CB-1.095

# COMPRENSIÓN DE FÓRMULAS PARA LA MEDIDA DE LA SUPERFICIE DE FIGURAS PLANAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS[41]

Ana Belén Montoro Medina * – Francisco Gil Cuadra** – Lilia Patricia Aké Tec*** – Ana Belén Petro Balaguer * –
ana.montoro@uib.es – fgil@ual.es – lake86@gmail.com – anabelen.petro@uib.es
(*) Universidad de las Islas Baleares (España) – (**) Universidad de Almería (España) – (***) Universidad de Colima (México)

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Primaria y Secundaria
Palabras clave: Formación de maestros, medida, superficie, generalización

**Resumen**

*La comprensión de métodos y fórmulas para el cálculo del área y la búsqueda de patrones y regularidades forman parte de los contenidos propios tanto de la educación primaria como secundaria. Con objeto de indagar en el conocimiento de futuros profesores de primaria y secundaria sobre el concepto de medida y métodos para el cálculo del área de figuras planas, diseñamos una actividad que involucra a futuros docentes en un proceso de obtención de fórmulas con una unidad no estándar, a través de un proceso de generalización. En este trabajo se realiza un análisis de los resultados obtenidos con una muestra de 243 maestros de educación primaria en formación de nacionalidad española y 122 maestros de educación secundaria en formación de nacionalidad mexicana. El estudio describe los principales errores y dificultades encontradas en ambos colectivos y evidencia de la importancia de familiarizar a los futuros docentes con actividades que promuevan la comprensión de contenidos específicos, dado que estas experiencias influirían en la actividad matemática de sus futuros estudiantes.*

## Introducción

El cálculo de superficies de figuras planas forma parte del currículum de primaria y secundaria al que maestros y profesores de matemáticas dedican tiempo y esfuerzo. Sin embargo, en la formación de maestros vemos que gran parte de ellos no son capaces de resolver problemas de comparación de áreas, por ejemplo, de determinar si más rentable comprar dos pizzas o comprar una cuyo diámetro es el doble y cuesta el doble que la primera.

[41] Financiado por el Programa de Movilidad Académica entre Universidades Andaluzas e Iberoamericanas asociadas a la AUIP y el programa de ayudas de L´Obra Social “La Caixa”.


ISBN 978-84-945722-3-4

Para promover un cambio en el modo de enseñar la medida de la superficie consideramos necesario que los futuros maestros y profesores de matemáticas vivencien de primera mano este tipo de enseñanza, superando las dificultades que aparecen en dicho contenido y comprendiendo el porqué de las fórmulas. En definitiva, es necesario que dominen el contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido.

En este trabajo se analiza el desempeño de futuros maestros al enfrentarse a una actividad que promueve la comprensión de métodos y fórmulas para el cálculo del área de figuras planas y la búsqueda de patrones y regularidades.

## Marco teórico

La medida es un proceso complejo que comienza con la percepción de los atributos de los objetos y el aislamiento de la cualidad que se va a medir. Esta percepción viene acompañada con gran frecuencia de comparaciones de objetos que comparten dicha cualidad. Diferentes circunstancias, por ejemplo, dificultad en la comparación, necesidad de precisión, etc., hacen conveniente asignar un número a una cantidad de magnitud. Este hecho, de enorme utilidad práctica, es lo que denominamos medir y se desarrolla en varias etapas:

- Escoger una cantidad fija, que se denomina unidad de medida.
- Reiterar esta unidad, tantas veces como sea preciso, sobre el objeto a medir.
- Contar el número de veces que se ha iterado.
- Asignar al objeto ese número, indicando la unidad utilizada.

El proceso se completa con la estimación, es decir, la posibilidad de apreciar 'a ojo', sin la ayuda de instrumentos de medida, la medida de la cantidad de magnitud. Esta es una habilidad que debe fomentarse por su indudable interés práctico y que requiere haber interiorizado unos referentes y haber desarrollado unas estrategias (Moreno, Gil y Montoro, 2015).

