ANÁLISIS COMBINATORIO: DIFICULTADES EN ALUMNOS DE INGENIERÍA

Lorena Verónica Belfiori
Universidad Tecnológica Nacional – Regional Avellaneda
lorenabelfiori@gmail.com

Resumen
El pensamiento estocástico, necesario para trabajar con situaciones en las que se debe averiguar la probabilidad, es muy distinto al pensamiento determinístico, común a la mayoría de las actividades matemáticas. Las personas se enfrentan con muchas dificultades cuando necesitan emplear este tipo de pensamiento ya que no están acostumbradas a él.
Además se verifica que, a pesar de ser la enseñanza de la combinatoria y la probabilidad obligatoria a nivel medio, muchas veces no se realiza con la profundidad adecuada o directamente no se realiza, motivo por el cual el alumno universitario se encuentra con un vacío en sus conocimientos estocásticos que debe llenar al cursar la materia Probabilidad y Estadística en la facultad.
Se propone realizar la enseñanza o revisión de este tema haciendo uso de la resolución de problemas que se puedan conectar con la realidad del alumno o con juegos.

Palabras clave: pensamiento estocástico, análisis combinatorio, resolución de problemas.

1. Introducción

El pensamiento estocástico, necesario para trabajar en probabilidad, es muy distinto al pensamiento determinístico, común a la mayoría de las actividades matemáticas. Las personas se enfrentan con muchas dificultades cuando necesitan emplear este tipo de pensamiento ya que no están acostumbradas a él.
La definición clásica de probabilidad es una definición a priori la cual implica un cociente entre dos números que representan la cantidad de casos posibles y la cantidad de casos favorables. La obtención de estos números no siempre resulta simple. El análisis combinatorio nos permite facilitar el trabajo de calcular probabilidades de eventos complejos en los cuales, frecuentemente la enumeración de casos es difícil, tediosa o ambas.
Podemos definir a la combinatoria o análisis combinatorio como la parte de la Matemática que estudia las diferentes maneras en que se pueden formar agrupaciones entre elementos de uno o más conjuntos y cómo contar ordenadamente su número.
Pero aún con la ayuda del análisis combinatorio se verifica que los problemas de combinatoria son complicados. Al respecto André Antibí señala que,

> "Ahora bien en este tipo de problema, por pura tradición, en mi opinión, se indica rara vez los pasos a seguir y evidentemente, esto contribuye a hacer las cosas más difíciles... Se trabaja sobre conjuntos finitos, ciertamente, pero raramente se está en capacidad, en este tipo de problema, de especificar y de contar uno a uno los elementos del conjunto del cual se quiere calcular el cardinal"

A través de la observación del desempeño de varios cursos tanto de nivel secundario como de nivel universitario (alrededor de cuatrocientos alumnos), se ha notado que a muchos estudiantes les es engorroso aplicar las técnicas de combinatoria lo cual nos lleva a plantearnos ¿Es el contar un proceso intuitivo? ¿Cómo interviene el razonamiento en las situaciones de combinatoria? ¿Es la capacidad combinatoria sólo un instrumento matemático o es un componente fundamental del razonamiento lógico? ¿Es la resolución de problemas una buena herramienta para la enseñanza de este tema? Para dar respuesta a estos interrogantes, dentro del marco teórico de la teoría de Piaget, se analiza el trabajo realizado por ochenta alumnos de la carrera de ingeniería industrial durante la unidad de combinatoria y su posterior evaluación.

2. Evolución del desarrollo del tema a lo largo de la escolarización

El análisis combinatorio es un componente esencial de la matemática discreta, y, como tal, tiene un papel importante en las matemáticas escolares. En 1970, Kapur, para justificar la enseñanza de la combinatoria en la escuela, presentó las razones siguientes, que todavía son válidas:

- Puesto que no depende del cálculo, permite plantear problemas apropiados para diferentes niveles; pueden discutirse con los alumnos problemas aún no resueltos, de modo que descubran la necesidad de crear nuevas matemáticas.
- Puede emplearse para entrenar a los alumnos en la enumeración, la realización de conjeturas, la generalización, la optimización y el pensamiento sistemático.
- Puede ayudar a desarrollar muchos conceptos, como los de aplicación, relaciones de orden y equivalencia, función, muestra, conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etc.
- Pueden presentarse muchas aplicaciones en diferentes campos, como: Química, Biología, Física, Comunicación, Probabilidad, Teoría de números, Grafos, etc.

Los lineamientos curriculares para matemática señalan que

> "Una tendencia actual en los currículos de matemáticas es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiana. La teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a cómo actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística..., y aún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática" (MEN, 1998).

Basándonos en los trabajos realizados por Piaget e Inhelder (1951) podemos justificar la edad en la cual se les enseña a los alumnos cada uno de los conceptos de análisis combinatorio y la profundidad de los mismos, indicándose también la necesidad de su enseñanza.

