CB-1.090

TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA

Landy Sosa Moguel – Guadalupe Cabañas-Sánchez
landy.sosa@gmail.com – gcabanas.sanchez@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Núcleo temático: IV. Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: 5. Formación y actualización docente
Palabras clave: tareas, generalización, inducción, profesores

Resumo
En este trabajo se presentan los principios y tipo de tareas con los que se busca promover el razonamiento inductivo en profesores de matemáticas de educación básica (secundaria) y que están asociadas a procesos de generalización matemática. El propósito de las tareas fue la formación del concepto de potencia, a partir de la generalización inductiva de las soluciones de situaciones de potenciación presentadas en las tareas. Se discute acerca del papel de la generalización en la formación de dicho concepto, a partir de la identificación de componentes conceptuales, procedimentales y estructurales ligados a la naturaleza epistémica del concepto.

1. Introducción

En la educación básica, se ha identificado que procesos como la generalización, la argumentación, la conjetura, la resolución de problemas y la construcción de pruebas, por mencionar algunos, son vertebrales en el aprendizaje matemático (e.g. NTCM, 2000; CCSSI, 2010). El favorecimiento del desarrollo de dichos procesos en el aula por el docente demanda no solo un conocimiento profundo de los conceptos matemáticos que se enseñan, sino el entendimiento e interpretación de las formas de razonamiento asociadas (AMTE, 2017).

Si bien lo inductivo es un razonamiento que sustenta y potencializa tales procesos (e.g. Martinez y Pedemonte, 2014; Papargeorgiou, 2009), en programas de desarrollo profesional con profesores de matemática en educación básica (Secundaria) en México, se ha detectado la ausencia o carencias de razonamiento inductivo para interpretar y resolver problemas matemáticos. En adición, Goizueta y Planas (2013) reportan que un problema en la enseñanza de las matemáticas es la omisión o falta de explicitación de lo epistémico (del conocimiento

ISBN 978-84-945722-3-4

matemático), en articulación con lo estructural y comunicativo, en la gestión de prácticas argumentativas por el profesorado.

Diversas investigaciones se han centrado en delimitar el conocimiento matemático y pedagógico del profesor, con énfasis en el *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (Contreras, Montes, Climent y Carrillo, 2017), otros bajo el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames y Phelps, 2008) o en estudiar las dimensiones del *Conocimiento Didáctico-Matemático* (Pino y Godino, 2015).

Sin embargo, en pocos estudios se ha cuestionado cómo construye conocimiento matemático y didáctico el profesor o intentado trascender del conocimiento a su pensamiento, particularmente en su razonamiento inductivo, como es el caso que nos ocupa. El objetivo del estudio consistió en examinar el alcance de tareas de generalización por inducción para la formación del concepto potencia y el desarrollo de formas de razonamiento inductivo en profesores de matemáticas de secundaria. En este escrito se presentan los principios y estructura de tales tareas, tras establecer elementos teórico-metodológicos que permitan responder a la pregunta ¿Bajo qué principios se pueden estructurar tareas de generalización por inducción para la formación de un concepto, en particular, el de potencia?

2. Elementos teórico-metodológicos

Los conceptos medulares en este estudio son el *razonamiento inductivo* y la *formación de conceptos*, ambos ligados a la *generalización*.

Razonamiento inductivo. Klauer, Willmes y Phye (2002) definen el *razonamiento inductivo* como una habilidad analítica que consiste en detectar regularidades e irregularidades, reglas y generalizaciones, por medio de reconocer similitudes o diferencias entre los atributos y relaciones de objetos. En nuestro estudio, una caracterización que trastoca esta visión cognitiva es considerada, la cual se ciñe a la epistemología de la matemática y las ciencias. En ésta, la inducción es inherente a procesos de construcción de conocimiento matemático, de naturaleza socio-cognitiva, e involucra el estudio de patrones o regularidades para llegar a la *generalización*; se refiere a ver lo general en lo particular.

En esta línea, Cañadas (2007) y Cañadas y Castro (2007) han expuesto a la conjetura y la generalización, como componentes de un modelo teórico del razonamiento inductivo y que permean la generación de conocimiento (véase Castro, Cañadas y Molina, 2010). Las fases del razonamiento inductivo en este modelo son: trabajo con y organización de casos

ISBN 978-84-945722-3-4

particulares, identificación de patrones, formulación y justificación de conjeturas, generalización y demostración (p. 69).

Formación de conceptos. Cada vez se aporta mayor evidencia al hecho de que el conocimiento y el pensamiento matemático de una persona está asociado al tipo de experiencias y contextos en los que esta se sitúe, y no solo atañe a la cognición (e.g. Cobb & Yackel, 1996). Formar conceptos en profesores puede lograrse al situarlos en experiencias colectivas de conceptualización y reconceptualización de saberes matemáticos, es decir, en reconocer, explicar y usar dichos saberes más allá del escenario en que fueron estudiados (Aparicio, Gómez y Sosa, 2017). Consiste en el reconocimiento de la naturaleza epistémica de los conceptos matemáticos: lo conceptual, operativo y estructural.

