

## CONEXIONES ENTRE EL CÁLCULO Y OTRAS ÁREAS DEL CONOCIMIENTO: MOVIMIENTO DE UNA PELOTA EN CAÍDA LIBRE

Eugenia Marmolejo Rivas  
emarmolejo@ciencias.unam.mx  
Universidad Nacional Autónoma de México, México

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Cálculo, Modelización, Tracker

### Resumen

*Uno de los propósitos del primer curso de cálculo a nivel universitario es introducir los conceptos y métodos de la matemática superior y hacer conexiones con otras áreas del conocimiento. Se hace énfasis en que el cálculo es una herramienta indispensable para modelar fenómenos relativos al cambio. Una excelente manera de hacer que los alumnos hagan conexiones con otras áreas es a través de actividades de modelización. En esta comunicación presentamos la forma en que utilizamos el movimiento de una pelota en caída libre como parte integral del curso. Aunado a esto, los modelos que los alumnos obtienen se usan durante el resto del curso para introducir varios conceptos matemáticos.*

### Introducción

Uno de los propósitos del curso de cálculo es introducir a los alumnos a los conceptos y métodos de la matemática superior poniendo énfasis en que el cálculo es una herramienta indispensable para modelar fenómenos relativos al cambio. Nos interesa promover que los alumnos hagan conexiones con otras áreas del conocimiento dentro de un ambiente matemático. En términos generales, cuando los alumnos tienen las ecuaciones que describen la posición de un objeto en movimiento, sí hacen la conexión de que la derivada de la posición con respecto al tiempo es la velocidad, y de que la derivada de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración; sin embargo, los alumnos no hacen con tanta facilidad la conexión cuando se les da como punto de partida el estudiar un cuerpo en movimiento. Con el objetivo de fomentar que los estudiantes hagan dichas conexiones, los alumnos de Cálculo I llevaron a cabo un proceso de modelización completo. Les pedimos que estudiaran el movimiento de una pelota de pimpón incluyendo sus rebotes; como punto de partida, hicieron conjeturas y para terminar entregaron un informe con todos sus modelos y conclusiones. Los modelos

que los alumnos construyeron se usarán durante el resto del curso para introducir conceptos matemáticos como continuidad, derivada, tangente, velocidad instantánea, derivada por la derecha, derivada por la izquierda y máximos y mínimos. En este documento les presentamos el caso de Marco, uno de los alumnos del curso, para ilustrar el tipo de reto que representa pedirles a los alumnos que analicen el movimiento de una pelota en caída libre.

### **Método**

A 10 alumnos de Cálculo I del primer semestre de las licenciaturas de actuaría, física y matemáticas se les pidió que estudiaran el movimiento de una pelota y recibieron las siguientes instrucciones:

Supongamos que una pelota se deja caer desde una altura inicial  $h$  y que la pelota cae verticalmente sobre una superficie lisa. De manera individual, en la hora de la clase y usando únicamente una pelota de pimpón y papel y lápiz, haz conjeturas sobre cómo crees que serían las gráficas de la posición, velocidad y aceleración de la pelota y sus rebotes sucesivos con respecto al tiempo. Dibuja un boceto de tus conjeturas para la posición, uno para la velocidad y uno para la aceleración. Justifica tus respuestas.

Trabajando en equipo y usando una cámara de video, un trípode, una regla y una pelota de pimpón, filma el movimiento de la pelota.

Trabajando en equipo y usando el programa Tracker —el cual permite analizar el movimiento de un objeto a partir de un video— obtén los datos de la posición de la pelota, incluyendo sus rebotes, con respecto al tiempo.

A los alumnos se les pidió que, trabajando en equipo o de manera individual, escribieran un informe en el que incluyeran todo su trabajo de modelización y se les dio siete días para entregarlo.

A los alumnos no se les dio ninguna otra instrucción y tuvieron acceso a computadoras con programas como Word, Excel y Wolfram Mathematica. Y tenían acceso en línea a GeoGebra y LaTeX.

En el Anexo I se presentan los detalles sobre la forma en la que los alumnos hicieron el experimento y un ejemplo que ilustra los datos que obtuvieron.

### **El trabajo de Marco**

Marco es un alumno de 20 años inscrito en el curso de Cálculo I. Se usará su trabajo para discutir lo que se puede hacer para promover que los alumnos hagan conexiones con problemas de otras áreas del conocimiento.

