

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN EL CURRÍCULUM: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA SU DESARROLLO EN EL AULA.

Daniel Fernández Contreras
danfernandez.ac@gmail.com
Chile

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: Comunicación Breve (CB)

Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)

Palabras clave: Demostración, Razonamiento en el aula.

Resumo

El presente trabajo, consiste en realizar una propuesta didáctica sustentada en la Teoría de Procesos de Prueba de Nicolas Balacheff (2000) para desarrollar la habilidad de demostrar en el aula. La propuesta, responde a la necesidad impuesta por los ajustes curriculares realizados por el Ministerio de Educación de Chile (2016) que reubican el trabajo de esta habilidad, que antes se trabajaba en el país sólo en la universidad y en carreras asociadas al campo matemático. En este afán, se busca entregar una sugerencia de cómo promover el razonamiento en el aula por medio de diferentes recursos ya utilizados por los docentes, material concreto, TICs, entre otras, verificando así su papel heurístico.

Este proyecto propone actividades didácticas con el objetivo de hacer transitar a las estudiantes desde actividades iniciales en el ámbito de las pruebas pragmáticas, hasta actividades orientadas a las pruebas intelectuales, para conseguir que ellos se acerquen al razonamiento y lenguaje matemático, logrando así, esencialmente que se efectúe una transición en el conocimiento, pasando de lo concreto a lo abstracto.

Planteamiento del problema:

La enseñanza de la matemática siempre ha sido fuente de preocupaciones para profesores y apoderados. A lo largo de la historia de la Educación, el aprendizaje de la matemática ha presentado constantes obstáculos y dificultades en la mayoría de los estudiantes. Además, en los últimos años han existido diversos cambios en el currículo nacional, con el último ajuste se introdujeron las Bases Curriculares, que son orientaciones respecto a lo que debe enseñarse en cada asignatura perteneciente a los planes de estudio del currículo nacional, propuestas por el Ministerio de Educación de Chile para la educación básica, en dichas bases se indica

para la asignatura de matemática que se debe desarrollar la habilidad de demostrar, tanto en el eje de Geometría como en el de Álgebra (Ministerio de Educación, 2012), volviéndose complejo para docentes el enseñar algo cuya noción no es del todo clara.

Además, en dos grandes pruebas internacionales que miden y analizan el rendimiento y logros educativos en los estudiantes, se tiene por una parte que “por primera vez Chile alcanza el primer lugar de Latinoamérica en todas las áreas evaluadas: Matemática, Lectura y Ciencias.” (Agencia de calidad de la educación, 2013, p. 11), sin embargo, se ubica muy por debajo de los demás países participantes, ya que, “Chile se encuentra a 71 puntos del promedio de la OCDE y entre el lugar 50-52 de los 65 países evaluados.” (Ibid, p. 16). Cabe destacar que en matemática, el país obtuvo 423 puntos y que, en esta misma área, un 52% de los estudiantes demuestra no poseer una base mínima de preparación para enfrentar los desafíos que impone la sociedad moderna (Ibid, p. 13). Por otra parte, en la prueba TIMSS (Agencia de Calidad de la Educación, 2012), el puntaje promedio obtenido por los estudiantes de 4º básico (9 a 10 años) en Matemática, es de 462 puntos. Esto indica que el 23% de los estudiantes chilenos queda fuera de los niveles de clasificación y solamente el 2% alcanza el nivel Avanzado. Un 33% alcanza solo el nivel Bajo, que corresponde a capacidades y conocimientos básicos en Matemática. Por otro lado, 30% de los estudiantes llega al nivel Intermedio, ellos logran aplicar conocimientos básicos en situaciones sencillas. Solamente el 12% de los estudiantes chilenos ha alcanzado el nivel Alto, lo que indica que logran aplicar su conocimiento y comprensión para resolver problemas matemáticos. (Agencia de calidad de la educación, 2013, pp. 14 – 16)

Lo anteriormente expuesto ha influido considerablemente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por esto las metodologías de los docentes deben ir modificándose para que estén acorde con lo que el nuevo currículum exige, y en consecuencia, el promover el desarrollo de nuevas habilidades en los alumnos se vuelve esencial.

