

## ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS

Prof. Ing. Irma Zulema Martínez<sup>1,2\*</sup> Prof. Ing. Sergio Hernán Crespo<sup>1\*</sup>

\*\* [irmart@unsa.edu.ar](mailto:irmart@unsa.edu.ar) \*[screspo@ucasal.net](mailto:screspo@ucasal.net)

Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales<sup>1</sup> - Universidad Nacional de Salta –  
Salta – República Argentina

Facultad de Ciencias Exactas<sup>2</sup> Universidad Nacional de Salta – Salta – República  
Argentina

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades  
y niveles educativos.

Modalidad: CB

Nivel Educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)

Palabras Claves: Enseñanza, Aprendizaje, aprendizajes significativos.

### Resumen

*En esta época, caracterizada por la rapidez en que los conocimientos científicos, saberes profesionales, avances tecnológicos; se producen, el docente debe exigirse continuamente. No sólo es suficiente que domine su campo específico, sino también debe hacerlo en el encuadre pedagógico - didáctico. Esto se traduce en la selección, diseño, conducción y evaluación de estrategias de enseñanza para promover en sus alumnos una interacción entre conocimientos previos y nuevos, permitiendo que adquieran aprendizajes significativos. En este contexto, el aprendizaje se facilita cuando los contenidos están presentados en forma organizada con un lineamiento secuencial, tanto lógica como psicológicamente, favoreciendo al alumno. A través de esta comunicación, queremos compartir una serie de aportes técnico - pedagógicos teniendo como objetivos:*

- *Brindar aportes que mejoren el proceso de enseñanza-aprendizaje.*
- *Exponer el desarrollo de estrategias y favorecer la tarea de enseñanza*
- *Mejorar la actitud de autoaprendizaje en los alumnos.*

*En el presente trabajo también se realiza una revisión de las características y limitaciones de las estrategias instruccionales de enseñanza, aplicados a un tema particular “Programación Lineal” del programa de la asignatura Matemática I correspondiente al primer año de la carrera Licenciatura en Economía.*

### Introducción

En búsqueda de una participación más activa de nuestros alumnos, se realizaron actividades tanto teóricas como prácticas, para el tema Programación Lineal, teniendo en cuenta que una de nuestras tareas principales como docentes es estimular la motivación y participación

activa de los mismos para aumentar la significatividad potencial de los contenidos académicos, teniendo en cuenta las características y limitaciones de las estrategias instruccionales de enseñanza para la promoción de aprendizajes significativos.

El presente trabajo realiza una revisión, aplicados al tema Programación Lineal.

### **Fundamentación. Principios de Instrucción derivados de la Teoría del Aprendizaje Verbal Significativo**

En la tarea de enseñar se tienen en cuenta, no sólo el encuentro de dos voluntades, la de aprender y la de enseñar, sino que deben instrumentalizarse metodologías orientadas para lograr que los estudiantes, adquieran y manejen por si mismos los contenidos. Tales metodologías se basan en los *principios de instrucción derivados de la teoría del aprendizaje verbal significativo*, que ilustramos a continuación:

1. El aprendizaje se facilita cuando los contenidos se le presentan al alumno convenientemente organizados y siguiendo una secuencia lógica psicológica apropiada.
2. Es conveniente delimitar intencionalidad y contenidos de aprendizajes en una progresión continua que respete niveles de inclusividad, abstracción y generalidad.
3. Los contenidos de aprendizaje, deben presentarse en forma de sistemas conceptuales organizados, interrelacionados y jerarquizados, y no como datos aislados y sin orden.
4. La activación de los conocimientos y experiencias previas que posee el alumno, facilitara los procesos de aprendizajes significativos de nuevos materiales de estudio.
5. El establecimiento de “puentes cognoscitivos” (conceptos o ideas generales conocidos previamente) pueden orientar al alumno a detectar las ideas fundamentales, a organizarlas e integrarlas significativamente
6. Los contenidos aprendidos significativamente (por recepción o por descubrimiento) serán más estable, menos vulnerables al olvido y permitirán la transferencia de lo aprendido, sobre todo si se trata de conceptos generales integradores.

### **Estrategias de enseñanza**

Son recursos utilizados por el docente, para promover aprendizajes significativos.

**Objetivos** Enunciado que explícita: condiciones, tipos de actividad y forma de evaluación del aprendizaje del alumno.

**Resumen** Síntesis y abstracción de la información relevante de un discurso oral o escrito. Enfatiza conceptos claves, principios, términos y argumento central.