La medida de la superficie cuenta, por su utilidad práctica, con una última etapa centrada en el uso de fórmulas que permiten calcular el área de una figura plana conociendo la longitud de algunos de sus elementos. En cambio, con demasiada frecuencia, se introduce esta etapa


ISBN 978-84-945722-3-4

prematuramente, omitiendo la etapa de comparación por superposición de figuras y/o por composición y descomposición (Barba y Calvo, 2014).

Varios autores destacan la importancia de que los niños participen en el desarrollo de las fórmulas antes de utilizarlas y la riqueza de dicha actividad (Olmo, Moreno y Gil, 1989; Godino, Batanero y Roa, 2002). En este sentido, toma relevancia la deducción de fórmulas, a través de un proceso de generalización, para evitar su uso sistemático carente de significado. La generalización forma parte del currículum de primaria y ha cobrado relevancia debido a la introducción del álgebra en el currículum escolar, tendencia internacionalmente conocida como algebrización del currículo (Kaput, 2000). La generalización como objeto de pensamiento y medio de comunicación (Zaskis y Liljedahl, 2002) involucra la articulación y representación de ideas unificadas (ya sea en un lenguaje verbal, simbólico, algebraico, o cualquier medio de expresión) que hacen explícitas relaciones matemáticas (Carpenter y Levi, 2000). Uno de los escenarios para explorar la generalización es el análisis de patrones, pues permite la observación de regularidades. Así lo reflejan estudios, como los de García y Martinon (1998), que se centran en la capacidad de los estudiantes para generalizar, describiendo las etapas del proceso de identificación de patrones. Lo anterior demanda en los futuros maestros, desarrollar competencias para el diseño de actividades que expresen un proceso de generalización y que también puedan resolverse tanto de una forma verbal o aritmética como de manera algebraica.

## Objetivo

Con objeto de indagar en el conocimiento de futuros profesores de primaria y secundaria sobre el concepto de medida y métodos para el cálculo del área de figuras planas, diseñamos una actividad que involucra a los futuros docentes en un proceso de obtención de fórmulas con una unidad no estándar, a través de un proceso de generalización. El estudio tiene como objetivo describir los principales errores y dificultades encontradas y evidenciar la importancia de familiarizar a los futuros docentes con actividades que promuevan la comprensión de contenidos específicos, dado que estas experiencias influirían en la actividad matemática de sus futuros estudiantes.

## Metodología


ISBN 978-84-945722-3-4

Por cuestiones de disponibilidad, la actividad fue realizada con 243 asistentes a la asignatura “Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida” del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Almería (España), y 122 asistentes a las I Jornadas Académicas de la Enseñanza de las Matemáticas, estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas (para la educación secundaria) de la Universidad de Colima (México).

En el primer caso, la actividad estaba enmarcada dentro de un módulo dedicado a la enseñanza y aprendizaje de la medida en la educación primaria que cuenta con cinco talleres prácticos, y que se guía por el Modelo de Olmo, Moreno y Gil (1989) y que trabaja la percepción y comparación (directa e indirecta) de magnitudes, la medida con unidades estándar y no estándar, la estimación de distintas magnitudes, y la aritmetización del área y el volumen. En el caso de los estudiantes mexicanos, la tarea se proponía como un ejemplo de utilización de material didáctico en actividades que fomentan el aprendizaje no memorístico de fórmulas para el cálculo de superficies. En ambos casos, el objetivo didáctico de esta actividad es que los estudiantes aprendan un modo diferente de introducir las fórmulas para el cálculo de áreas en la escuela que sea significativo para los estudiantes y experimenten las dificultades que conlleva su aprendizaje.

La actividad pide a los estudiantes trabajar en grupo (47 equipos de estudiantes españoles y 28 equipos de estudiantes mexicanos) para obtener fórmulas para el cálculo de la superficie de distintas figuras (triángulo equilátero, hexágono, rombo, romboide y rectángulo) tomando como unidad de medida un triángulo equilátero de lado 1 cm. Para ello, los estudiantes españoles contaron con geoplanos triangulares y papel isométrico.

