CB-1.039

UMA EXPERIÊNCIA HISTÓRICO-INVESTIGATIVA PARA O ENSINO DE GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Lauro Chagas e Sá – Sandra Aparecida Fraga da Silva
lauro.sa@ifes.edu.br – sfraga@ifes.edu.br
Instituto Federal do Espírito Santo, Brasil

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: Comunicación Breve (CB)
Nivel educativo: Medio o secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Teoria de Grafos, Ensino Médio, Investigação Matemática, História da Matemática

Resumo

Este texto apresenta recorte de pesquisa de mestrado, de natureza qualitativa, que investigou aprendizagens discentes durante uma abordagem histórico-investigativa no ensino da Teoria de Grafos. Adotamos uma perspectiva denominada histórico-investigativa, que concatena o marco teórico da Investigação Matemática e da História da Matemática, numa abordagem sociocultural. Acreditamos que a história é uma rica fonte de experiências e produções humanas, que oportuniza um diálogo entre práticas atuais e fontes históricas. Ao mesmo tempo, percebemos que o conceito de investigação para o ensino ajuda a trazer para sala de aula o espírito genuíno da atividade matemática. Neste caso, o aluno é chamado a agir como um matemático, formulando conjecturas, apresentando resultados, discutindo e argumentando com seus colegas. Ao final do processo investigativo, realizado com estudantes de Ensino Médio em novembro de 2015, observamos que os alunos enunciaram

ISBN 978-84-945722-3-4

o Teorema dos Caminhos Eulerianos e formalizaram conceitos relativos à Teoria de Grafos. Verificamos que as tarefas de investigação propostas em sala de aula proporcionaram aos alunos uma atividade semelhante à dos matemáticos, permitindo-lhes o prazer da descoberta e apresentando-lhes a matemática como produção humana.

Introdução

Este texto apresenta recorte de pesquisa de mestrado, de natureza qualitativa, que investigou aprendizagens discentes durante uma abordagem histórico-investigativa com o Problema das Pontes de Königsberg para ensino da Teoria de Grafos (Sá, 2016). A escola onde realizamos a intervenção está situada em Vitória, capital do estado do Espírito Santo, no Brasil. Esta experiência aconteceu em novembro de 2015, durante três aulas, com três turmas de segundo ano de ensino médio, com uma média de vinte e três alunos cada. Apresentamos uma breve história da Teoria dos Grafos e nossa discussão teórico-metodológica baseando nossa proposta de abordagem histórico-investigativa.

Uma breve incursão na história da Teoria de Grafos

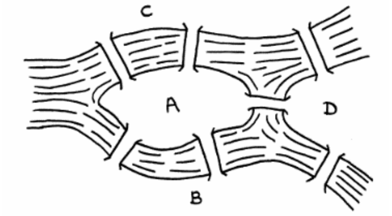
No início do século XVIII, especula-se que os cidadãos da cidade prussiana de Königsberg fixaram um desafio: caminhar ao redor da cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e, se possível, retornar ao seu ponto de partida, tal como ilustrado na figura 1. Em 1730, o prefeito de uma cidade próxima a Königsberg passou a se corresponder com o Leonhard Euler (1707-1783) para discutir o problema das sete pontes. Parte de uma das cartas, datada de 09 de março de 1736 e enviada ao matemático suíço, está apresentada a seguir:

> Você prestaria a mim e a nosso amigo Kiihn o mais valioso serviço, colocando-nos muito em dívida com você, culto Senhor, se você nos enviasse a solução, que você conhece bem, para o problema das sete pontes Könisberg, juntamente com uma prova. [...] Eu adicionei um esboço das referidas pontes (Sachs, Stiebitz & Wilson, 1988, p. 134).

Euler não precisou de mais de uma quinzena de dias para resolver o enigma. Para isso, ele criou um modelo matemático que simulasse a cidade russa, que é o que hoje chamados de grafo. Durante a elaboração do grafo, ele representou as porções de terra (ilhas e margens) por pontos e as pontes por linhas ligando esses pontos (figura 2).

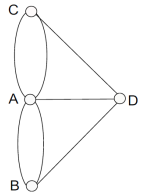
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 1 – Esboço da cidade de Könisberg



Fonte: Hopkins & Wilson, 2004, p. 198.

Figura 2 – Grafo que representa a cidade de Königsberg.



Fonte: Adaptado de Malta, 2008, p. 12.