### a) Conjeturas

De acuerdo con las instrucciones que recibió, Marco empezó por hacer las conjeturas de la posición, la velocidad y la aceleración de la pelota con respecto al tiempo (Figura 1).

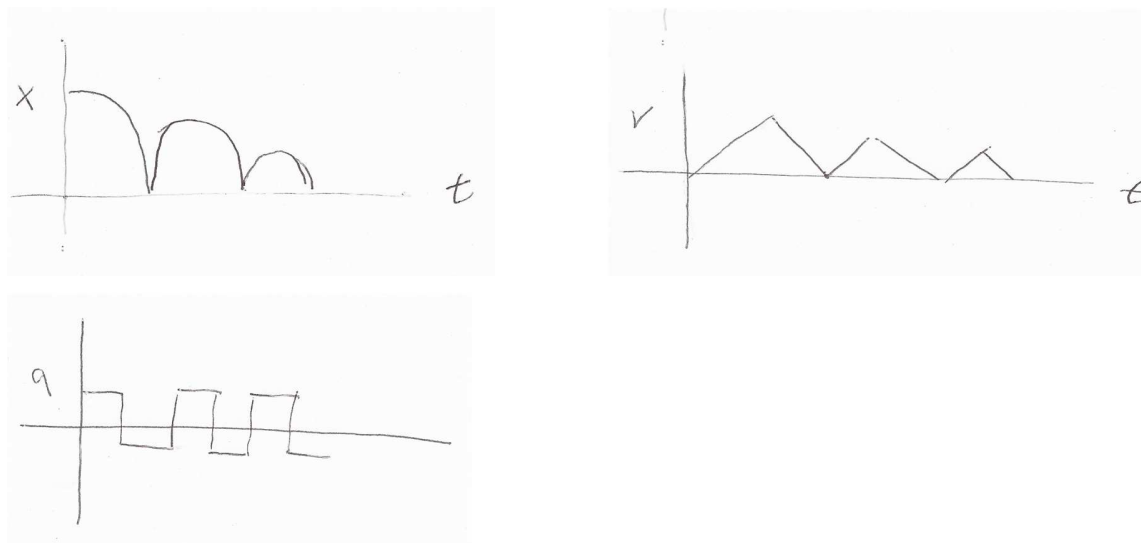


Figura 1 Conjeturas de Marco del movimiento de la pelota en caída libre y dos rebotes. (Dibujo hecho a mano a partir de los dibujos de Marco para obtener mejor calidad).

¿Qué podemos observar en dichos bocetos? Lo primero que vemos es que la conjetura de Marco sobre la gráfica de la posición de la pelota en caída libre y sus rebotes es acertada. Marco coloca la posición de la pelota a una altura inicial  $h$ , la cual es la altura de la que se deja caer la pelota. A continuación considera dos rebotes y observa que después de cada colisión la altura máxima que alcanza la pelota es menor que en el rebote anterior.

En el boceto para la gráfica de velocidad, lo primero que observamos es que la velocidad nunca es negativa. Esto indica que en realidad lo que Marco dibujó fue la rapidez y no la velocidad (la rapidez indica la magnitud de la velocidad sin tomar en cuenta la dirección del movimiento). En su boceto, la rapidez inicial es cero, lo cual es correcto, pues los alumnos dejaron caer la pelota en caída libre sin darle impulso alguno. La rapidez va aumentando, llega a un máximo, y disminuye hasta llegar a cero. Marco repitió este ciclo tres veces para

intentar representar los rebotes. De su gráfica se puede concluir que la rapidez antes y después del rebote son iguales; mientras que la rapidez después del bote es mayor que la rapidez con la que llega al suelo.

El boceto de la velocidad que Marco podría haber obtenido de haber considerado la dirección del movimiento y que la velocidad de la pelota disminuye después del rebote sería como el que se muestra en la Figura 2.