En el caso de los estudiantes mexicanos, se les pidió que contrastaran sus fórmulas en figuras dibujadas en acetato. Para ello, debían medir con una regla las longitudes que aparecieran en sus fórmulas y obtener el resultado, comprobando posteriormente el resultado al superponer el acetato en el papel isométrico. Esta variante se realizó para evitar que los estudiantes recibieran retroalimentación engañosa al realizar supuestos erróneos (Montoro y Gil, 2016).

En ambos casos, los estudiantes debían entregar un documento en el que apareciera la fórmula obtenida y su justificación. Estos documentos fueron utilizados para analizar las estrategias utilizadas (generalización a partir de casos particulares, descomposición de


ISBN 978-84-945722-3-4

figuras o descomposición y composición de figuras), el modo de representación utilizada para describir la fórmula obtenida y los errores cometidos.

Así, la fórmula del triángulo equilátero y del romboide solo pueden encontrarse a raíz de casos particulares, la del hexágono y el rombo permite además técnicas de descomposición en triángulos equilátero, mientras que la del rectángulo requiere el uso de la estrategia de descomposición y composición de figuras.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

## Resultados

La tabla 1 muestra la frecuencia con la que los estudiantes de maestro españoles (E) y estudiantes de maestro mexicanos (M) utilizaron cada estrategia en cada figura, según produjera fórmulas correctas (A) o erróneas (F) (se descartaron las producciones en blanco). Como vemos, el 98% de los estudiantes de maestro españoles llegaron a fórmulas válidas para el triángulo equilátero, el hexágono y el rombo. Así, aunque la única justificación válida para obtener la fórmula del triángulo consiste en la generalización de la medida de casos particulares, vemos que el 17% de los grupos entendía por justificación de la fórmula su enunciado verbal y el 21% de los grupos se limitó a escribir la fórmula directamente. En el caso de la fórmula del hexágono y el rombo, vemos que el 28% de los grupos utilizó la búsqueda de patrones y aproximadamente el 60% usó la estrategia de descomposición en seis triángulos equiláteros y dos triángulos equiláteros, respectivamente.

Tabla 1. Frecuencia de utilización de cada estrategia

| | | Triángulos | Hexágono | Rombo | Romboide | Rectángulo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Regularidad | E | A: 28 (60%) | A: 13 (28%) | A: 13 (28%) | A: 17 (36,2%)<br>F: 4 (8%) | F: 10 (21%) |
| | M | A: 15 (54%) | A: 9 (32,1%) | A: 8 (28,6%) | A: 7 (25%)<br>F: 9 (32,1%) | A: 1 (3,6%)<br>F: 4 (14,3%) |
| Descomposición (y composición) | E | | A: 30 (64%)<br>F: 1 (2%) | A: 28 (60%)<br>F: 1 (2%) | F: 10 (21%) | A: 16 (33%)<br>F: 10 (21%) |
| | M | | A: 12 (43,2%) | A: 12 (43,2%) | A: 1* (3,6%)<br>F: 2 (7,2%) | A: 3 (10,7%)<br>F: 3 (10,7%) |
| Enunciado verbal | E | A: 8 (17%) | | | A: 4 (8%)<br>F: 1 (2%) | |
| | M | A: 4 (14,3%) | | | A: 2 (7,2%) | F: 2 (7,2%) |
| Solo fórmula | E | A: 10 (21%) | A: 3 (6%) | A: 4 (8%) | A: 7 (14%) | F: 3(6%) |
| | M | A: 2 (7,2%) | A: 2 (7,2%) | A: 2 (7,2%)<br>F: 1 (3,6%) | A: 2 (7,2%)<br>F: 1(3,6%) | A: 1(3,6%)<br>F: 2 (7,2%) |
| Relación entre unidades | E | | | | | |
| | M | | F: 1 (3,6%) | F: 1 (3,6%) | | F: 1 (3,6%) |

En la muestra mexicana se encontraron resultados similares (para el triángulo equilátero, hexágono y rombo), aunque el porcentaje de uso de búsqueda de patrones o regularidades es


ISBN 978-84-945722-3-4

ligeramente superior en el caso del hexágono, y se observa una tendencia a modificar las fórmulas que ya se conocen. Más concretamente, mientras los estudiantes españoles en su mayoría obtuvieron, a través de regularidades, la fórmula como seis veces el lado por el lado (o lado al cuadrado), en la muestra mexicana apareció también la expresión "perímetro x lado". Por otro lado, en el rombo algunos intentaron utilizar las diagonales.