Apesar de não utilizar as denominações atuais da Teoria dos Grafos, percebeu que só se pode realizar um caminho passando em todas as pontes uma única vez se, e somente, cada porção de terra possuir uma quantidade par de pontes (Euler, 1851). Em homenagem ao matemático suíço, esse caminho é chamado de euleriano.

Pressupostos teóricos-metodológicos para uma abordagem histórico-investigativa

Uma reflexão sobre a utilização da História na Educação Matemática nos conduz a uma escolha teórica e metodológica. Em linhas gerais, acreditamos que a História é uma rica fonte de experiências e produções humanas, que oportuniza um diálogo entre práticas atuais e fontes históricas, conforme previsto nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos e de conhecimento que vão entrar na relação didática (Brasil, 2006, p. 86).

Em relação a pesquisas em Educação Matemática que abordam História da Matemática, os pontos de vista são variados e dependem da visão que cada professor e pesquisador tem da História e dos valores que estão presentes nesta metodologia de ensino. Miguel e Miorim (2011) e Dynnikov e Sad (2007), por exemplo, apresentam diversas opções para o emprego de fontes históricas (primárias e secundárias) em sala de aula. Em todos os casos, a preocupação dos pesquisadores é essencialmente pedagógica e, por esse motivo, recorrem à história com finalidades diretamente relacionadas com a prática de sala de aula.

Frente ao exposto, também percebemos que o conceito de investigação para o ensino ajuda

ISBN 978-84-945722-3-4

a trazer para sala de aula o espírito genuíno da atividade matemática. Neste caso, o aluno é chamado a agir como um matemático, formulando conjecturas, apresentando resultados, discutindo e argumentando com seus colegas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2009). Mais especificamente, ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de maneira mais ou menos consistente, utilizar vários processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática: a exploração e formulação de questões, a construção de conjecturas, o teste e a reformulação dessas hipóteses e a justificação de conjecturas, com avaliação do trabalho.

Skovsmose (2000, p. 81) destaca que "quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem". Combinando três tipos de referência (matemática, semi realidade e vida real) e duas estratégias para práticas de sala de aula (paradigma do exercício e cenário para investigação), o pesquisador obtém uma matriz com seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagem. Daí destaca-se que o sucesso de uma investigação depende do ambiente de aprendizagem que se cria em sala de aula.

Para estabelecer um cenário que convide os alunos a formularem questões e procurarem explicações, é importante que o professor tenha sensibilidade para criar ou selecionar situações investigativas que serão utilizadas em sala. Nesse processo de análise das tarefas, Goldenberg (1999) apresenta três tipos de investigações, que se diferenciam pelo momento em que surgem na aula de matemática e pelo papel que cada uma desempenha: atividades investigativas com a função de explorar, atividades investigativas para descobrir, e atividades investigativas para questionar.

Em síntese, neste trabalho, defendemos uma abordagem histórico-investigativa, que concatena o marco teórico da Investigação Matemática e da História da Matemática, com enfoque sociocultural. Nesta perspectiva, a realização de tarefas de investigação poderá proporcionar aos alunos uma atividade semelhante à dos matemáticos, permitindo-lhes o prazer da criação e apresentando-lhes a matemática como produção humana.

ISBN 978-84-945722-3-4

Reflexões sobre a prática

Dando início à atividade de validação da proposta investigativa, exibimos uma imagem que esta representava a cidade do interior da Prússia. Em seguida, apresentamos uma imagem com uma adaptação do Problema das Pontes de Königsberg, dizendo que uma princesa do castelo mais ao norte gostaria de passear pelo seu reino, atravessando cada uma das pontes uma única vez e retornando a sua residência. Dessa forma, o pesquisador convidou os alunos a investigarem o problema, para posteriormente, formularem uma carta coletiva de resposta à princesa.

Após a enunciação do problema, deixamos que os alunos fizessem tentativas, criassem hipóteses e discutissem entre si. Assim, em consonância a Skovsmose (2000, p. 71), consideraramos que "no cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo". Estes, então, encarando o desafio que lhes foi apresentado, iniciaram as buscas de um caminho que passasse apenas uma vez pelas sete pontes. Em duas turmas, alguns alunos chegaram a se levantar da cadeira para discutir com seus colegas possíveis trajetórias e procurar por explicações (figuras 3 e 4). Na terceira turma, embora os alunos não tenham se levantado para apresentar suas hipóteses, desenvolveram suas discussões em pequenos grupos, enquanto também tentavam criar, em seus cadernos, um caminho que passasse pelas sete pontes.

