CB-1.191

SI AL-KHWARIZMÍ LEVANTARA LA CABEZA...A LA ABSTRACCIÓN DEL ALGEBRA DESDE LA MANIPULACIÓN

Luis Cros Lombarte
lluis.cros@sarria.epiaedu.cat
Escola Pia Sarrià-Calassanç de España.

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: manipulativo, álgebra, policubo, polinomios.

Resumen

En esta comunicación se presenta como se ha llevado al aula la introducción a las expresiones polinómicas y las operaciones básicas entre polinomios: suma, resta y producto. Por su extrema abstracción las expresiones polinómicas y su operatividad es algo que suele bloquear a los alumnos y las estrategias que se intentan utilizar para romper esos bloqueos no suelen ser todo lo eficientes que debería. Recordando como el material manipulativo ayuda en las primeras etapas del aprendizaje de las matemáticas a consolidar los conceptos abstractos de cantidad he diseñado una experiencia de aula en la que los primeros pasos en el mundo de los polinomios los alumnos los hagan con material manipulativo, más en concreto con policubos. La versatilidad que dan para unirse y separarse permite simbolizar fácilmente los diferentes grados del polinomio. Este curso ha sido la primera vez que he llevado esta experiencia al aula y la presentación en este congreso tiene como objetivo principal compartirla con docentes de otros niveles y localizaciones para poderla enriquecer y hacerla más potente y eficiente en el aula, en hacer más sencilla la comprensión de esta herramienta tan abstracta como es el lenguaje algebraico.

ISBN 978-84-945722-3-4

El álgebra, descripción.

El álgebra es la rama de la matemática que estudia la combinación de números, letras y signos para representar operaciones aritméticas de una manera general. Se podría resumir que el álgebra es la generalización del algebra. En nuestro currículum encontramos bajo el epígrafe álgebra las expresiones algebraicas, los polinomios, las ecuaciones o las funciones. El álgebra forma parte de nuestro currículum de manera notable, se le da mucha importancia.

Expresión algebraica:

El doble de un número más su consecutivo: $2 \cdot x + (x+1)$

Polinomio:

$P(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1$

Ecuación:

$3 \cdot (x - 1) = 2 \cdot x - 2$

Función:

$y = f(x) = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$

El álgebra, historia.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para encontrar el origen de la palabra álgebra nos tenemos que remontar al año 820 cuando el matemático y astrónomo persa Muhàmmad ibn Mussa al-Khwarazmí (conocido como Al-Khwarizmí o Al-Juarismi) publica la obra *Al-Jabr wa-al-Muqabilah* (Compendio de cálculo por reintegración y comparación) Por esto Al-Khwarizmí es considerado el padre del algebra tal como la conocemos hoy en día. La palabra álgebra de nuestro idioma proviene por tanto del árabe, en concreto de la palabra *al-ŷabar (Al-Jabr)* su traducción vendría a ser algo así como restauración, reponimiento o reintegración. Si fuésemos a su traducción literal de *Al-Jabr* sería la reunión de partes rotas por eso durante la Edad Media un algebrista era un restaurador o alguien que arregla huesos rotos, hoy en día esta acepción está en desuso aunque en el diccionario de la RAE (Real Academia Española) su segunda entrada para algebrista es: “Cirujano dedicado especialmente a la curación de dislocaciones de huesos”

Al-Khwarizmí, matemático y astrónomo persa (???-850d.C)

Los matemáticos árabes de la edad media son los que dan el primer empujón al álgebra, anteriormente a ellos los matemáticos babilónicos, griegos, chinos o egipcios desarrollaron métodos algorítmicos y geométricos para resolver problemas que hoy se suelen resolver mediante ecuaciones.