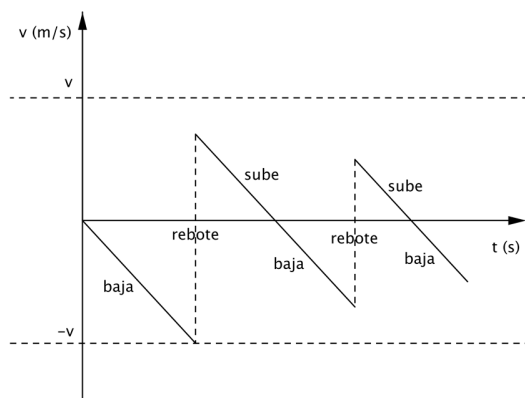


Figura 2 Gráfica de la velocidad.

Al terminar su trabajo de modelización Marco debería llegar a la conclusión de que su conjetura para la velocidad no es correcta pues no consideró que la velocidad de la pelota disminuye después del rebote.

De la gráfica de la aceleración podemos observar que Marco considera correctamente a la aceleración como una constante. La gráfica que dibujó corresponde con su gráfica de la rapidez; sin embargo no describe correctamente el movimiento que se está estudiando. La gráfica de la aceleración que Marco debería haber dibujado en sus conjeturas se muestra en la Figura 3.

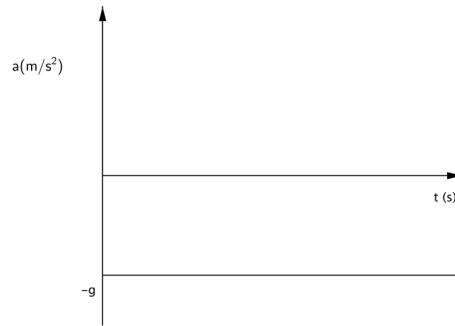


Figura 3 Gráfica de la aceleración.

Dos formas en la que se podría mejorar esta parte de la actividad son: 1) una vez que los alumnos hacen sus conjeturas iniciales, pedirles que repitan sus bocetos de tal forma que los ejes tengan la misma escala en cada uno de ellos y que traten de coordinar los bocetos entre sí, 2) al leer los informes de Marco y del resto de los alumnos se observa que ninguno de los alumnos intentó explicar por qué la pelota va perdiendo altura, por lo que se les podría pedir que contesten la siguiente pregunta: ¿a qué se debe que la pelota vaya perdiendo altura?

#### b) Modelo definido a trozos

El siguiente paso que hizo Marco fue obtener modelos matemáticos que describen el movimiento de la pelota. En la Figura 4 se presentan los modelos para la posición, la velocidad y la aceleración con respecto al tiempo que Marco propone para describir el movimiento de la pelota en caída libre.

$$y = \begin{cases} -5.3t^2 - 0.09t + 1.043, & t \in (0, 0.43) \\ -5.17t^2 + 8.4t - 2.65, & t \in (0.43, 1.2) \\ -5.5t^2 + 16.7t - 12.1, & t \in (1.2, 1.84) \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} -2(5.3)t - 0.09, & t \in (0, 0.43) \\ -2(5.17)t + 8.4, & t \in (0.43, 1.2) \\ -2(5.5)t + 16.7, & t \in (1.2, 1.84) \end{cases}$$

$$a = \begin{cases} -2(5.3), & t \in (0, 0.43) \\ -2(5.17), & t \in (0.43, 1.2) \\ -2(5.5), & t \in (1.2, 1.84) \end{cases}$$

Figura 4 Modelos de Marco del movimiento de la pelota en caída libre y dos rebotes.

¿Cómo llegó Marco a esta propuesta? Marco copió los datos de la posición obtenidos con el programa Tracker en una hoja de cálculo en Excel. Primero hizo un ajuste polinomial de grado cinco con la idea de obtener un modelo con una sola expresión.

Al ver que el polinomio de grado cinco se desviaba significativamente de los datos, Marco preguntó que si podía usar tres expresiones para su modelo, a lo que se le respondió que sí. Decidió, atinadamente, separar la información en las siguientes tres partes: los datos del inicio del movimiento hasta el primer rebote, Tabla A, los datos del primero al segundo rebote, Tabla B, y los datos del segundo al tercer rebote, Tabla C (Tabla 1).