En el caso del romboide, vemos que el 20% de los estudiantes españoles intenta estrategias de descomposición erróneas debido a la imagen proporcionada en el documento, en la que consideraron que todos los romboides están formados por cuatro triángulos equiláteros, algo que ocurrió solo en el 7,2% de los estudiantes mexicanos. De este modo, el 45% de los grupos de estudiantes españoles y el 58% de los mexicanos utilizó la búsqueda de patrones como estrategia, aunque el 8% de los estudiantes españoles y el 32,1% obtuvieron una fórmula errónea al utilizar el mismo símbolo para designar longitudes diferentes (lado largo y lado corto). No obstante, los casos particulares utilizados muestran que eran conscientes de que no tenían por qué ser iguales.

El caso del rectángulo es el más complejo, ya que requiere de la utilización de la técnica de composición y recomposición.

Para este caso, el 21% de los grupos españoles y el 14,3 % de los mexicanos utilizaron la búsqueda de regularidades, midiendo la base del rectángulo con los lados del triángulo equilátero y la altura con la altura de dicho triángulo, lo que proporciona una fórmula errónea para el cálculo del área puesto que consideraban dicha altura igual a 1 (Figura 1).

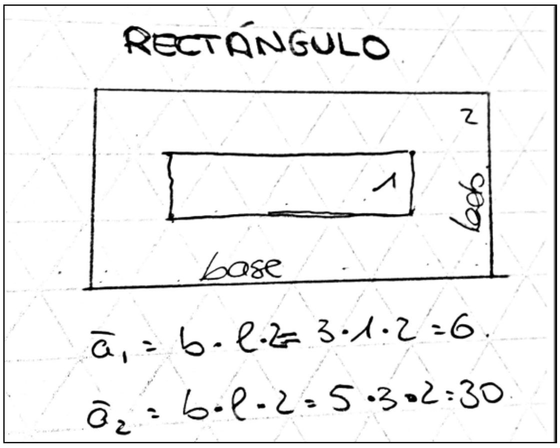


Figura 1. Uso de regularidades en la obtención de la fórmula del rectángulo



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Mientras que la mayoría de los estudiantes españoles fueron conscientes de este problema al mostrar a la profesora sus avances para conocer si lo estaban haciendo bien, los estudiantes mexicanos contaron con un romboide dibujado en acetato cuyos lados contiguos medían 5cm y 3cm respectivamente formando un ángulo de 60º, con el que descubrían la invalidez de dicha fórmula. En estos casos, la profesora sugirió utilizar otra estrategia.

Como podemos observar, en la muestra mexicana únicamente el 21,4% de los grupos utilizó técnicas de descomposición y composición, de los que sólo el 10,7% obtuvo la fórmula correcta al transformar el rectángulo en un romboide (Figura 2).

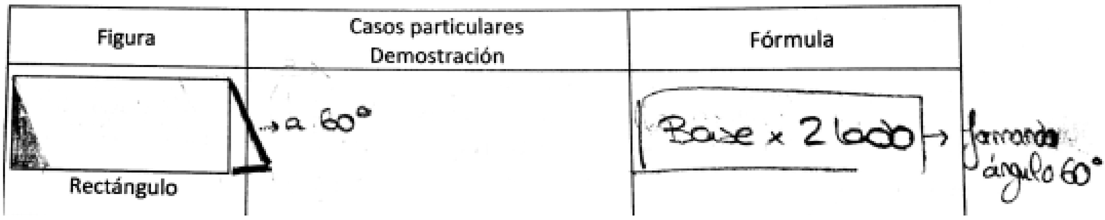


Figura 2. Ejemplo de la descomposición correcta

En contraste, el 54% de los estudiantes españoles utilizó dicha técnica, aunque solo el 33% expresó la fórmula correctamente. El otro 21% convirtió el rectángulo en un romboide y aplicó la misma fórmula, no siendo conscientes de que la altura del rectángulo mide lo mismo que el lado del romboide, o realizó descomposiciones en figuras de las que desconocían el área y aplicaron fórmulas estándar (Figura 3) o de otras figuras similares (Figura 4).

