de apresentar corretamente as respostas para os itens 1A e 1B, na resolução apresentada para o item 1D o estudante reconhece que os vetores não estão na mesma direção, manifestando compreender que a mesma direção está relacionada ao paralelismo entre os vetores. Contudo, com relação ao sentido de vetores, o estudante ainda apresenta uma ideia errada: que esse sentido pode ser determinado independentemente da direção.

## Considerações finais

Com a análise dos dados oriundos dos três momentos de investigação, evidenciamos que uma aula na perspectiva da Diversidade Representacional contribuiu para que o estudante construísse uma *compreensão mais aprofundada* (AINSWORTH, 1999) sobre os conceitos vetoriais elementares e, inclusive, o auxiliou a observar e conhecer propriedades da operação de adição entre vetores, compreendendo diferenças e inerências entre a adição vetorial e a escalar. Ainda, os diversos modos e formas representacionais auxiliaram o estudante a visualizar e apreender a equivalência entre os métodos para realizar a adição vetorial.


ISBN 978-84-945722-3-4

Com base nos resultados obtidos nesse recorte, visamos aprimorar procedimentos de pesquisa e instrumentos de análise para realizarmos uma investigação mais abrangente com estudantes do Ensino Médio, considerando que investigações análogas à apresentada, ou seja, com o intuito de analisar atribuições de se promover um ensino na perspectiva da Diversidade Representacional para a aprendizagem de estudantes, podem ser realizadas em outras etapas escolares, desde o Ensino Fundamental até o Superior, e no contexto de aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos.

**Referências bibliográficas**

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. Computers & Education, 33, 131-152.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Prain, V.; Waldrip, B. (2006). An exploratory study of teachers' and students' use of multi-modal representations of concepts in primary science. International Journal of Science Education, 28, 15, 1843-1866.

Radford, L.; Edwards, L.; Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. Educational Studies in Mathematics, 70, 2, 91-95.

Tytler, R.; Prain, V.; Peterson, S. (2007). Representational issues in students learning about evaporation. Research in Science Education, 37, 3, 313-331.


ISBN 978-84-945722-3-4