CB-1.061

SIGNIFICACIONES DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Rocío Nallely Jiménez Muñoz - José Luis Soto Munguía

rocionjm@gmail.com - jlsoto@mat.uson.mx

Universidad del Estado de Sonora, México.

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Comunicación breve (CB)

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Fracción, resolución de problemas, heurísticas.

Resumen

Se reportan aquí algunas dificultades que enfrentan los profesores de matemáticas en formación de nivel secundaria (13 -15 años) cuando resuelven problemas relacionados con el concepto de fracción y sus implicaciones. Los datos han sido tomados de un breve taller ofrecido a un grupo de 20 futuros profesores a los que se les propuso resolver siete problemas. Cinco de los problemas fueron tomados de Lamon (2012) y dos propuesto por los autores.

Una primera dificultad observada en los profesores está relacionada con la comprensión del problema, específicamente con la identificación de la incógnita y de las relaciones internas del problema. Por otra parte, durante los procesos de resolución, sus heurísticas se limitan prácticamente a lo que Schoenfeld (1985) denomina "dibujando figuras". Se ha observado además, con respecto a la diversidad de significaciones asociadas al concepto de fracción, que la significación parte-todo es la más socorrida por los profesores.

Lo reportado anteriormente forma parte de un proyecto más general que está en curso y que pretende sentar las bases para el diseño de un material de enseñanza orientado a profesores, que amplíe el uso de heurísticas y promueva la diversificación de significaciones sobre el concepto de fracción.

Introducción

Con la finalidad de mejorar la concepción de fracción que tienen los profesores de educación básica, se ofreció un taller a docentes de este nivel, en el que se les propuso resolver problemas relacionados con fracciones, para identificar las posibles dificultades que

ISBN 978-84-945722-3-4

enfrentan cuando resuelven problemas relacionados con este objeto matemático, así como las técnicas heurísticas y las significaciones del concepto de fracción, que utilizan.

Posteriormente, a partir de lo observado durante el taller y el análisis de las respuestas proporcionadas por los profesores, se está elaboran un cuaderno de trabajo en el cual se describen como primera parte las significaciones del concepto de fracción enfatizadas por Lamon,(2012) y como segunda parte se incluye un análisis a priori de cada uno de los problemas con reflexiones didácticas y algunas tareas que les ayuden a identificar las heurísticas y diversificar las significaciones que utilizan.

A continuación se muestran algunos problemas que se aplicaron durante el taller, señalando en cada uno de ellos, tres aspectos que le dan sentido a este trabajo: 1) las dificultades que presentaron los profesores, 2) heurísticas y 3) significaciones de fracción utilizadas. Los procedimientos que muestran las hojas de trabajo respondidas por los profesores y la observación que se llevó a cabo durante el taller, nos permitieron detectar los elementos mencionados.

Problema número uno

Problema 1

En cada caso dibuje la unidad:

a) La parte sombreada representa $\frac{2}{3}$

b) La parte sombreada representa $\frac{2}{3}$

En el caso del inciso a, algunos profesores consideraron como unidad los dos círculos que se muestran en la imagen, dividiendo el circulo completamente sombreado, en tercios y representando la parte sombreada en total como $\frac{5}{6}$. Para saber cuánto representaba un tercio, dividieron $\frac{5}{6}$ entre $\frac{2}{3}$, obteniendo $\frac{15}{12}$, que precisamente era la respuesta correcta, si considerábamos como unidad los dos círculos. Sin embargo para los profesores resultó una respuesta incorrecta.

ISBN 978-84-945722-3-4

Lamon (2012) hace referencia como una de las características importantes de la significación parte – todo, la identificación de la unidad para poder resolver un problema de este tipo, si se pierde de vista la unidad con la que se trabaja, es posible realizar los procedimientos correctamente, pero llegar a una interpretación incorrecta, tal como sucedió en este caso.

Por otro lado, algunos profesores mantuvieron la división de los círculos en tercios pero consideraron que los $\frac{2}{3}$ de la unidad representaban $\frac{5}{3}$ de círculo, luego buscaron una fracción equivalente ($\frac{10}{6}$) para poder dividirla en dos y encontrar el valor de $\frac{1}{3}$, que era el faltante en la unidad desconocida; finalmente, multiplicaron $\frac{5}{6}$ (que representaba $\frac{1}{3}$ de la unidad desconocida) por tres para obtener la respuesta.

