

## HEXAFLEXÁGONOS EN LA CLASE DE GEOMETRÍA

Aniura Milanés Barrientos - Nora Olinda Cabrera Zúñiga  
aniura@mat.ufmg.br - ncabrerazuniga@gmail.com  
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) - Brasil

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: 5 - Formación y actualización docente

Palabras clave: hexaflexágonos, geometría, actividad investigativa

### **Resumen**

*En diversas actividades del proyecto de extensión (Projeto Visitas, 2017), que la primera autora coordina, observamos con bastante frecuencia, cierta resistencia por parte de alumnos y profesores, a ir más allá de la manipulación de recursos didácticos lúdicos para producir análisis o reflexiones sobre los raciocinios matemáticos utilizados. Este fenómeno parece ser más intenso cuando las actividades son realizadas en el campo de la geometría.*

*Nuestra comunicación tiene la intención de hacer un modesto aporte en este sentido al partir de la manipulación de hexaflexágonos, juguetes hechos con tiras de papel doblado, como materiales concretos para las clases de geometría y proponer actividades de exploración que propicien momentos de observación y discusión.*

*Presentaremos aquí una secuencia de actividades que permite desarrollar un trabajo investigativo en la clase de geometría (Da Ponte, 2001) al explorar y analizar diferentes conceptos tomando como tarea inicial la construcción de un cierto tipo de hexaflexágono. Comentaremos también algunas experiencias realizadas.*

### **Motivación**

El Projeto Visitas es un proyecto de extensión del Departamento de Matemática de la Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) cuyo principal objetivo es contribuir a que profesores y alumnos desarrollen actitudes más favorables al aprendizaje de la matemática. Para ello, los monitores, estudiantes para profesores de matemática, reciben grupos de alumnos de la enseñanza básica y realizan con ellos diferentes actividades lúdicas

relacionadas con la matemática de alguna forma. El equipo del proyecto también organiza talleres con profesores de matemática de la enseñanza básica.

Durante las visitas de alumnos y también durante los talleres con profesores, hemos tenido serias dificultades al trabajar con actividades que requieren cierta madurez en el manejo de la geometría plana, lo que estaría relacionado a discusiones presentadas en (Pais, 2000) y (Pavanello, 1993). Por esta razón decidimos comenzar a producir materiales para complementar las actividades del equipo del proyecto, que son más lúdicas y concretas, con la finalidad de posibilitar el análisis y la reflexión sobre diferentes aspectos teóricos. Los materiales en principio son destinados a los profesores y nuestro objetivo es que puedan auxiliarlos en su práctica docente.

En este trabajo describiremos una secuencia de actividades que fue desarrollada utilizando como motivación ciertos tipos de hexaflexágonos regulares. Estos son juguetes hechos de papel doblado que fueron popularizados a partir del trabajo (Gardner, 1956). Versiones anteriores de la secuencia que presentamos aquí fueron aplicadas a varios grupos de alumnos del Colégio Técnico (COLTEC), donde trabaja la segunda autora, a dos grupos de profesores que recibimos en talleres del Proyecto Visitas y también a un grupo de estudiantes para profesores de matemática durante una clase de una disciplina sobre Matemática Recreativa. La secuencia que presentaremos aquí recibió varios ajustes a partir de nuestras observaciones en estas experiencias.

En la próxima sección describiremos la secuencia de actividades que proponemos. Estas fueron construidas a partir de ejercicios propuestos en (Johnson, 1999). En la sección final haremos algunos comentarios sobre las experiencias que fueron realizadas.

### **Secuencia de actividades**

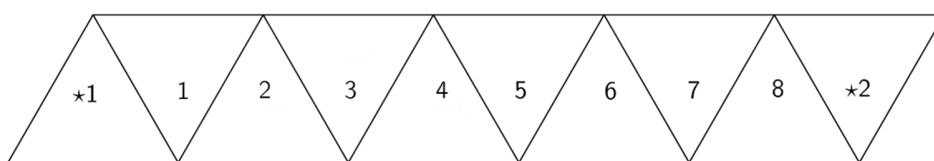
**Actividad 1:** Construcción del hexaflexágono regular de tres caras. Aprendiendo a flexigar. Para introducir esta actividad, le sugerimos al profesor o profesora que va a aplicarla, confeccionar un trihexaflexágono más o menos grande, con tres colores diferentes y bastante

llamativos en las tres caras, mostrar a los alumnos las caras visibles, que son dos, flexigar y mostrar la tercera cara de otro color. Esto suele ser bastante desconcertante y esta parece ser la razón de que casi todos los alumnos quieran entender cómo pudo suceder.