**Organizador previo** Información de tipo introductoria y contextual. Tienden un puente cognitivo entre la información nueva con la previa.

**Ilustraciones** Representación visual de los conceptos, objetos o situaciones de una teoría o tema específico (fotografías, dibujos, esquemas, gráficas, dramatizaciones etc.)

**Analogías** Proposición que indica que una cosa o evento (concreto y familiar) es semejante a otro (desconocido y abstracto o complejo)

**Preguntas intercaladas** Preguntas insertadas en la situación instruccional. Mantiene la atención y favorecen: la práctica, la retención y la obtención de información relevante.

**Pistas tipográficas** Señalamientos que se hacen en un texto o en la situación de enseñanza para enfatizar y organizar elementos relevantes del contenido a aprender.

**Mapas conceptuales y redes semánticas** Representación gráfica de esquemas de conocimiento (indican conceptos, proposiciones y explicaciones)

**Uso de estructuras textuales** Organizaciones retóricas de un discurso oral o escrito, que influyen en la comprensión y recuerdo del mismo

**Estrategias instruccionales más frecuentes, de acuerdo al momento de aplicación**

- i) Preinstruccionales: Objetivos. Organizadores previos.
- ii) Construccionales: Diagrama de Venn. Cuadros sinópticos. Ilustraciones. Redes semánticas. Mapas semánticos. Mapas conceptuales. Analogías. Pistas tipográficas. Estructura de textos.
- iii) Postinstruccionales Resúmenes finales Redes semánticas Mapas conceptuales

**Desarrollo. Plan de acción a desarrollar en el tema: Programación Lineal**

**Marco contextual**

El tema a desarrollar se encuentra en el programa de contenidos de la asignatura Matemática I de la Facultad de Cs Económicas de la Universidad Nacional de Salta.

**Objetivos Que los alumnos:**

- Traduzcan del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico
- Modelicen situaciones problemáticas, expresando las condiciones con inecuaciones lineales, utilicen la operatoria propia de las inecuaciones lineales para resolver.
- Se familiaricen con las inecuaciones, función objetivo, resuelvan y determinen analizando críticamente, las soluciones requeridas.

## Resumen de Temas a desarrollar

En la enseñanza del tema programación lineal es imprescindible adoptar una correcta secuenciación, organización y temporalización de los contenidos, el dictado se desarrolló como a continuación se presenta:

- Concepto de inecuación lineal con varias variables. Sistema de inecuaciones lineales. Resolución de sistemas de inecuaciones lineales
- Programación lineal. Problema de Aplicación.

Los primeros contenidos se presentaron como organizadores.

### Marco teórico

Se presenta a continuación un resumen que contiene los aspectos teóricos necesarios para que el alumno pueda desarrollar la guía de trabajo práctico y la estrategia utilizada.

*Concepto de inecuación con n variables lineal* (Pista Tipográfica Organizador Previo)

**Definición: La expresión:**  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n < b$  **se denomina** inecuación lineal en las variables  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . **Los coeficientes**  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  **son números reales y no pueden ser simultáneamente nulos.**

Ejemplo:  $x + y \leq 3$  es una inecuación lineal en las variables  $x$  e  $y$ .

*Concepto de solución de inecuación lineal* (Pista Tipográfica Organizador Previo)

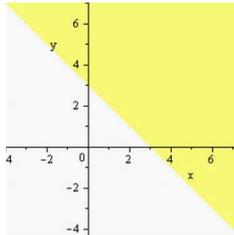
**Definición: Al conjunto de números**  $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$  **se le llama solución de la inecuación**  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n < b$  **si al sustituirlo en la inecuación, satisface a la misma.**

Ej. El par  $(1, 2)$  es solución de la inecuación ejemplificada, pues la verifica.

*Concepto de Método gráfico para Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos Variables* (Pista Tipográfica Organizador Previo)

Para resolver las inecuaciones lineales en las variables  $x$  e  $y$ , se utiliza el método gráfico. Se grafica la ecuación (recta) asociada a la inecuación dada: que divide al plano en dos semiplanos. Para determinar el conjunto solución, se considera cualquier punto que no esté