Tabla A		Tabla B		Tabla C	
Tiempo (s)	Distancia (m)	Tiempo (s)	Distancia (m)	Tiempo (s)	Distancia(m)
0.03	1.03	0.43	0.01	1.23	0.15
0.07	1.01	0.47	0.15	1.27	0.25
0.10	0.98	0.50	0.27	1.30	0.34
0.13	0.94	0.53	0.37	1.33	0.41
0.17	0.88	0.57	0.46	1.37	0.46
0.20	0.81	0.60	0.54	1.40	0.52
0.23	0.73	0.63	0.60	1.43	0.54
0.27	0.64	0.67	0.65	1.47	0.57
0.30	0.54	0.70	0.70	1.50	0.59
0.33	0.41	0.73	0.73	1.53	0.59
0.37	0.29	0.77	0.75	1.57	0.58
0.40	0.14	0.80	0.75	1.60	0.56
0.43	0.01	0.83	0.76	1.63	0.53
		0.87	0.75	1.67	0.49
		0.90	0.73	1.70	0.43
		0.93	0.69	1.74	0.35
		0.97	0.65	1.77	0.26
		1.00	0.58	1.80	0.15
		1.03	0.51	1.84	0.03
		1.07	0.42		
		1.10	0.32		
		1.13	0.21		
		1.17	0.08		
		1.20	0.02		

Tabla 1 Datos de Marco de la posición de la pelota en caída libre y sus rebotes obtenidos con Tracker.

Muchos alumnos piensan que una función debe estar dada por una sola expresión (Vinner, 1983), lo cual puede deberse a que los alumnos han experimentado poco con otro tipo de funciones.

A continuación Marco obtuvo un modelo para la posición por medio de hacer un ajuste polinomial de grado dos en cada una de las partes en las que dividió sus datos. Obteniendo así un modelo polinomial a trozos compuesto de tres expresiones. Derivando obtuvo los modelos de la velocidad y de la aceleración. Las funciones definidas a trozos son muy útiles

para modelar fenómenos de la vida real, otro ejemplo se puede encontrar en Marmolejo (2015).

Con los modelos así obtenidos, Marco usó Excel para tabular (Anexo II) y generó las gráficas que se muestran en de las Figuras 5, 6 y 7.

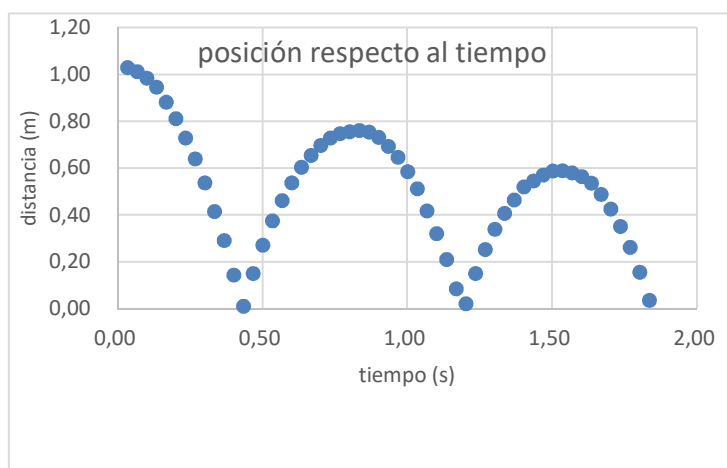


Figura 5 Gráfica de Marco de la posición de la pelota en caída libre y dos rebotes

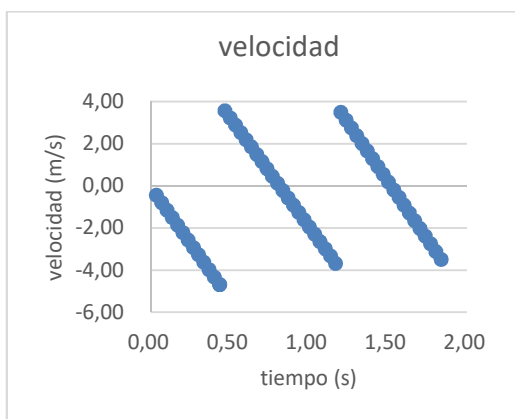


Figura 6 Gráfica de Marco de la velocidad de la pelota en caída libre y dos rebotes