Hodnik & Manfreda (2015) señalan que formar un concepto implica "seleccionar algunas características de las entidades particulares y descartar otras", abstrayendo lo esencial en distintas situaciones y englobarlas en una categoría universal. En ese sentido, puede interpretarse como un proceso de *generalización conceptual* (e.g. Davydov, 1990) para transitar de un elemento o situación particular al conjunto completo al que pertenecen (el concepto).

Generalización por inducción en el diseño de tareas para formar conceptos. La generalización se asume como una fase esencial del razonamiento inductivo y también interviene en la formación de conceptos. Para la formación del concepto potencia se diseñó un conjunto de tareas que promueven el razonamiento inductivo para formular generalizaciones, denominadas de *generalización por inducción* en lo que sigue.

Lo inductivo y la generalización se trabajan en las tareas en dos niveles:

i) *En lo individual*, cada tarea demanda generalizaciones matemáticas mediante el razonamiento inductivo para resolver situaciones de potenciación.

ii) *En lo global*, se espera que los profesores generalicen elementos epistémicos del concepto potencia, al reconocer una particularidad de estos en la solución de cada situación del conjunto de tareas. Por ejemplo, generalizar la noción de potencia tratada en cada situación, para englobarla en una categoría general: el significado de potencia como una *relación* matemática.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

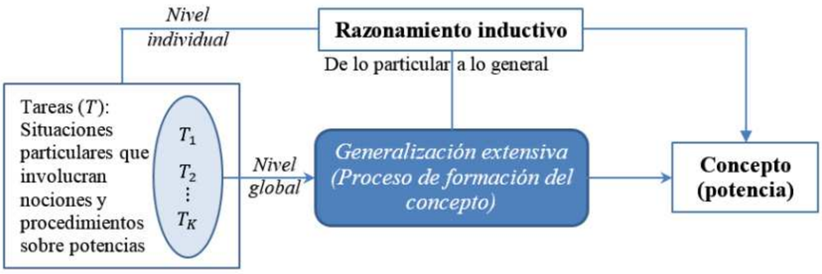


Figura 1. Esquema de generalización inductiva para la formación de un concepto.

3. Diseño de tareas de generalización por inducción sobre potencias

El objetivo de las tareas fue promover el razonamiento inductivo y la generalización para la formación del concepto potencia.

a. Principios de las tareas

El diseño de las tareas (T) de generalización inductiva se rige por tres principios:

1. Identificar una regularidad o un patrón en un conjunto de objetos, valores o situaciones mediante la examinación de casos concretos o particulares;
2. Formular una conjetura acerca de la regularidad o patrón observado al aplicarlo a otros casos;
3. Generalizar la conjetura y justificarla.

Tales principios se fundamentan en el establecimiento de una correlación entre las fases del razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007) y las actividades (A) de generalización propuestas en Ellis (2007), según el siguiente esquema:

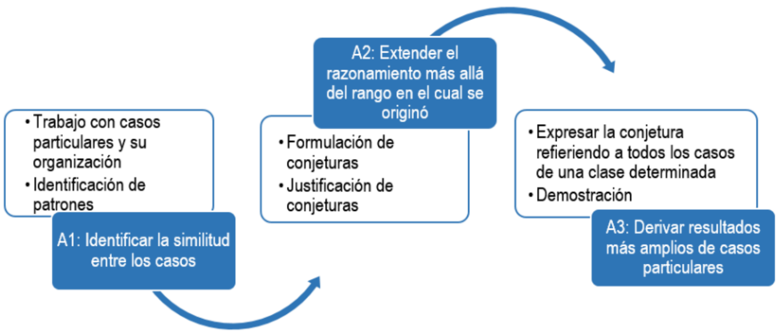


Figura 2. Esquema de la relación generalización-inducción.

b. Estructura de las tareas

Las tareas se estructuraron de tal manera que:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

i) En cada una, se presenta una situación que involucra a la *potenciación* como el *proceso* para resolverla y una *potencia* como solución, mediante estrategias de generalización por inducción.

ii) En lo global, un conjunto de tareas tiene como elemento invariante algún aspecto conceptual y operativo del concepto potencia, con el propósito de que los profesores tomen consciencia de y generalicen estos elementos epistémicos.