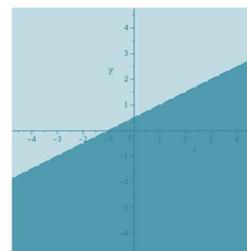
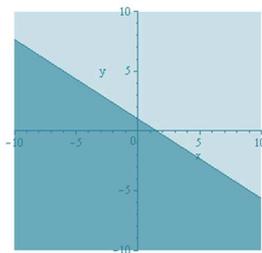
sobre la recta y se reemplaza sus coordenadas en la inecuación, si verifica, es el semiplano buscado, caso contrario, el otro. En el ej. la solución gráfica:



y la solución:  $S = \{(x, y) / x + y \leq 3\}$

Para las siguientes inecuaciones  $2x+3y \leq 3$ ,  $-x+2y < 1$ , se realizan las gráficas de las rectas correspondientes  $2x+3y=3$ ,  $-x+2y=1$ . La solución gráfica para las mismas:

$2x+3y \leq 3$      $S = \{(x, y) / 2x + 3y \leq 3\}$        $-x+2y < 1$      $S = \{(x, y) / -x + 2y < 1\}$



Si la desigualdad es estricta  $< \text{ ó } >$ , se dibuja una recta punteada, pues los puntos que están en la misma, no están en el conjunto solución.

*Sistema de inecuaciones lineales en n variables (Pista Tipográfica Organizador Previo)*

**Definición: Un conjunto de  $m$  inecuaciones lineales en las variables  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  se llama sistema de inecuaciones lineales.**

En símbolos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \neq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \neq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \neq b_m \end{cases}$$

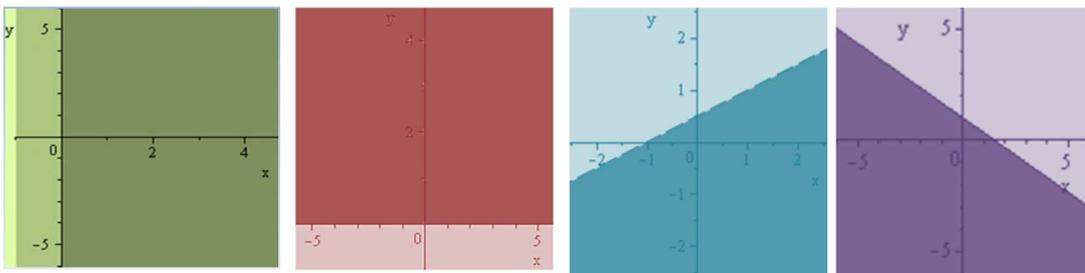
Observación: Como se tienen cuatro clases diferentes de desigualdades, se ha puesto el signo  $\neq$  para referirse a cualesquiera de ellas. Esto no es una escritura convencional sino simplemente cómoda.

Ejemplo: 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ -x + 2y < 1 \\ 2x + 3y \leq 3 \end{cases}$$

Definición: El conjunto de números  $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$  se le llama solución de un sistema de desigualdades lineales en las variables  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  si y sólo si satisface a cada una de las desigualdades del sistema.

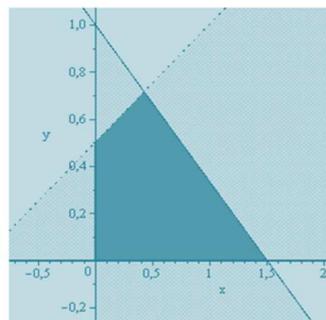
*Solución Sistema de inecuaciones lineales* (Pista Tipográfica Organizador Previo)

Para resolver gráficamente un sistema de desigualdades lineales en dos variables  $x$  e  $y$ , se representan en un único plano cartesiano las soluciones gráficas de cada inecuación del sistema. La región común a cada una de ellas es la solución. En el caso del sistema ejemplificando se siguen los siguientes pasos realizar: Paso1: realizar  $x \geq 0$ , Paso2: realizar  $y \geq 0$ , Paso3: realizar  $-x + 2y < 1$ , Paso 4: realizar  $2x + 3y \leq 3$



Paso5: Superponer los diagramas anteriores de las inecuaciones,

$x \geq 0, y \geq 0, -x + 2y < 1, 2x + 3y \leq 3$  De modo de encontrar la región común, en definitiva, la



Solución gráfica es:

*Región Factible* (Pista Tipográfica Organizador Previo)

Definición: El **conjunto de puntos del plano** o del espacio que corresponde a la solución de un sistema de desigualdades lineales se llama **región viable** o **región factible**

**Ejemplo** la región factible del ej. Anterior es la del paso 5.

La región factible puede estar acotada o no.

*Concepto de Programación Lineal* (Pista Tipográfica Organizador Previo)

Básicamente un problema de programación lineal corresponde a buscar la solución óptima (ya sea un mínimo o un máximo) de una función según condiciones particulares. Esa función y las condiciones son lineales. En general, corresponde a muchas variables, pero en este caso nos restringiremos a dos,  $x$  e  $y$ .