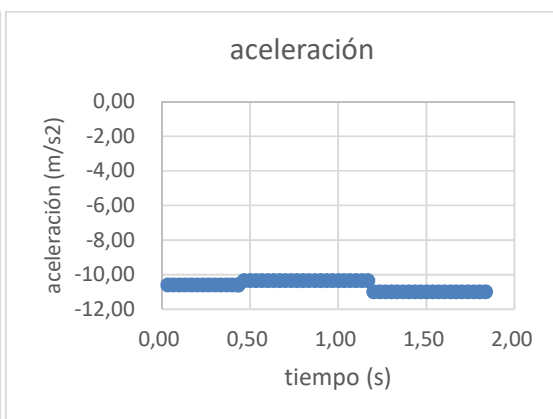


Figura 7 Gráfica de Marco de la aceleración de la pelota en caída libre y dos rebotes

En términos generales Marco hizo un buen trabajo dado que produjo conjeturas, obtuvo modelos que describen adecuadamente el movimiento de la pelota en caída libre y usó sus modelos para generar gráficas. Al observar que la gráfica de la aceleración no le dio una línea recta Marco

propuso mejorar las condiciones experimentales, pues supuso que su gráfica de la aceleración no es constante debido a errores de medición (Figura 7). Sin embargo, Marco no hizo ninguna propuesta concreta de cómo podría mejorarse el experimento. Otra cosa que Marco podría haber hecho es comparar sus conjeturas con los modelos obtenidos y reflexionar sobre las similitudes y las diferencias.

### **¿Qué hacer una vez que se tienen los modelos de los alumnos?**

Los modelos que Marco propuso son los que usaremos en el resto del curso para mantener la conexión entre el cálculo y otras áreas del conocimiento. Usaremos el modelo de la posición para definir la velocidad instantánea y como ejemplo de una función continua no diferenciable, calcularemos las derivadas por la derecha y por la izquierda y encontraremos además los máximos y los mínimos. Comentaremos que dado que el modelo de la posición no es diferenciable en los rebotes, la derivada de la posición con respecto al tiempo no existe en esos puntos. Haremos énfasis en que los modelos de Marco son modelos simplificados, y examinaremos las suposiciones que se hacen al hacer trabajos de modelización. Por ejemplo, que el tiempo de contacto con el suelo es cero y que como consecuencia se obtiene un modelo discontinuo para la velocidad.

El curso de cálculo concluirá con la realización, por parte de los alumnos, de un experimento en el que se analicen un fenómeno físico de su elección. Esta actividad tiene como objetivo seguir fomentando el que los alumnos hagan conexiones en otras áreas del conocimiento, mostrar sus habilidades para representar el mundo real, resolver problemas y aplicar el cálculo.

### **Conclusiones**

Una de las cosas que se puede hacer para promover que los alumnos hagan conexiones con otras áreas del conocimiento es darles tiempo para que realicen actividades de modelización. El ejemplo de la pelota en caída libre y sus rebotes es una actividad que se presta para poder hacer la conexión entre la relación que hay entre el cambio de posición con respecto al tiempo y la velocidad, y la relación que hay entre el cambio de velocidad con respecto al tiempo y la aceleración. Este tipo de actividades le da la oportunidad a los alumnos de llevar a cabo



un proceso completo de modelización, de examinar si sus conjeturas son válidas o no, de proponer y comparar modelos y de aplicar sus conocimientos de cálculo. Al maestro le da la oportunidad de introducir y ejemplificar conceptos de la materia y promover que los alumnos reflexionen sobre las suposiciones y las ventajas y desventajas de usar modelos cuando se describen fenómenos físicos.

### **Agradecimientos**

Deseo extender mi gratitud a los alumnos que participaron en esta actividad, en particular a Marco. También agradezco el apoyo brindado por el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática de la UNAM. Asimismo, a Gabriela Marmolejo Rivas por sus sugerencias en la mejora del manuscrito y a Ricardo Fragosó por haber facilitado la cámara para filmar.

### **Referencias bibliográficas**

Marmolejo, E. (2015). Modelling in action. Examining How Students Approach Modelling Real Life Situations. Three Case Studies. Model of the Movement of an Elevator. The International Journal for Technology in Mathematics Education, 22(3), 123-129.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function, The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 14, 293-305.