Por ejemplo, en lo *operativo*, efectuar el cálculo numérico, mediante multiplicaciones reiteradas, de una colección de potencias con base decimal y exponente natural para representar un proceso de potenciación. En lo *conceptual*, reconocer la potencia como una relación que representa la disminución de una cantidad de forma exponencial.

c. Contenido matemático: elementos epistémicos del concepto potencia

Análisis de aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos asociados al concepto potencia, condujeron a identificar elementos epistémicos del concepto, en síntesis:

Lo conceptual. Refiere a una relación de aumento o disminución, con un comportamiento exponencial, de una cantidad que se multiplica por sí misma. Es el valor que resulta de un proceso de potenciación (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016).

Lo operativo. Involucra operaciones, leyes, símbolos y signos para expresar la multiplicación sucesiva de un número o cantidad, es decir, la potenciación.

Lo estructural. Como una estructura algebraica del pensamiento matemático y de la matemática como un todo, está asociada a la multiplicación, la progresión geométrica y lo exponencial. Se conforma de operaciones, símbolos, propiedades, teoremas, etc. para interpretar, representar y describir relaciones matemáticas en situaciones de crecimiento o decrecimiento exponencial de carácter discreto o continuo.

En este escrito se denomina *relación matemática* a la forma de asociación entre objetos, variables o entes en una situación de la que se puede abstraer alguna cualidad.

4. Ejemplificación de las tareas. Análisis a priori

A continuación se presentan dos tareas (T1 y T2) de generalización por inducción para la formación del concepto potencia, que tratan con colecciones de potencias con base una cantidad decimal o fraccionaria, las cuales tienen comportamiento decreciente.

T1	T2

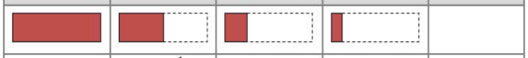
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Situación. En un laboratorio se guarda 1 kg de un elemento que se reduce el 2% anualmente.

a) Determine cuántos gramos del elemento quedará en doce años.

b) Explique por qué la situación es de potenciación y por qué una potencia es la solución de ésta. Justifique su respuesta.

Situación*. Una tira de papel de $1\,m$ de longitud se divide sucesivamente a la mitad en distintos momentos, como se ilustra a continuación:



Cantidad de papel	Momento 1	Momento 2	Momento 3	Momento x
$1\,m$	$0.5m$ o $\frac{1}{2}m$			

a) Calcule la longitud de un pedazo de la tira en el momento 3.

b) Proponga una expresión para calcular la longitud de un pedazo de la tira en el momento x.

*Adaptada de Aparicio, Sosa y Gómez (2016)

Tabla 1. Ejemplos de tareas de generalización inductiva sobre potencias.

Por cuestiones de espacio se ejemplifica y muestra el análisis a priori de T1.

a. ***Acerca de la generalización por inducción***: En esta tarea se espera que se movilicen estrategias heurísticas de generalización inductiva, como la siguiente:

<table>
<tr><th>Paso</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Plantear la situación en términos de potencias o exponenciales, esto es, representar algunos casos particulares aritmética o geométricamente. Por ejemplo:
<table>
<tr><th>Año (n)</th><th>Cantidad de elemento</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$1-(1)(0.02)=0.98$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$(1-0.02)-(1-0.02)(0.02)=(1-0.02)^2=(0.98)^2$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$(1-0.02)^3=(0.98)^3$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Establecer un patrón exponencial de forma verbal, aritmética, algebraica, geométrico-gráfico o combinación de ellos que represente al proceso de decrecimiento. Ejemplo: $(1-0.02)^n=(0.98)^n$ [Patrón algebraico]</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Reconocer que la respuesta corresponde a un valor numérico (una potencia) que debe ser resultado de un proceso de potenciación: $(0.98)^{12}$</td></tr>
</table>

b. ***Sobre la formación del concepto potencia***. Se prevé el reconocimiento de la *potenciación* (*lo* ***procedimental***) en el proceso de resolución de la tarea por parte de los profesores respecto a los dos aspectos siguientes:

1) Se trata de una situación de *crecimiento exponencial*, por ejemplo, en el comportamiento de la variable llamada "cantidad de elemento". La reducción del elemento sigue un *comportamiento exponencial*, es decir, *la rapidez con que decrece la cantidad de elemento por año es cada vez mayor*; no se reduce de forma constante cada año. Lo anterior puede analizarse numérica y gráficamente.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2) En la situación interviene un *factor multiplicativo* reductivo de una cantidad en forma no lineal o constante. La cantidad de gramos que quedan del elemento en cada año representa una colección de potencias con la misma base, es decir, *un proceso de multiplicación reiterada de un número* $(1 - 0.02$ o $0.98)$ *por sí mismo*. A este proceso operativo aritmético se denomina *potenciación*.