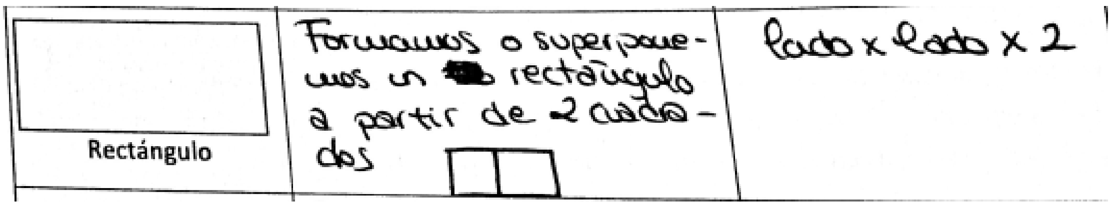


Figura 3. Descomposición en figuras aún desconocidas y uso de fórmulas estándar

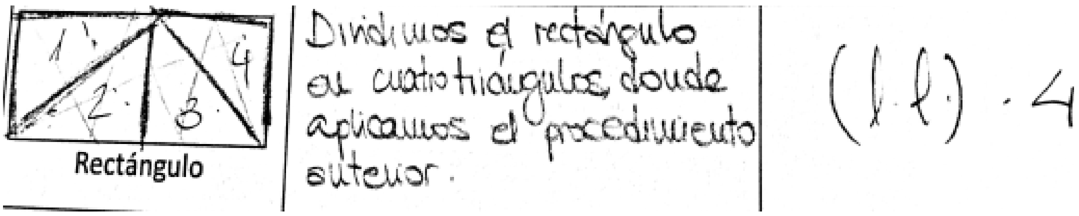


Figura 4. Descomposición en triángulos y uso de la fórmula del triángulo equilátero



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Al finalizar el taller, se discutió con ellos la forma de adaptarlo al aula de primaria y secundaria para obtener las fórmulas usuales. Para ello, los estudiantes compartieron las estrategias utilizadas en el taller, viendo la utilidad de las técnicas de composición y descomposición para obtenerlas y comprendiendo de dónde salían las fórmulas que habían estudiado durante su etapa escolar. Todos ellos se mostraron sorprendidos y consideraron que se trataba de una actividad útil e interesante ya que esta tarea contrasta con su visión de la matemática como algo cerrado y acabado, viendo que incluso en los niveles más elementales, los estudiantes pueden crear, explorar, descubrir… En definitiva, pueden hacer matemáticas, no solo aplicarlas.

Por otro lado, los datos obtenidos con la fórmula del rectángulo confirman la necesidad de introducir tareas previas de comparación de superficies que involucren la descomposición y composición.

**Referencias bibliográficas**

Barba, D. y Calvo, C. (2015). Manipular, representar y describir figuras planas. Suma 79, 85-92.

Carpenter, T. P., y Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. (Res.Rep.00-2). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA).

García, J. A., y Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. Olivier, A., Newstead, K. (Eds). Proceeding of the 22th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics (PME), Vol. 2 (pp 329-336). Stellenbosch: University of Stellenboch.

Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2002). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. En Godino J.D. (Ed.), Matemáticas y su didáctica para maestros (pp. 607-692). Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Kaput, J.J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA). Dartmouth, MA

Montoro, A. B. y Gil, F. (2016). Aspectos que facilitan la motivación con tareas matemáticas. Un estudio de casos con estudiantes de maestro de primaria. PNA, 10(4), 307-337.

Moreno, M.F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015) Sentido de la medida. En L. Rico y P. Flores. (Eds.) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria (pp. 145-168). Madrid: Sínteis.

Olmo, M.A. del, Moreno, M.F. y Gil, F. (1989). Superfice y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid: Sínteis.

Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. Educational Studies in Mathematics, 49(3), 379-402.


ISBN 978-84-945722-3-4