Desde un orden epistemológico, ellos afirman que la idea de azar no es innata y que el desarrollo mental operatorio pasa por tres etapas: preoperatoria (2 a 7 años), operaciones concretas (7 a 12 años) y operaciones formales (12 a 14 años).

En la educación inicial los alumnos empiezan a realizar agrupaciones de cierta cantidad de objetos experimentando con material concreto. El número de posibles agrupaciones queda fuera del interés del infante ya que para él la forma en que arma el grupo es única e intuitiva. Los experimentos de Piaget e Inhelder (1951) han probado que el niño de preescolar (preoperatorio) sólo puede hacer algunas agrupaciones de una manera empírica, y no intentan encontrar un método de realizar un inventario exhaustivo. Por ejemplo, puede formar parejas de objetos o permutar objetos entre sí, pero nunca de una forma completa y siempre con pocos elementos.

En la educación primaria se trabajan los conceptos de análisis combinatorio en forma intuitiva. Es decir, durante el período de las operaciones concretas, los niños buscan modos de realizar inventarios de todas las permutaciones, variaciones y combinaciones posibles en un conjunto dado, con un número pequeño de elementos y llegan a procedimientos rudimentarios de cálculo mediante ensayo y error, sin seguir un método sistemático.

En los primeros años de la escuela secundaria los contenidos de análisis combinatorio se enseñan formalizando las ideas intuitivas que traen los alumnos de experiencias anteriores que les permiten, a través de razonamientos, interpretar las fórmulas de variación, permutación y combinación. Piaget e Inhelder afirman que, durante la etapa de las operaciones formales, el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las agrupaciones posibles de un conjunto dado de elementos, por tanto, es también en este momento en el que tiene lugar la comprensión por parte del niño de las citadas operaciones combinatorias.

En conclusión, estos autores argumentan que la idea de azar se inicia cuando el infante accede a la etapa de las operaciones concretas. De sus estudios resulta que las operaciones combinatorias y la idea de proporción se desarrollan hasta el nivel del pensamiento formal, lo cual permite el inventario completo de posibilidades (espacio muestra) y la cuantificación de sus posibilidades. No obstante, Fischbein citica estos resultados al señalar que no todos los sujetos de esta edad son capaces de descubrir el método de construcción de combinaciones y considera que, aún en el nivel de las operaciones formales, las técnicas combinatorias no se adquieren espontáneamente sino que su enseñanza es necesaria. Heitele (1975) denomina modelo explicativo al proporcionado por las ideas fundamentales, que son las que interesa enseñar al estudiante a lo largo de toda su educación. Estos modelos implican nociones, conceptos y sus interrelaciones; y se distinguen en los distintos niveles cognoscitivos no estructuralmente sino en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración. Son diez ideas las que propone: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números, y muestra.

En el orden cognitivo, la obra de Fischbein (1975) sobre fuentes de la intuición probabilística plantea que

> La enseñanza en estocásticos no sólo es posible, sino necesaria en niveles educativos tan tempranos como lo son los básicos [preescolar, primaria y secundaria]. La ausencia de una enseñanza en tales niveles redundaría en el arraigo de intuiciones erróneas, que con la edad vienen a ser más y más difíciles de erradicar.

Según Piaget e Inhelder (1955), si el sujeto no posee capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales. Más aún, estos autores relacionan la aparición del concepto de azar con la idea de permutación y la estimación correcta de probabilidades con el desarrollo del concepto de combinación. Si analizamos el uso del diagrama en árbol en probabilidad y combinatoria, podemos también observar que hay una relación entre el espacio muestral de un experimento compuesto y las operaciones combinatorias. El inventario de todos

los posibles sucesos en dicho espacio muestral requiere un proceso de construcción combinatorio, a partir de los sucesos elementales en los experimentos simples.
Siguiendo con el recorrido a lo largo de la escolarización, notamos que la mayoría de las carreras universitarias contienen en su currículum la materia Probabilidad y estadística en la cual el análisis combinatorio es un tema básico imprescindible para el desarrollo de la definición clásica de probabilidad. En diversas ocasiones se considera como un conocimiento previo infaltable que, a pesar de ello, no siempre está presente. Por tal motivo se desarrolla el tema a modo de revisión o como la primera unidad. Se constata que algunos alumnos no han tenido la enseñanza adecuada del tema a pesar de estar en el currículum de la escuela secundaria o bien que poseen grandes dificultades cuando se trabaja con números tales que se complica verificar aquello que les indica la intuición.

3. ¿Por qué utilizar problemas referidos a juegos o a la vida cotidiana?