En el caso del inciso b, algunos profesores indicaron que $\frac{2}{3}$ de la unidad que solicitaba el problema representaban $\frac{7}{6}$ del círculo, después buscaron una fracción que multiplicada por $\frac{2}{3}$ diera como resultado $\frac{7}{6}$, y encontraron la fracción $\frac{7}{4}$. Al multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{7}{4}$ obtuvieron $\frac{14}{12}$ (equivalente a $\frac{7}{6}$). Posteriormente dividieron $\frac{7}{4}$ entre 3, con la finalidad de encontrar cuánto representaba un tercio y tuvieron como resultado $\frac{7}{12}$, no obstante la respuesta quedó inconclusa, ya que no dibujaron la unidad. En este procedimiento los profesores involucraron la significación de fracción como operador, al intentar buscar un número que multiplicado por $\frac{2}{3}$ les diera $\frac{7}{6}$; las dificultadas encontraron por los profesores y su resultado inconcluso dan cuenta de la poca familiaridad que mostraron con esta significación.

Un equipo identificó la parte sombreada como $\frac{7}{6}$ indicando que esa fracción representaba las dos terceras partes de la unidad, buscaron una fracción equivalente a la anterior, resultando $\frac{14}{12}$ y dividieron entre dos mentalmente, obteniendo que un tercio representaba $\frac{7}{12}$, dedujeron entonces que la unidad eran $\frac{21}{12}$ y procedieron a dibujarla.

Otros profesores mencionaron que lo que se encontraba sombreado era $\frac{7}{12}$ de la unidad, por lo que concluyeron que hacían faltan $\frac{5}{12}$ para completar la unidad, dejando completamente de lado que la primera fracción representaba $\frac{2}{3}$ de la unidad desconocida. Dos círculos sombreados fueron la representación de la unidad para este grupo de maestros, respuesta

ISBN 978-84-945722-3-4

desde luego incorrecta. Ellos consideraron la unidad como los dos círculos, llegando a la conclusión de que la unidad podía completarse agregando $\frac{5}{12}$ a los $\frac{7}{12}$ sombreados. Su error principal se deriva de pasar por alto la razón 2:1 entre la parte sombreada y la parte no sombreada de la unidad desconocida.

Por otra parte algunos profesores encontraron el resultado $\frac{21}{12}$ de círculo como la unidad solicitada, pero presentaron también como respuesta la representación gráfica de $\frac{14}{8}$ o $\frac{7}{4}$. Estas últimas dos respuestas evidente no provienen de sus cálculos, si no del trabajo realizado sobre la representación gráfica de la repuesta lo cual pone en evidencia las ventajas que ofrecen las representaciones gráficas para representar una fracción de diferentes maneras.

Fue notoria la dificultad que se presentó en la comprensión de un problema en que dos círculos representan una parte de la unidad, y como Lamon (2012) afirma la selección de la unidad es indispensable a la hora de interpretar un problema.

El problema al ser representado con figuras prácticamente obligaba a los profesores a utilizar la heurística "dibujando figuras", que fue la que predominó en este problema. Es notorio que la significación más utiliza por los profesores ha sido la significación parte –todo y aunque aparece también durante la resolución la significación de fracción como operador, ésta última más bien ha surgido como una excepción y no ha conducido a una solución satisfactoria.

Problema número dos

Problema 2
¿Cuántas veces cabe $\frac{1}{3}$ en $\frac{4}{7}$?

Frente a este problema los profesores procedieron como si lo hubieran comprendido claramente y pasaron de inmediato a los procesos algorítmicos, sin embargo cuando trataron de redactar la respuesta la interpretación de sus resultados numéricos generó una serie de dificultades como las siguientes.