Programa: Tracker video analysis and modeling tool disponible en:

<http://physlets.org/tracker/>

### **Anexo 1. El experimento**

Para realizar el experimento, los alumnos tuvieron a su disposición una cámara de video, un trípode, una regla y una pelota de pimpón para grabar el movimiento de la pelota. Pintaron de rojo la pelota para que fuera más fácil rastrearla. Obtuvieron los datos de la posición con respecto al tiempo, usando el programa Tracker que permite analizar el movimiento a partir de un video. En la imagen se muestra una captura de pantalla en la que se puede apreciar una imagen del video tomado por los estudiantes y la gráfica y los datos de la posición con respecto al tiempo obtenidos con el programa Tracker.

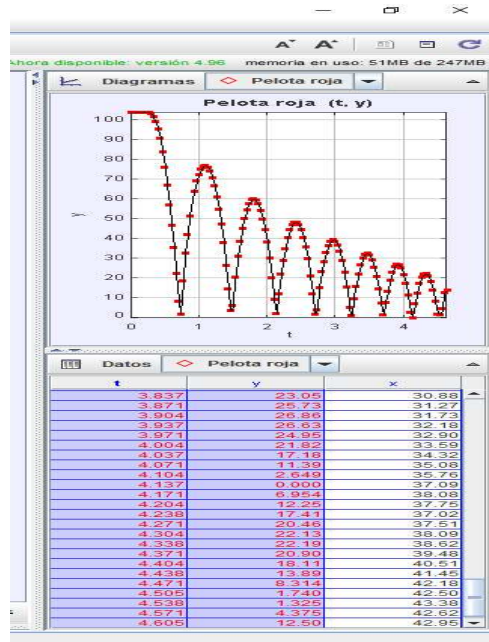


Figura 4 Un cuadro del video tomado por los estudiantes (izquierda). Captura de pantalla de una parte de la pantalla del programa Tracker (derecha)

**Anexo 2. Tabulación de Marco de la posición, la velocidad y la aceleración usando sus modelos y Excel.**

Tiempo	Posición	Velocidad	Aceleración
0.03	1.03	-0.44	-10.60
0.07	1.01	-0.80	-10.60
0.10	0.98	-1.15	-10.60
0.13	0.94	-1.50	-10.60
0.17	0.88	-1.86	-10.60

0.20	0.81	-2.21	-10.60
0.23	0.73	-2.57	-10.60
0.27	0.64	-2.92	-10.60
0.30	0.54	-3.27	-10.60
0.33	0.42	-3.63	-10.60
0.37	0.30	-3.98	-10.60
0.40	0.16	-4.33	-10.60
0.43	0.01	-4.69	-10.60
0.43	0.01	-4.69	-10.60
0.47	0.15	3.57	-10.34
0.50	0.26	3.22	-10.34
0.53	0.36	2.88	-10.34
0.57	0.45	2.53	-10.34
0.60	0.53	2.19	-10.34
0.63	0.60	1.84	-10.34
0.67	0.65	1.50	-10.34
0.70	0.70	1.15	-10.34
0.73	0.73	0.81	-10.34
0.77	0.75	0.46	-10.34
0.80	0.76	0.12	-10.34
0.83	0.76	-0.23	-10.34
0.87	0.75	-0.57	-10.34
0.90	0.72	-0.92	-10.34
0.93	0.69	-1.26	-10.34
0.97	0.64	-1.61	-10.34
1.00	0.58	-1.95	-10.34
1.03	0.51	-2.30	-10.34
1.07	0.42	-2.64	-10.34
1.10	0.33	-2.99	-10.34
1.13	0.23	-3.33	-10.34
1.17	0.11	-3.68	-10.34
1.20	0.02	3.49	-11.00
1.23	0.13	3.12	-11.00
1.27	0.23	2.75	-11.00
1.30	0.32	2.39	-11.00
1.33	0.39	2.02	-11.00
1.37	0.45	1.65	-11.00
1.40	0.50	1.28	-11.00
1.43	0.54	0.92	-11.00
1.47	0.56	0.55	-11.00
1.50	0.58	0.18	-11.00
1.53	0.58	-0.18	-11.00
1.57	0.56	-0.55	-11.00
1.60	0.54	-0.92	-11.00
1.63	0.50	-1.28	-11.00
1.67	0.45	-1.65	-11.00
1.70	0.39	-2.02	-11.00
1.74	0.32	-2.39	-11.00
1.77	0.23	-2.75	-11.00
1.80	0.13	-3.12	-11.00
1.84	0.02	-3.49	-11.00