La didáctica de la matemática es una disciplina que se ocupa del estudio de los fenómenos del proceso de Enseñanza y Aprendizaje ligados al saber matemático. Por lo expuesto anteriormente, se hace evidente la necesidad de utilizar teorías basadas en la didáctica de la matemática, ya que cumplen una función de guía para lograr exitosamente el aprendizaje significativo de los conocimientos matemáticos.

Este trabajo es una propuesta para la enseñanza de la habilidad de demostrar (Dreyfus, 2000), en estudiantes de nivel medio o secundario, en la cual se utilizó como sustento teórico, la tipología de prueba de Nicolas Balacheff (2000), que consiste en una descripción de las tipologías de pruebas que suelen presentar los estudiantes cuando se les solicita realizar una demostración de alguna propiedad matemática.

La motivación para llevar a cabo esta propuesta es complementar y aportar a las investigaciones referentes al tema de la demostración, debido a que es una habilidad compleja por el nivel de abstracción que se requiere para realizarla, es por eso que se considera necesario realizar un análisis de la información disponible y una propuesta con un sustento teórico apropiado, lo cual será de suma relevancia para los docentes de matemática.

Además se espera que el alumno sea capaz de construir su propio conocimiento a través de la teoría, que está sustentada en una concepción constructivista. La idea principal es presentar un instrumento innovador para que los docentes puedan trabajar con sus alumnos y así generar un aprendizaje significativo, logrando en ellos el desarrollo del razonamiento y el pensamiento crítico.

Objetivos

- I. Reflexionar en torno a los métodos de enseñanza de las demostraciones en educación básica planteados por el Ministerio de educación a través de las bases curriculares y textos de estudios.
- II. Proponer un diseño didáctico sustentado en la tipología de prueba de Nicolás Balacheff, para ser utilizada por estudiantes de 6° año básico (11 a 12 años) a 2° año medio (15 a 16 años).
- III. Evaluar la propuesta didáctica sustentada en la tipología de prueba de Nicolás Balacheff, como herramienta heurística en la construcción de la noción de demostración matemática.

Marco teórico

La Tipología de Prueba de Nicolas Balacheff (2000), es un modelo centrado en el Razonamiento Matemático. Este modelo clasifica las pruebas proporcionadas por los estudiantes en dos tipos: las Pragmáticas y las Intelectuales, cuando los docentes logran comprender las diferencias entre éstas, puedan utilizarlas en beneficio de promover en los estudiantes una apropiada forma de razonar y construir los conocimientos. Para explicarlas utilizaremos un ejemplo del álgebra: “Probar que la suma de tres números naturales consecutivos, es siempre múltiplo de tres.”²⁵

Las Pruebas Pragmáticas son aquellas que están ligadas a la acción, a la experimentación y la justificación, que se realizan a través de material concreto con el fin de asegurar la validez de un enunciado. Dentro de estas pruebas pragmáticas encontramos tres categorías:

1. El empirismo ingenuo, es cuando el estudiante afirma que un enunciado es verdadero después de observar que se cumple en determinadas circunstancias. En este caso el estudiante diría: $3 + 4 + 5 = 12$ es múltiplo de 3; $5 + 6 + 7 = 18$ es múltiplo de 3 extrayendo la conclusión a partir de un número acotado de casos.

2. La experiencia crucial escoge una experimentación cuyo efecto permite distinguir entre dos suposiciones, siendo verdadera sólo una de ellas. Se generaliza a partir de un caso lo menos particular posible, por ejemplo: $350000 + 350001 + 350002 = 1050003$

3. Por último, tenemos el ejemplo genérico que se refiere a que el estudiante escoge un ejemplo cualquiera y afirma que el enunciado es verdadero tras comprobar que se cumple para dicho ejemplo, avanzando hacia una formulación más general, para el ejemplo:

“ $4 + 5 + 6 = 4 + (4 + 1) + (4 + 2) = (4 \times 3) + 3$ y pasa lo mismo si en vez de 4 pongo cualquier otro número.”