Asimismo, en lo ***conceptual*** se espera que se identifique que la solución o resultado de la situación representa una *potencia*. La solución es la cantidad de elemento que queda a los doce años y representa *una relación multiplicativa sucesiva de un número* (0.98) *cierta cantidad de veces* (12). Esto es, la potencia: $(0.98)^{12}$.

El reconocimiento de la dimensión ***estructural*** del concepto potencia reside en la posibilitad de llevar el razonamiento inductivo a otro nivel más allá de la particularidad de cada tarea, a través de reflexionar sobre la idea de que la situación y la solución de cada una constituyen solamente un caso particular que puede sentar la base para racionalizar a la potencia como un concepto general.

5. Discusión

De acuerdo con Rubinstein (1979, p. 123), "todo pensamiento se realiza en generalizaciones". Tal aseveración es transferible al razonamiento y la formación de conceptos en tanto procesos del pensamiento. De manera global, la razón de que los principios y la estructura de las tareas para la formación del concepto potencia en particular (o matemáticos en general) tengan soporte en la generalización se ubica en la idea anterior. La característica esencial de cada tarea es la generalización por inducción. Según Davydov (1990), hacer una generalización significa "… descubrir un principio, una conexión necesaria del fenómeno individual dentro de cierta totalidad" (p. 138). Un aspecto medular de dicho proceso es la percepción de lo general en lo particular, ligado al desarrollo del razonamiento inductivo.

Llegar a la instancia del reconocimiento de un concepto en su dimensión estructural amerita acciones de generalización extensiva como las propuestas por Ellis (2007). En el caso del concepto potencia, el entendimiento de esta dimensión por los profesores se vislumbra como la base para el establecimiento de un marco de referencia que permita subsanar la ruptura epistemológica referida en Martínez (2005) del paso del exponente natural al entero negativo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

y al racional, así como una forma de otorgar significado a expresiones de potencias que involucran exponentes no naturales tal como 2^{-n} $(n > 0)$, por ejemplo, como un modelo de comportamiento exponencial decreciente. En este trabajo, la propuesta para transitar conceptualmente de la potencia de números con exponente natural a la de exponente negativo o racional, es a través de un proceso de generalización (extensiva) por inducción.

6. Reflexiones finales

Si bien se atribuye un papel al contexto y a las experiencias en la conceptualización matemática, en este escrito se presenta la componente cognitiva de una propuesta basada en la generalización. La interpretación y resolución de tareas de generalización por inducción para abstraer elementos epistémicos del concepto potencia, se propone no solo como una forma para desarrollar el razonamiento inductivo de profesores, sino de sensibilizarlos sobre una forma didáctica-pedagógica de promover el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. En efecto, la organización de una experiencia de aprendizaje docente bajo el esquema de la Figura 1, ha conducido a la reflexión de que cada solución y las situaciones propuestas son casos particulares de potenciación que se pueden llegar a generalizar y, por tanto, constituyen ejemplos de tareas que favorecen la inducción y la generación de conocimiento sobre potencia.

7. Referencias bibliográficas

Aparicio, E., Gómez, K. y Sosa, L. (2017, aceptado para publicación). Experiencias y colectividad para el desarrollo profesional docente en matemáticas de educación básica. *Revista de Investigación e innovación en Matemática Educativa, 2*.

Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, K. (2016). *Álgebra y pensamiento algebraico. Experiencias de aprendizaje en bachillerato*. Mérida, México: Universidad Autónoma de Yucatán.

Association of Mathematics Teacher Educators (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics*. http://amte.net/standards/ Consultado: 30/03/2017

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. España: Editorial de la Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.

Castro, E., Cañadas, M. C. & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational psychologist, 31(3/4)*, 175-190

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Contreras, L., Montes, M., Climent, N. y Carrillo, J. (2017, en prensa). Introducción al modelo MTSK: Origen e investigaciones realizadas. *For-Mate.*

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common core state standards for mathematics*. http://www.corestandards.org/ Consultado: 21/11/2016

Davydov, V. (1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. In J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet studies in mathematics education* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA*, 7(4), 155-170.

Klauer, K., Willmes, K. & Phye, G. (2002). Inducing inductive reasoning: Does it transfer to fluid intelligence? *Contemporary Educational Psychology, 27,* 1–25.

Hodnik, T. & Manfreda, V. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics*, *89,* 286-306.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 194-229.

Martinez, M. V. & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, *86*, 125–149.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Standards and Principles for School Mathematics. http://www.nctm.org/standards/ Consultado 24/10/2015

Papageorgiou, E. (2009). Towards a teaching approach for improving mathematics inductive reasoning problem solving. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 313-320. Thessaloniki, Greece.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, Vol. XXXVI, 1, 87-109.

Rubinstein, S. (1979). *El desarrollo de la psicología. Principios y métodos* (Vidal, A. Trad.). Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación.

ISBN 978-84-945722-3-4