Figura 3 – Aluna apresentando suas conjecturas.

Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.

Figura 4 – Alunas comparando suas hipóteses.

Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015

Sobre o comportamento dos alunos que não foram ao quadro, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 30) destacam que "pode parecer que nada está acontecendo ou que os alunos estão com dificuldades quanto a essa atividade, no entanto, essa etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas". Nesse sentido, analisando tanto o caso dos alunos que foram a frente quanto os que ficaram em suas cadeiras conjecturando, confiamos que o cenário de investigação foi estabelecido em sala de aula.

ISBN 978-84-945722-3-4

Ainda sobre as ações dos alunos descritas, percebemos a criação de um “contexto mentalmente estimulante” (Goldenberg, 1999, p. 5), nos permitindo inferir, segundo a tipologia de Goldenberg (1999), que esta primeira tarefa pode ser caracterizada como uma atividade investigativa para explorar. Este tipo de tarefa, segundo o autor, é importante por criar um cenário para o trabalho posterior, ajudar os alunos a estabelecer intuições e a desenvolver um “sentido” do território.

A construção de uma carta de resposta à princesa, atribuída como atividade posterior, apresentou o problema de investigação; tarefa com o objetivo de conduzir os alunos à descoberta de uma conjectura, o que caracteriza as atividades investigativas para descobrir (Goldenberg, 1999). Neste caso, a formalização de um conceito constitui a parte crítica, que diferencia este tipo de investigação da categoria apresentada anteriormente. Como esta dinâmica foi planejada para uma aula de 50 minutos, conduzimos este momento como uma oportunidade para sistematização do que foi construído. Este direcionamento também é apontado por Goldenberg (1999, p. 6) quando afirma que uma atividade investigativa para descobrir “poderá igualmente servir como parte do corpo ou mesmo final de uma sequência de aprendizagem”.

Ao final do processo investigativo, os alunos das três turmas perceberam que o problema não tinha solução. As cartas coletivas foram estruturadas pelos alunos e escritas na lousa pelo pesquisador. Com isso, evidenciamos que o papel do professor em mediar a discussão, manter o interesse pelo assunto, apresentar contra-argumentações e não aceitar apenas a contribuição dos alunos que tem habitualmente respostas corretas (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998, p. 3).

Durante a concepção da carta, os alunos justificaram a impossibilidade do passeio pela quantidade total ímpar de pontes da região (sete). Antes de escrever isso na carta, o pesquisador questionou os alunos se a retirada da ponte que liga a ilha da torre com a margem norte (figura 5a) solucionaria o problema. Os alunos perceberam que não e, em uma das turmas, a aluna argumentou que esta ponte não poderia ser retirada para não perder a simetria da figura. Para a turma desta aluna, o pesquisador apresentou o contraexemplo 5b, que também não possui caminho. Finalizando este teste de hipóteses, o pesquisador sugeriu a eliminação de duas pontes, conforme figura 5c, deixando a região com cinco pontes, sem simetria e com o caminho solicitado pela princesa.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 5 – Modelos dos contra-exemplos apresentados pelo pesquisador durante a investigação

(a) (b) (c)

Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.

A contra-argumentação reforça importância da mediação em certos momentos da investigação (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998); por meio da interação pesquisador-turmas que os estudantes passaram a notar que o impedimento para o passeio não estava no número total de pontes, mas na quantidade de pontes que cada região possuía. Assim, atestaram que para a princesa percorrer todas as pontes e retornar ao seu castelo, seria necessário que todas as regiões tivessem uma quantidade par de pontes.

Em síntese, após essas investigações, os estudantes conjecturaram que, se uma região tem mais de dois pontos com quantidade ímpar de pontes, então não é possível realizar um passeio que passe por todas as pontes. Contudo, se essa região possuir exatamente dois pontos com quantidade ímpar de pontes, então é possível percorrer todas as pontes, desde que o passeio comece em um dos locais com quantidade ímpar de acessos. E, ainda, que se na região não houver pontos com quantidade ímpar de pontes, então é possível realizar um passeio que passe por todas as pontes e voltar ao ponto de partida. Assim, os alunos enunciaram o Teorema dos Caminhos Eulerianos, de 1736.