Las Pruebas Intelectuales, requieren de un razonamiento específico e interiorizado, en el cual se dejan de lado los objetos materiales, transitando de lo concreto a lo abstracto del pensamiento. Dentro de las pruebas intelectuales encontramos tres categorías:

1. La experiencia mental se sustenta en la independencia de la representación de un objeto, con el razonamiento. Se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convencimiento, pero sirven para estructurar la justificación o apoyar la argumentación. En el ejemplo presentado se darían respuestas como: “Si pienso un número, el que sigue tiene uno más y el que sigue tiene dos más. Si los sumo tengo 3 y tres veces el primer número.”

²⁵ Dirección Provincial de Educación Superior y Capacitación Educativa. (2008). Los alumnos como productores de conocimiento matemático. San Bernardo, Argentina.

2. La demostración es un tipo de prueba que presenta una sucesión de enunciados que se organizan siguiendo un orden definido, cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema (demostrado previamente) o un postulado, utilizando un lenguaje reconocido por la comunidad matemática. En el ejemplo, aunque en forma resumida, sería:

“Sean n , $n+1$ y $n+2$ tres números naturales consecutivos, se tiene que:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)”$$

3. Por último, tenemos el cálculo sobre enunciados, que trata de pruebas autónomas de la experiencia y donde no se trabaja ni con ejemplos ni con dibujos. Crean razonamiento o construcciones intelectuales fundamentadas en teorías formalizadas que se originan en una definición o propiedad basándose en la transformación de expresiones simbólicas formales. Las actividades de demostración en los alumnos desarrollan la capacidad de elaborar procedimientos de resolución frente a un problema que después tendrán que demostrar a partir de argumentos que puedan convencer a otros de su veracidad: “La demostración es una herramienta esencial de prueba; ésta conduce a un ejercicio práctico, que hace posible la comunicación y la evaluación a la vez.”(Balacheff, 2000, p.2)

Metodología

El presente estudio busca establecer la relación existente entre la aplicación de un método de enseñanza basado en la Tipología de Prueba de Nicolas Balacheff (2000) y el desarrollo de la habilidad de demostración en geometría. Se busca establecer la relación existente entre las variables en estudio, es decir, confirmar la hipótesis de que la propuesta de enseñanza colabora para construir un razonamiento geométrico en la habilidad de demostrar. Por lo anterior, se deduce que la investigación tendrá una lógica deductiva, ya que lo que se pretende es confirmar la hipótesis planteada.

Se considerarán dos variables: la variable dependiente será el desarrollo de la habilidad de demostrar, en las estudiantes de 6to año básico, que comprenden edades entre 11 y 12 años, del Colegio España en Concepción “La variable dependiente no se manipula, sino que se mide para ver el efecto que la manipulación de la variable independiente tiene en ella.” (Hernández, Fernández, Baptista, 2010, p. 123) y la variable independiente serán los estudiantes de la muestra.

Se ha escogido para el desarrollo de la propuesta, contenidos de geometría para estudiantes de nivel medio o secundario.

Así, las actividades iniciales están orientadas a que los estudiantes observen ejemplos de triángulos y mediante la medición de sus ángulos y la suma de ellos, se aventuren a conjeturar que esta suma siempre es 180° . Posteriormente se les invita a realizar una verificación de su conjetura, aún con material concreto, mediante el uso de un triángulo de papel que deben recortar, para ubicar los ángulos de manera de formar un ángulo extendido y visualizar que la suma de los tres, efectivamente es 180° . A continuación, se introduce el apoyo del software Cabri para mostrar que podemos modificar los vértices de un triángulo y la propiedad continúa cumpliéndose. Todo lo anterior se desarrolla en el ámbito de las pruebas pragmáticas. El objetivo es ir acercando gradualmente a los estudiantes a las pruebas intelectuales para conseguir que desarrollen la habilidad de demostrar. Para esto, se ha diseñado una actividad que mediante la utilización de los conocimientos previos referentes a ángulos entre paralelas cortadas por una secante, va guiando a los estudiantes hacia una verdadera demostración. Finalmente, se debe comprender que por ser el primer acercamiento que tienen los alumnos a una habilidad tan compleja como la demostración, no se puede esperar que comprendan de inmediato toda la rigurosidad ni el lenguaje formal que esto requiere, por lo que la actividad final, se realiza mediante términos pareados, entregándoles una serie de sentencias que deben ordenar según lo observado hasta el momento, de modo de poder utilizarlo como base para la redacción de una verdadera demostración del Teorema trabajado.