El profesor o profesora podría decir algo así:

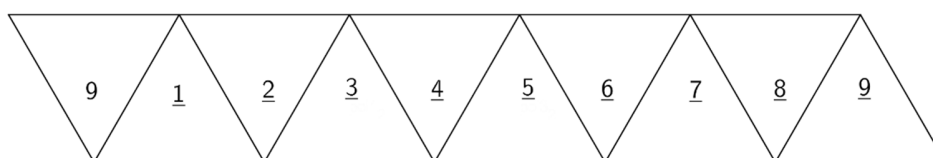
“Este es un tipo de hexaflexágono. Los hexaflexágonos son juguetes matemáticos hechos usando una tira de papel, tijera, goma y lápices de colores. Doblándolos de forma apropiada obtenemos hexágonos que muestran superficies escondidas. Estos juguetes fueron descubiertos en 1939 por un matemático inglés cuando jugaba con unas sobras de papel cortado de una hoja de su carpeta. El flexágono que mostré es llamado trihexaflexágono. Veremos ahora como construirlo.”

1. Coloque la tira de papel que usted recibió en la posición mostrada abajo y numérela sin apretar mucho el lápiz como en la figura.



2. A

continuación vire la tira y numere el otro lado de esta forma:



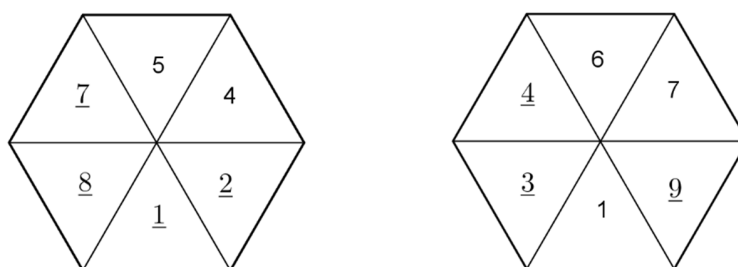
Certifíquese que el triángulo número 9 quede detrás del \*1, el 1 detrás del 1, el 2 detrás del 2 y así sucesivamente hasta el 8 quedar detrás del 8. Finalmente el 9 debe estar detrás del \*2.

3. Doble ahora la tira por los lados de los triángulos para adelante y para atrás. El objetivo es sólo hacer los dobleces.

Ahora vamos a montar el trihexaflexágono. Para eso, sigamos los siguientes pasos.

4. Doble el triángulo 3 sobre el 2.

5. Doble el triángulo 6 sobre el 5.
6. Doble el triángulo 9 sobre el 8.
7. Pegue los dos triángulos con \*.
8. Verifique su construcción. Al final de este proceso usted deberá haber llegado a una figura similar a la siguiente, delante y detrás:



Ahora veremos como hacer que aparezcan las tres caras de este trihexaflexágono. La operación que realizaremos se llama flexigación.

Note que el flexágono tiene seis dobleces que separan sus triángulos: tres con abertura y tres sin abertura. Por ejemplo, entre los triángulos 7 e 8 no hay abertura, mientras que entre los triángulos 8 y 1 si la hay.

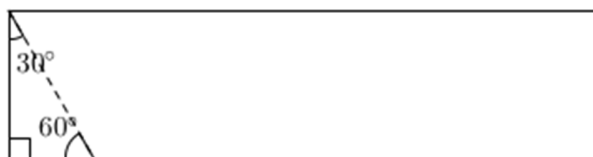
Para flexigar:

9. Tome el trihexaflexágono y presione simultaneamente los tres dobleces sin aberturas.
10. ¡Abra la punta central y listo! Usted ya sabe flexigar. Repita el procedimiento, borre los números sobre los triángulos y colorea cada cara como desee.
11. Para pensar más:
  - ¿Cuántas caras diferentes tiene el hexaflexágono construido?
  - ¿Por qué se llamará así?
  - Existen otros flexágonos. ¿Que podrían tener ellos de diferencia en relación al trihexaflexágono. ¿Ustedes podrían imaginar algunos nombres?

**Actividad 2:** Construcción de una tira de triángulos equiláteros usando dobladuras.

Una vez construido el trihexaflexágono a partir de una tira con triángulos equiláteros impresos, la propuesta es aprender a doblar estos triángulos sobre una tira en blanco sin utilizar ningún instrumento.

Primeramente, los alumnos recibirán una tira de papel que tiene dibujado un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos interiores igual a 60 grados en uno de sus extremos como muestra la figura siguiente.

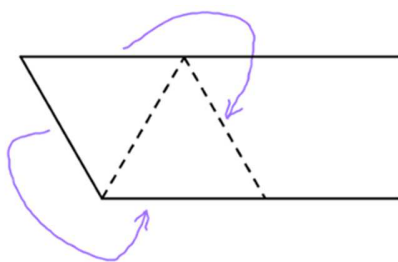


Se propone entonces la siguiente pregunta:

Pregunta 1: ¿Cómo ustedes podrían doblar triángulos equiláteros usando este primer triángulo de la tira?

Los alumnos deben ser estimulados a desarrollar y explicar estrategias para resolver este problema. Si ellos tuvieran dificultad se podría reformular la pregunta de la forma siguiente:

Pregunta 1': Corte el triángulo rectángulo al inicio de la tira. Ahora doble la tira de forma que la hipotenusa del triángulo que fue cortado se sobreponga al borde inferior de la tira. El triángulo demarcado por el doblez es equilátero. ¿Por qué? ¿Cómo podemos continuar doblando triángulos equiláteros?