Algunos profesores intentaron resolver el problema dividiendo $\frac{1}{3}$ entre $\frac{4}{7}$, obteniendo como resultado $\frac{7}{12}$, para corroborar si el resultado era correcto, intentaron representarlo de forma

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

gráfica, pero no lo lograron una representación coherente, esto hizo que dudaran de la respuesta que tenían pero no pudieron corregirla.

Un equipo dividió $\frac{4}{7}$ entre $\frac{1}{3}$, obteniendo como respuesta $\frac{12}{7}$, del mismo modo que los primeros profesores intentaron representarlo gráficamente pero tuvieron dificultades para hacerlo. La mayoría de los maestros intentaron representar el resultado gráficamente pero no supieron cómo justificar la respuesta que obtuvieron.

Otros maestros convirtieron las fracciones dadas a fracciones equivalentes, quedándose en ese paso solamente y un profesor intentó convertir las fracciones a decimales pero no operó con ellas.

Uno de los equipos llegó a la conclusión de que $\frac{1}{3}$ cabía en $\frac{4}{7}$, una vez y $\frac{5}{7}$. Los argumentos presentados por el equipo se basaron en la comparación entre $\frac{7}{21}$ y $\frac{12}{21}$, lo que los llevo a la interpretación que $\frac{12}{7}$ significa que una fracción cabe en la otra, un entero y $\frac{5}{7}$.

La mayoría de los profesores lo resolvieron muy rápido pero no estaban seguros de la respuesta que habían obtenido. En este problema se observó notoriamente la heurística de verificación del procedimiento, puesto que al obtener el resultado inmediatamente intentaban verificar si esta respuesta era correcta. También los profesores intentaban utilizar la heurística dibujando figuras, sin embargo fue imposible en todos los casos, ya que no pudieron representarlo.

El problema resultó muy difícil para los profesores y los resultados obtenidos de sus operaciones terminaron por hacerlos dudar acerca de si estaban operando bien o no.

La dificultad principal que pudiera estarse presentando pareciera tener que ver con lo que significa que una fracción quepa en otra, y con la significación de fracción como medida.

Problema número tres

Problema 3
Un padre de familia barre el patio de su casa en una hora, pero su hijo lo barre en hora y media. Si barrieran el patio entre los dos, ¿en cuánto tiempo terminarían su tarea?

ISBN 978-84-945722-3-4

Los profesores indicaron que la respuesta correcta era una hora, resolvieron el problema mencionando cuánto representa $\frac{2}{3}$ de la hora en minutos y cuántos minutos representa $\frac{1}{3}$ de hora, obteniendo como resultado entonces 40 y 20 minutos respectivamente, lo sumaron y asumieron que esa era la respuesta. Sin embargo, en la socialización automáticamente se descartó esa respuesta, ya que, el padre en una hora barría todo el patio, por lo que el hijo no se involucraba en el resultado obtenido.

Algunos maestros hicieron una tabla donde representaban en una columna el tiempo que barría y otra la fracción de patio que representaba, esto para los dos personajes involucrados en el problema, después concluyeron que en 15 minutos, que era donde coincidían ambos, el papá barría $\frac{1}{4}$ y el hijo $\frac{1}{6}$, convirtieron estas fracciones a fracciones equivalentes y las sumaron, resultando $\frac{5}{12}$. Finalmente utilizaron una regla de tres para encontrar la respuesta, es así como resultó 36 minutos.

Algunos estudiantes no pudieron resolverlo, otros intentaron utilizar una fórmula de física elemental: $\frac{v}{t}$, otros usaron la descomposición de factores para encontrar el mínimo común múltiplo.

No hubo heurística que se presentaran en los procedimientos de resolución de los profesores, únicamente formas de organizar la información, sin embargo la significación que se mostró fue parte – todo y medida, al considerar el tiempo que barría cada participante del problema e interpretarlo en una fracción del patio.

Incluir la variable del tiempo para resolver el problema, fue una de las dificultades que se presentó en todos los procedimientos de los maestros.

Problema número cuatro

Problema 4
A una persona que pensaba hacer un trámite le pidieron que presentara su credencial de elector ampliada en un 20%. Pero la persona se equivocó y la redujo el 20%. Al momento de hacer el trámite solo contaba con la copia reducida, pero no con el original. ¿Cuánto tuvo que ampliar la copia reducida para que le aceptaran el trámite?