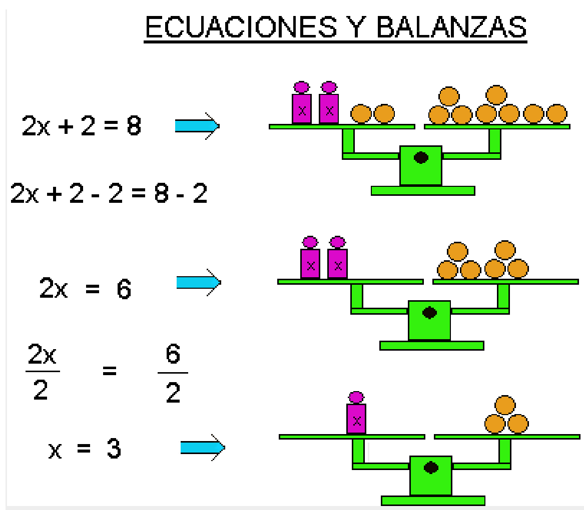
El salto cuantitativo y cualitativo para el álgebra se dio durante la Edad Moderna con el establecimiento de los signos (+) y (-) 1518 Grammateus, signo (=) 1557 Recorde, signo (x) 1618, signo (·) 1631 Harriot, signo (:) 1684 Leibniz… que se popularizaron durante el siglo XVIII. Toda esta simbología facilitó el trabajo algebraico y condujo, durante el siglo XIX, a crear áreas del álgebra abstracta absolutamente independientes de nociones aritméticas o geométricas.

El aprendizaje del álgebra.

La principal dificultad que nos encontramos en la enseñanza de conceptos algebraicos es la enorme complejidad y abstracción que conlleva. Las matemáticas se aprenden de manera

ISBN 978-84-945722-3-4

intuitiva y natural, nos rodean en muchos de los procesos que hacemos de manera cotidiana. Para optimizar su utilización debemos formalizar y en el paso de la matemática natural a la matemática formal muchas personas se pierden. Para que este paso sea sencillo y accesible para todos los niveles se debe hacer paulatino, empezar con actividades o situaciones reales, proponer el reto de buscar un método más óptimo para hacer lo mismo y hacer el método formal y natural en paralelo para acabar dejando el método manipulativo-natural al lado y proceder de manera formal, dejando el material manipulativo o la situación real para recordar el camino al formalismo. En la siguiente imagen se muestra como sería el paso intermedio, los alumnos han estado resolviendo situaciones de balanzas o similares con el material simplemente, cuando se amplía el número de elementos el material empieza a ser incómodo así que se propone una solución mejor, una manera de expresar los elementos de la balanza de manera general y se trabaja con las dos situaciones de manera paralela como se ve en la imagen:



En el siguiente paso sería eliminar la balanza y hacer ecuaciones sin el material, si alguna situación no está clara se volvería a recurrir al material.

Experiencia de aula.

La actividad que quiero compartir se ha realizado este curso 2016-2017 con un grupo de 9 alumnos de tercero de ESO de la Escola Pia de Sarrià-Calassanç de Barcelona que tienen

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

especial dificultad en el aprendizaje de las matemáticas y sobre todo en comprender la abstracción que conlleva todo el bloque de álgebra.

El tema que se les quería explicar era las expresiones polinómicas y las operaciones entre polinomios básicas: suma, resta y multiplicación.

Este grupo ya había trabajado con álgebra en la resolución de ecuaciones de primer grado y la traducción a lenguaje algebraico de expresiones verbales. Durante el aprendizaje de estos temas se observó que trabajar con material manipulativo reducía la angustia de afrontar un tema nuevo, que se llegaba a la abstracción cuando el alumno comprendía bien el sentido real de lo que estaba haciendo y que en el momento que se olvidaba algún paso era más fácil conectar con el aprendizaje realizado en sesiones anteriores. La principal dificultad que se observó durante el trabajo con ecuaciones fue el paso a la expresión abstracta, con el objeto manipulativo (cajas de cerillas y fichas de parchís) acompañando al aprendizaje se entendía a la perfección, sin el objeto al lado la expresión: 2·x no quedaba claro que fuese x + x y a la pregunta: “¿Cuántas x hay aquí: 2·x + 3·x?” en la mayoría de las ocasiones la respuesta era “2” que son las que se observan, con el objeto manipulativo al lado la respuesta era “5”.