Para dejar la construcción bien clara podría utilizarse una animación hecha en Geogebra por ejemplo, que ilustre el procedimiento utilizado y sus explicaciones.

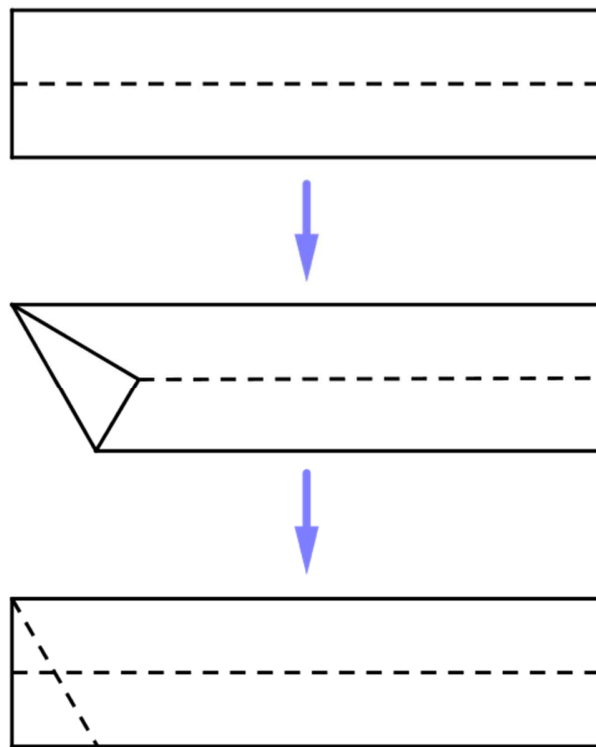
Una vez resuelto el problema de doblar los triángulos equiláteros, podemos proponer una reflexión sobre la construcción del triángulo rectángulo inicial.

Pregunta 2: ¿Cómo podemos doblar el triángulo rectángulo del inicio de la tira?

Esta pregunta tal vez sea más complicada de responder que la anterior porque precisa de una construcción auxiliar. Es interesante estimular la producción de ideas y orientar la discusión en el sentido de justificar que realmente los ángulos obtenidos son de 30 e 60 grados.

Se fuera necesario, se podría reformular la pregunta.

Pregunta 2': Doble la tira al medio. A continuación doble el extremo izquierdo de la tira de forma que el vértice inferior izquierdo quede sobre el dobléz del medio como muestra la figura abajo.



El triángulo resultante tiene las medidas deseadas. Por qué?

Si hubiera muchas dificultades para justificar esta construcción, una vez más podría ser utilizada una animación hecha en Geogebra que ilustre esta justificación.

Y finalmente, otra pregunta para pensar más:

Pregunta 3: ¿De qué ancho debe ser la tira de papel para que sobre la menor cantidad posible cuando doblemos los triángulos usando la construcción 2'?

## Conclusiones

En todas las oportunidades en que aplicamos estas actividades, los participantes trabajaron en grupos. La primera actividad fue recibida con bastante entusiasmo y muchos participantes se tomaron muy en serio el "experimento". La dificultad mayor apareció a la hora de flexigar el objeto montado. Casi todos necesitaron ayuda en esta parte y esto generó también una interacción bastante intensa dentro de cada grupo.

La segunda actividad fue aplicada solamente con grupos de profesores y de forma un poco diferente pues las preguntas no fueron organizadas como hicimos aquí. Con esta reformulación tratamos de garantizar una participación bastante amplia en la resolución de la primera pregunta pues observamos que llegar al argumento que justifica la segunda generó algunas dificultades. Además, de esta manera, la construcción del triángulo rectángulo queda señalada como un punto esencial en el procedimiento de obtención de la tira de triángulos equiláteros usando dobladuras. También es posible intervenir en el proceso de deducción de la solución mediante el uso de materiales visuales como animaciones de Geogebra por ejemplo, que son relativamente simples de producir y que permiten sugerir apenas estrategias de solución preservando el carácter investigativo de las actividades.

Esperamos que las actividades propuestas sean acogidas como un pequeño aporte a clases de matemática y talleres de formación de profesores.

### **Referencias bibliográficas**

- Gardner, M. (1956) Flexagons. Scientific American, 195, 162 - 166.
- Pais, L. C. (2000). Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. 23a Reunião Anual de ANPED. <http://www.anped.org.br/reunioes> Consultado 21/02/2017.
- Pavanello, R. M. (1993) O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. Zetetiké, 1, 7-17.
- Da Ponte, J. P. (2001). Investigating Mathematics and Learning to Teach Mathematics, En Lin, F.-L. y Cooney, T. J. (Eds.), Making Sense of Mathematics Teacher Education, Capítulo 2, pp. 53-72, Springer.
- Projeto Visitas (2017). <http://www.mat.ufmg.br/visitas/> Consultado 21 fev 2017.
- Johnson, D. A. (1999). Paper Folding for the Mathematics Class, National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.

**Anexo:** Fotos de alguns dos hexaflexágonos elaborados por los estudiantes