ISBN 978-84-945722-3-4

La respuesta automática al terminar de leer el problema fue 40 %, sin embargo les parecía muy sencilla y obvia, por lo que algunos profesores decidieron hacer cálculos para verificar si lo que pensaban era correcto.

La mayoría de ellos intentó utilizar la regla de tres, indicando que el 100% ahora era el 80 % y lo que se deseaba encontrar era 120%, acomodando de la siguiente manera: $\frac{100}{80} = \frac{120}{x}$, no obstante algunos profesores consideraban poco coherente este método así que desistían. Otros que si lo utilizaron, afirmaron que la respuesta era 96 % lo que se debía aumentar la credencial. El inconveniente en este procedimiento fue el acomodo de los datos para representar lo que el problema solicitaba.

Un equipo representó los porcentajes en fracción de esta manera: 100 % = $\frac{100}{100}$ y restó el 20% que se había reducido la credencial, obteniendo $\frac{80}{100}$, pero lo que se deseaba saber era cuánto porcentaje aumentar la copia reducida para que la copia original se encontrara al 120%, por lo que restó $\frac{120}{100} - \frac{80}{100}$, con esta operación el equipo reiteraba que 40 % era la respuesta. En este caso se representó la credencial reducida y la original a partir de un rectángulo.

La respuesta correcta se dio a partir de la reflexión que el conductor puso en juego. Para confirmar las respuestas de los alumnos se planteó un caso particular y se aplicaron los porcentajes que se han mencionado anteriormente, el cual ninguno de ellos permitía obtener la credencial aumentada 120% de la original. A partir de lo anterior, una profesora mostró la misma regla de tres que al principio de ese problema se menciona, pero acomodada de esto modo: $\frac{100}{80} = \frac{x}{120}$, obteniendo 150 %, que era la respuesta correcta.

En este problema apareció nuevamente la heurística dibujando figuras, y verificando el procedimiento impulsada por el conductor del taller.

Se perdió de vista nuevamente cual era la unidad con la que era necesario trabajar para resolver el problema. También dificultó considerablemente involucrar porcentajes, además se identificó que la regla de tres la utilizan de forma mecánica, ya que en este caso los datos pertenecían a la misma categoría (porcentajes) y no sabían en qué posición colocar a cada uno de ellos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Conclusión

En conclusión los profesores muestran dificultades en identificar la unidad cuando las condiciones son diferentes a las que comúnmente se abordan en clase. Incluir variables como porcentaje, tiempo, entre otras, dificultan la compresión del problema y repercuten en lo mencionado anteriormente.

Las operaciones y técnicas como la división, multiplicación y la regla de tres, son utilizadas mecánicamente, ya que al obtener el resultado es complicado darle significado según lo que solicita el problema.

La heurística "dibujando figuras" predominó en los problemas, los profesores preferían utilizar figuras para representar los datos de cada situación, incluso cuando utilizaron la heurística "verificando procedimiento", tendía a utilizar dibujos para comprobar su respuesta. Sin embargo como se mencionó en el problema dos, al intentar verificar los problemas con figuras, está no facilitaba la comprobación, es decir, limitaba el procedimiento, es por esto, la importancia de aprender y utilizar otras técnicas, ya que muy probablemente una podría no funcionar en todos los problemas.

Las significación "parte – todo" se presentó en la mayoría de los problemas, aun siendo la significación más popular, se identificaron severos problemas como no identificar la unidad con la que se está trabajando y la complicación por comprender un problema que representa a una fracción menor a la unidad en más de una figura.

También se identificó en uno o dos procedimientos la significación como "operador", sin embargo es preocupante cómo los problemas de fracción como razón que se incluyeron en el taller, menos de la cuarta parte del grupo de profesores pudo resolverlo. Esto nos dice, que así como existe un escaso conocimiento de las técnicas heurísticas también la hay en las significaciones del concepto de fracción.

Referencias bibliográficas

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London. Academic Press INC.

Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and ratios for understanding*. New York. Routledge 3ra Edition.

ISBN 978-84-945722-3-4