Material manipulativo utilizado para hacer ecuaciones de primer grado.

Reto propuesto: ¿cuántas fichas de parchís hay en las cajas de cerillas para que en los dos lados haya las mismas fichas?

Ante esta situación era necesario disponer en el aula de un material que permitiese simbolizar los diferentes grados de un polinomio y que fuera suficientemente versátil para unirse como suma y como multiplicación o separarse como resta de manera natural. Para esto se pensó en policubos (cubos de 2cm de arista que se pueden encajar para hacer prismas de base cuadrada de diferentes alturas) y regletas (prismas de base cuadrada de diferentes alturas, son rígidos, no se

ISBN 978-84-945722-3-4

pueden separar en composiciones más pequeñas o unir en composiciones más grandes)

Para conseguir que mis alumnos comprendan el concepto de polinomio y las operaciones básicas entre polinomios se emplearon ocho sesiones de 50 minutos.

El objetivo de la primera sesión es que los alumnos creen su propio conocimiento sobre los polinomios y las operaciones de suma de polinomios y resta de polinomios. Para llevar a cabo la sesión se ha de preparar el aula con dos mesas centrales, una para los policubos y otra para las regletas, en las que se simbolizan como x, x^2, x^3, x^4 y x^5 los prismas de alturas uno, dos, tres, cuatro y cinco respectivamente. En estas mesas también se deja un polinomio escrito de manera algebraica y simbolizado con el material.

Material de las mesas centrales

También se prepararán cuatro espacios marcados con las letras: A, B, C y D en cada espacio hay cuatro papeles por el lado visible aparece la letra del espacio y por el lado oculto hay: en dos un polinomio escrito de manera algebraica y en los otros dos las operaciones con polinomios, en uno una suma y una resta de polinomios (los polinomios que se tienen que operar son los que están en las otras dos hojas) en el otro un producto de monomios. En los papeles de las operaciones se indica que no se puede descubrir hasta que se indique (la idea era primero revisar si la composición de los polinomios es correcta, si lo es ya se pueden hacer las operaciones)

ISBN 978-84-945722-3-4

Espacios para cada uno de los grupos participantes.

Una vez preparada el aula los alumnos, formando tres parejas y un grupo de tres, pasan al aula y se les asigna un espacio. Entonces se les indica que deben dar la vuelta a una de las hojas y hacer lo que pone: “Representa este polinomio: $P(x) = 4x^4 - 2x^3 + 3x – 1$” (cada grupo tenía dos polinomios diferentes en sus dos hojas que podían dar la vuelta) si no saben que hacer se les dice que pueden ir a mirar las mesas centrales.

Al principio los alumnos se ven sorprendidos y no saben que hacer, preguntan qué es lo que quiero que hagan pero la respuesta en todo es: “No sé, mira las instrucciones de las hojas de tu espacio y observa la información de las mesas centrales. Cuando creáis que habéis hecho correctamente la instrucción avisadme y lo valido para que paséis a la hoja que no se puede tocar…”

Ninguno de los grupos consiguió hacer la representación de los polinomios a la primera. De los cuatro grupos, uno consiguió representar los polinomios y hacer la suma y la reta bien, dos consiguieron hacer hasta la suma de polinomios pero no dieron con la tecla para hacer la resta y otro grupo fue incapaz de conseguir hacer las operaciones, acabaron consiguiendo representar los polinomios. Lo mejor de esta parte de la actividad fue como se ayudaban entre

ISBN 978-84-945722-3-4

ellos, una de las alumnas consiguió bastante rápido conectar la simbología y cuando consiguió representar los polinomios se le pedía que explicara porque era así y todos los compañeros se aprovecharon de las explicaciones y justificaciones que hacía ella.