En un problema de programación lineal interviene

- Una expresión de la forma:  $C = A x + B y + K$  donde  $A$ ,  $B$  y  $K$ , son números reales,  $(x, y)$  son puntos del plano cartesiano

- Un sistema de desigualdades lineales: 
$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y \leq b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x + a_{m2} y \leq b_m \end{cases}$$
 que involucra una

región factible del plano cartesiano.

**Definición:** La expresión  $C = A x + B y + K$  se denomina función objetivo, el sistema de desigualdades es el conjunto de restricciones, y el conjunto solución de este es la región factible o viable.

La solución óptima se encuentra en los vértices de la región factible. Por lo tanto hay que conocer las coordenadas de dichos vértices y reemplazarlas en la función objetivo. El valor mínimo o máximo, según el caso, es la solución buscada.

### **Esquema práctico a seguir con los problemas de Aplicación: Síntesis**

Lectura consciente del enunciado

Expresar las restricciones (desigualdades)

Representar gráficamente las desigualdades y determinar la región (poligonal)

Encontrar las coordenadas de los puntos que son vértices de la poligonal

Determinar la función objetivo

Valorizar la función objetivo en esos puntos

Determinar en cuales de estos puntos, la función objetivo tiene el máximo valor

(maximizar) ó el mínimo (minimizar)

## **Metodología empleada para desarrollar el tema Programación Lineal**

**I.** Se inicia la actividad con una conferencia orientadora sobre el tema a tratar con el sumario siguiente:

A) Inecuaciones lineales. Sistemas de inecuaciones lineales

B) Métodos de resolución de Sistemas de inecuaciones lineales. Conjunto solución

C) Programación Lineal. Aplicaciones

**II.** Interpretación geométrica

Partiendo de los conocimientos previos se enfatiza: sistema de inecuaciones lineales, conjunto solución; programación lineal, región factible; interpretación geométrica.

**III.** Se integrarán grupos de 6 miembros cada uno, por medio de la técnica de *frases incompletas*, para trabajar, resolviendo problemas de aplicación, discutiendo y sacando conclusiones finales.

Los temas para trabajar son Problemas de aplicación

1. Con región factible acotada y no acotada.

2. Para maximizar o minimizar la función objetivo.

**IV.** Los grupos así conformados discuten argumentando sus afirmaciones y designan a uno de ellos como miembro informante, en cada grupo. Estos como representante de cada equipo, expone ordenadamente los conceptos adquiridos y los resultados obtenidos. El profesor aclara, rectifica o confirma el estudio presentado y discutido.

**V.** Se facilita a los alumnos una guía con problemas para ser resueltos. Cada equipo, abordará la solución del conjunto de problema asignado, con el método estudiado

**VI** A continuación, los alumnos se reagrupan de la siguiente manera, empleando la técnica de la rejilla que consiste en: *cada grupo estará conformado por alumnos que posean tarjetas de distinto color*

**VII** Ahora, cada uno de los nuevos grupos discuten, analizan, sacan conclusiones generales sobre la resolución de las situaciones propuestas en la guía. Así, los integrantes logran un conocimiento total de la actividad propuesta en la guía

**VIII** En un plenario, se analizan dificultades que se presentaron en el abordaje de cada problema, lo que resultó familiar, las críticas y formulación de propuestas para lograr una conclusión final obtenida a que es evaluada por el docente.

**IX** En este momento, se presenta un incidente sencillo, que consiste en presentar a los alumnos una situación atípica para ser analizada. Los estudiantes, descubrirán las distintas posibilidades que conducen a encontrar una solución.

### **Resultados. Conclusiones**

Las experiencias realizadas, en distintas ocasiones aplicando esta metodología, nos condujo a resultados alentadores, tanto en coloquios y parciales mejorando los resultados en un 20% de los habituales y en las encuestas realizadas, a los alumnos, se mostraron interesados en esta propuesta para abordar los distintos temas, si bien se mantuvieron los errores en hallar correctamente las restricciones, debido a equivocaciones en el armado de las mismas, como también en la resolución de los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas .

El Trabajo Práctico realizado estuvo en coherencia, con el desarrollo llevado en la parte teórica, es decir teniendo en cuenta las estrategias instruccionales de enseñanza, como también los Principios de Instrucción derivados de la Teoría del Aprendizaje Verbal Significativo, se elaboraron ejercicios con diferentes estrategias tales como: Uso de preguntas intercaladas, Ilustraciones, Analogías etc. y se trabajaron algunos ejercicios del trabajo práctico, también en forma grupal, siendo más beneficiosa esta forma de trabajo, pero también haciendo más extenso el tiempo de desarrollo del práctico. A modo de ilustrar este desarrollo se presenta en el anexo un ejemplo de aplicación y la síntesis correspondiente al tema de estudio.

### **Bibliografía**

- 1) Cirigliano, G y Villaverde, A (1987). *Dinámica de grupos y educación*. Buenos Aires. Eudeba
- 2) Grossman, S. (1999). *Algebra Lineal con aplicaciones*. México. Grupo Editorial Iberoamericano
- 3) Howard, A. (2011). *Introducción al Algebra Lineal*. México. Noriega Editores
- 4) Material Compilado Para Curso de Postgrado Autores varios: *Enseñar a aprender - Aprender a aprender*. (2001). U.N.Sa. Fac Cs Económicas, Jurídicas y Sociales
- 5) Swokoski, E. (1992). *Algebra universitaria*. México. Cecsca
- 6) Taylor, H. y Wade T. (2009). *Matemáticas básicas*. México. Limusa
- 7) Burgos, J. (1993). *Álgebra Lineal*. España. McGraw Hill

### **ANEXO ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS**

46

### Ejemplo de Aplicación

Una empresa fabrica y vende dos modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 min. para el modelo A y de 30 min. Para el B, y un trabajo de máquina de 20 min. Para el modelo A y 10 min para el B. Se dispone para el trabajo manual de 6000 minutos por semana y para el uso de la máquina de 4800 min por semana. El precio de venta del modelo A es 40U\$ y para B 60U\$.

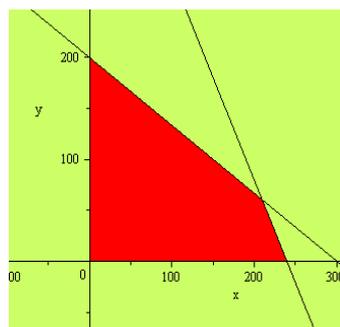
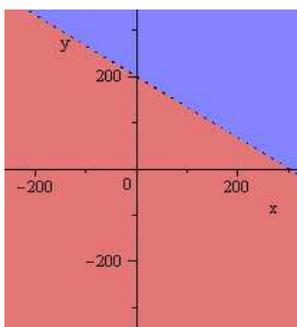
- Determinar la función objetivo y el sistema de restricciones.
- Cuántas lámparas de cada modelo han de fabricarse para obtener el máximo de ingreso y cuál sería?

### Lectura y armado del sistema de inecuaciones

	Mod. A (x)	Mod. B (y)	Disponibilidad	$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 30y \leq 6000 \\ 20x + 10y < 4800 \end{cases}$
min trabajo Manual	20	30	6000	
min trabajo máquina	20	10	4800	
Precio de venta	40	60		

### Determinación de la región

De cada inecuación lineal y de la región factible



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 30y \leq 6000 \\ 20x + 10y < 4800 \end{cases}$$

### Búsqueda de las coordenadas de los vértices

$$\begin{cases} 20x + 30y = 6000 \\ 20x + 10y = 4800 \end{cases} \quad \begin{cases} 20x + 10y = 4800 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 20x + 30y = 6000 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 210, y = 60 \quad x = 240, y = 0 \quad x = 0, y = 200$$

**Determinación de la Función Objetivo:**  $F(x,y)=40x+60y$

Vértice	$F(x,y)=40x+60y$
(0,200)	$40.0+60.200=12000$
(240,0)	$40.240+60.0=9600$
(210,60)	$40.210+60.60=12000$

Se tiene que el máximo se tiene el vértice A y C y Para los demás puntos de la región?

*Preguntas intercaladas*

### **Organizadores previos**

Dentro de la información de tipo introductoria y contextual a utilizar, para que los alumnos logren aprendizajes significativos, es necesario recuperar ideas previas. Para ello convendrá retomar algunos conceptos básicos, ya expuestos en temas precedentes, como ser: ecuaciones de la recta, inecuaciones lineales, sistemas de inecuaciones lineales, para luego introducir el tema programación lineal y sus aplicaciones.

## SINTESIS Sistemas de Inecuaciones Lineales

**Inecuación Lineal con n variable:** Es una expresión de la forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n < b$  donde a y b son números reales y  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