Retomando a produção da carta coletiva, após os alunos verificarem que não havia solução para a situação proposta e enunciarem as condições necessárias para existência dos caminhos eulerianos, passamos a investigar uma alternativa para que a princesa conseguisse transpor todas as pontes e retornar ao ponto inicial. Em duas turmas, os alunos sugeriram eliminar uma das pontes que liga a ilha da torre à margem norte e construir uma nova passagem entre a ilha da árvore e a margem sul (figura 6a). Já os alunos da outra turma propuseram a construção de duas novas pontes: uma ligando a ilha da torre à margem norte e, outra, a ilha da árvore à margem sul (figura 6b).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 6 – Alternativas apontadas pelos alunos para o Problema das Sete Pontes.

(a)

(b)

Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.

Parafraseando Skovsmose (2000), percebemos que, depois de todas essas investigações, estamos na sala de aula. A princesa da história e os castelos representados não existem e isso nos coloca em uma semi realidade, mas não no paradigma do exercício.

No final deste primeiro dia, após informar os alunos sobre a veracidade do problema apresentado, passamos a sistematizar conceitos abordados ao longo das investigações. Considerando o percurso traçado pelos alunos durante a aula, definimos um grafo a partir do exposto em Malta (2008, p. 15): "Um grafo é um conjunto de pontos do plano ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos". Em seguida, retomamos a conjectura apresentada na carta coletiva para formalizar o Teorema do Caminho Euleriano:

> (a) Se um grafo conexo tem mais de dois vértices com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.
> (b) Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então ele possui um caminho euleriano aberto, que começa em um vértice, percorre todas as arestas e termina em um vértice diferente do inicial.
> (c) Se um grafo conexo não tem vértices de grau ímpar, então ele tem um caminho euleriano fechado, que começa e termina no mesmo vértice, percorrendo todas as arestas. (Lóvasz, Pelikán & Vesztergombi, 2005, p. 133).

Na segunda aula da sequência, utilizamos uma lista de quatro problemas para que os alunos pudessem empreender os conceitos formulados em outras atividades, que não eram apenas questões de aplicação. As estratégias e soluções dos alunos foram socializadas na terceira e última aula da sequência. Neste texto, não analisamos estas resoluções em função do objetivo da produção.

Algumas considerações

Nesta experiência, apresentamos uma abordagem histórico-investigativa para a Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Ao final do processo investigativo, observamos que os alunos enunciaram o Teorema dos Caminhos Eulerianos e formalizaram conceitos relativos à Teoria

ISBN 978-84-945722-3-4

de Grafos. Verificamos que esses estudantes reconheceram a Teoria de Grafos como conhecimento construído historicamente, a partir do qual se podem construir novos conhecimentos. Finalmente, verificamos que as tarefas de investigação propostas em sala de aula proporcionaram aos alunos uma atividade semelhante à dos matemáticos, permitindo-lhes o prazer da descoberta e apresentando-lhes a matemática como produção humana.

Referências

Brasil. Secretaria de Educação Básica. (2006). *Orientações curriculares para o Ensino Médio:* Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF.

Dynnikov, C. M. S. da S.& Sad, L. A. (2007). *Uma abordagem pedagógica para o uso de fontes originais em História da Matemática*. Guarapuava: SBHMat.

Euler, L. (1851). Solution d'um problème appartenant à la géométrie de situation, par Euler. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 10, 106-119.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM.

Hopkins, B. & Wilson, R. J. (2004). The truth about Konisberg. *The College Mathematics Journal*, 35(03), 198-207.

Lóvasz, L., Pelikán, J. & Vesztergombi, K. (2005). *Matemática discreta*: elementar e além. Tradução de Ruy de Queiroz. Rio de Janeiro: SBM.

Malta, G. H. S. (2008). *Grafos no Ensino Médio*: uma inserção possível. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), UFRGS, Porto Alegre – RS.

Miguel, A. & Miorim, M. A. (2011). *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Oliveira, H. M., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. da. (1998). Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática, VI. *Actas*. Portalegre: SPCE-SEM.

Ponte, J. P. da, Brocardo, J. & Oliveira, H. (2009). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Sá, Lauro Chagas e. (2016). *Construção e utilização de maquete eletrônica para ensino de grafos*: aprendizagens discentes a partir de uma abordagem histórico-investigativa. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – IFES, Vitória – ES.

Sachs, H., Stiebitz, M. & Wilson, R. (1988) J. An historical note: Euler's Konisberg Letters**.** *Journal of Graph Theory*, 12 (01), 133-139.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. Tradução de Jonei Cerqueira Barbosa. *Bolema*, Rio Claro – SP, 13 (14), 66-91.

ISBN 978-84-945722-3-4