En la segunda sesión nos pusimos toda la clase en una mesa para 10, entre el grupo donde estaba la alumna que lo había entendido más rápidamente y yo mismo revisamos toda la simbología y como se hacía la representación y las operaciones de suma y resta de polinomios, incluso el grupo que la sesión anterior estuvo muy perdido durante esta explicación se enteró de todo el procedimiento. Acabamos la sesión haciendo producto de monomios.

En la tercera sesión comenzamos a trabajar las operaciones de manera simbólica, primero se escriben los polinomios algebraicamente, a continuación se simbolizan usando el material manipulativo. Se hace la operación manipulativamente y se escribe el resultado algebraicamente. Cuando queda claro esta relación se hace mediante una tabla colocando solo los coeficientes de cada término y se comprueba con el material manipulativo.

En la cuarta sesión se puede introducir el producto de polinomios si está suficientemente consolidado el proceso de suma y resta. El producto se realiza directamente con la tabla sin recurrir a los policubos, ningún alumno lo usa ni para hacer el producto de monomios. En esta sesión ya hay algunos alumnos que han conectado con la parte abstracta y dejan de usar el material manipulativo, a pesar de esto lo tienen a su alcance para poder recordar alguna idea que no queda del todo clara.

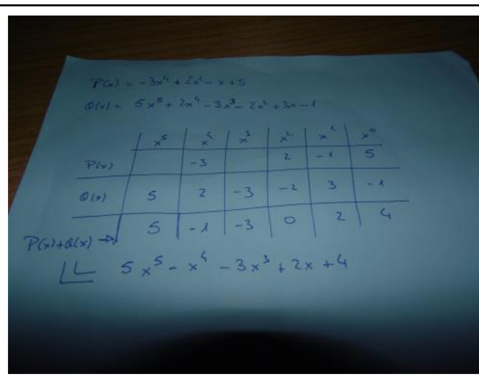


Tabla para resolver operaciones polinómicas de manera abstracta.

En las siguientes sesiones ... e realizado cada alumno a su ritmo y con el material ... vidualmente el trabajo que van haciendo y vamos co... inan la realización de las operaciones con la tabla se le se propone intentar hacer las operaciones en línea: $P(x) + R(x) = (3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4) + (-5x^3 + 2x^2 + x + 5) = 3x^4 – 7x^3 + 4x^2 + x + 1$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En la novena sesión se realiza la prueba escrita, ninguno de los 9 alumnos del grupo utiliza el material manipulativo durante la prueba ni la operación en línea, todos usan las tablas. Los 9 alumnos aprobaron la prueba, a la semana de la actividad no recordaban casi nada de lo que se había trabajado pero cuando se hacía mención a los policubos se recordaban las metodologías y se podía volver a trabajar con estos conceptos sin problemas, esto se observó en la preparación de la prueba trimestral realizada unas semanas después y en los resultados obtenidos.

A modo de conclusión.

Llegar a la formalización y a la abstracción en los conceptos matemáticos es necesario ya que optimiza la utilización de las matemáticas y la mejor manera de hacerlo es haciendo una transición paulatina de una matemática cercana y natural a una matemática formal y abstracta, para hacer este camino ayudarnos de material manipulativo facilita el tránsito.
Esta propuesta de aprendizaje ha sido experimentada en una sola ocasión y con un grupo reducido, la compartición de esta práctica con los docentes asistentes al congreso tiene un objetivo claro, que se pueda llevar al aula y tener un feedback para mejorar la práctica y hacerla más potente y eficiente.

Referencias bibliográficas

Escuelapedia (2017). Historia del álgebra. http://www.escuelapedia.com/historia-del-algebra/ Consultado 23/05/2017

Wikipedia (2016). Álgebra. https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra Consultado 20/05/2017

ISBN 978-84-945722-3-4