La unidad de análisis que se utilizará, serán estudiantes de 6° año básico (11 a 12 años) y 2° medio (15 a 16 años), la población escogida corresponde a los estudiantes de dichos niveles pertenecientes a establecimientos municipales de la comuna de Concepción y, dentro de esta población, se ha escogido como muestra a estudiantes del Colegio España. Se ha optado por una muestra no probabilística, el criterio utilizado para la selección de la muestra es por conveniencia, ya que por las limitaciones de tiempo resulta más factible realizar la propuesta en un colegio determinado. Con respecto a la temporalidad, el presente estudio es de corte transversal porque no existe continuidad en el eje del tiempo, ya que los datos serán recogidos durante una cantidad de tiempo limitada, aplicando la prueba para medir el desarrollo de la habilidad de demostrar una sola vez sin posteriores repeticiones.

Resultados y Conclusiones

Se ha podido constatar a través de las actividades propuestas en el diseño de enseñanza, que si bien, el paso de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales no es natural como lo plantea Duval (2005), se puede provocar por medio de esta intencionalidad. Si bien durante la aplicación se pudo observar que no era una tarea fácil de abordar para los estudiantes, pues inicialmente les resultaba difícil esta abstracción de alcanzar la concepción demostración, durante y en el avance de las actividades comenzaron a realizar inferencias y conjeturas que los llevaron al acercamiento de la rigurosidad, incluso en la escritura de las justificaciones utilizadas para argumentar por medio de los criterios de congruencias las propiedades o teoremas en juego. Así se puede evidenciar un tránsito entre la tipología de pruebas, pues la primera forma de abordar los problemas, fue utilizando el software para medir y corroborar que la propiedad se cumplía, posteriormente justificaban sus construcciones y elementos de ella por medio de definiciones y propiedades, pero aun necesitando el dibujo de la construcción. Finalmente hubo un grupo de 3 estudiantes que logró formalizar con herramientas teóricas la veracidad de los distintos teoremas, alcanzando así una cercanía a las pruebas intelectuales. Se debe destacar que la Geometría Dinámica, en este caso, el software CABRI II juega un rol de real importancia, pues es éste, quién ayuda y motiva a los estudiantes a explorar, inferir, conjeturar, justificar, etc. Si bien, este es sólo el artefacto por el cual se desarrolla el tránsito de la visualización a la prueba, es quien cumple el rol de convencer a los estudiantes de la veracidad de las propiedades puestas en juego en el diseño propuesto, en particular, por medio de la percepción visual ellos identifican los elementos necesarios para la construcción utilizando el modelo teórico como referente en sus posteriores justificaciones.

Referencias bibliográficas

Agencia de Calidad de la Educación (2013). *Resultados PISA 2012 Chile*. Santiago: Agencia de Calidad de la Educación.

366

http://educacion2020.cl/sites/default/files/resultadospisa2012chile_agencia.pdf Consultado 06/09/2015

Agencia de Calidad de la Educación (2012). *Resultados TIMSS 2011. Chile*. Santiago: Agencia de Calidad de la Educación. <http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/02/resultados-timss-18-dic-2012.pdf> Consultado 06/09/2015

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Dreyfus, T. (2000). *La demostración como contenido a lo largo del currículum*. En Gorgorió i Solá, M. (coord.) *Matemáticas y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Madrid: Graó, pp. 126 – 134.

Duval, R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10, 5 - 53.

Ministerio de Educación Chile. (2012). *Bases Curriculares de Enseñanza Básica*. Santiago: Chile.

Ministerio de Educación Chile. (2016). *Bases Curriculares de Enseñanza Media*. Santiago: Chile.