Basándonos en los trabajos de Fischbein (1975) y Piaget (1975) podemos considerar la hipótesis que si el niño aprende en un entorno lúdico le resultará más factible el aprendizaje. Piaget señala que al jugar, el niño desarrolla su inteligencia, y mediante el juego éste puede llegar a asimilar realidades intelectuales que sin éste, son externas a la inteligencia infantil. En investigaciones relacionadas con la forma en que las personas adquieren nociones probabilísticas, se encuentran resultados favorables al introducirlas mediante actividades basadas en juegos de azar, dado que favorecen su adquisición de la manera más natural, es decir, de forma intuitiva.
Crespo Crespo (2008) enuncia que

> El conocimiento matemático se construye y se sustenta básicamente en dos modos de comprensión y expresión: la intuición y la razón. Estos modos de conocimiento, aunque de naturaleza distinta, son complementarios e indispensables en la matemática. El primero es creativo, subjetivo y directo, el segundo es analítico, objetivo y reflexivo. En la enseñanza de la matemática no se debe descartar ninguna forma de razonamiento: inductivo o deductivo.

El trabajo referente a la probabilidad y combinatoria se ha desarrollado con enfoques propuestos por Dubois (1984) el cual permite una clasificación de los problemas de recuentos simples combinatorios en tres tipos básicos, y se basa en la identificación de esquemas de representación implícitos en los enunciados de los problemas. Dubois identifica los siguientes tipos:

1. Selección de una muestra a partir de un conjunto de objetos.
2. Colocación de objetos en casillas.
3. Partición de un conjunto en subconjuntos.

La distinción entre los modelos anteriores es de vital importancia ya que el tipo de objetos y sus representaciones que intervienen en cada modelo es diferente (muestreo, correspondencias, particiones de conjuntos).
Fischbein y Gazit (1988) estudiaron el efecto de la instrucción sobre la capacidad combinatoria, descubriendo que, incluso niños de 10 años, pueden aprender algunas ideas combinatorias con la ayuda del diagrama en árbol. También analizaron la dificultad relativa de los problemas combinatorios, en función de la naturaleza y el número de elementos que debían ser combinados, identificando algunos errores típicos en la resolución de problemas combinatorios simples.
El diagrama en árbol, es considerado un modelo generativo en cuanto sugiere y facilita una generalización iterativa o recursiva (problemas sucesivos con un mayor número de elementos cada vez) y una generalización constructiva (problemas derivados del

inicial), siendo estas las dos características esenciales del razonamiento recursivo, propio de la combinatoria. Se suele verificar que los alumnos universitarios intentan resolver todas las situaciones problemáticas haciendo uso de los diagramas de árbol, incluso cuando se trata de combinaciones cometiendo errores que arrastran luego a la teoría de las probabilidades.

4. Desarrollo de las clases

Inicialmente se les realizó a los alumnos una encuesta anónima para averiguar los conocimientos formales previos acerca de combinatoria e investigar el uso de la intuición para dar respuesta a los problemas planteados. Se utilizaron únicamente los problemas combinatorios simples de enumeración y recuento basados en situaciones de la vida cotidiana y en los juegos de azar. En estos problemas pedimos a los alumnos el inventario de todos los casos posibles producidos por una cierta operación combinatoria o el cálculo, sin enumeración, del número de estas configuraciones. En este último caso, se verifica que si el alumno ha estudiado combinatoria (35% de los casos), identifica la operación combinatoria del enunciado. Pero si el alumno no estudió combinatoria previamente, también encuentra la solución, aplicando las tres reglas combinatorias básicas de la suma, producto y cociente. Usualmente, la resolución de los problemas requiere también un razonamiento recursivo.
Concordamos con Hadar y Hadass (1981) que las dificultades típicas con que se encuentra el alumno al resolver los problemas combinatorios básicamente son las siguientes:

- Identificación del grupo de sucesos u objetos que se pide enumerar o contar. A veces los estudiantes no reconocen el conjunto correcto de objetos que se debe enumerar. En general, una percepción incoherente de dicho grupo lleva a conclusiones erróneas. Hay que tener en cuenta, además, que en el enunciado de los problemas combinatorios hay a veces convenios implícitos que no quedan claros para el alumno.
- Elegir una notación apropiada. Los estudiantes a menudo se enfrentan con la dificultad de elegir la notación apropiada que represente de una forma compacta toda la información y condiciones dadas. Esta dificultad aumenta por el hecho de que diferentes textos presentan distintas notaciones para las operaciones combinatorias.
- Fijación de una o más variables. Debido a su complejidad, en los problemas combinatorios compuestos, es necesario fijar una o más de las variables para obtener un método contable coherente y luego generalizar, a fin de obtener una solución válida para cualquier valor de la variable que se fijó previamente. Esto implica añadir una más a las restricciones impuestas por el problema y es un paso no convencional para los alumnos, que están acostumbrados a usar tan solo las hipótesis dadas en los enunciados.
- Generalizar la solución: Muchas veces, aunque el alumno resuelve con éxito un problema combinatorio para varios casos particulares, fallan al encontrar una solución general, al no ser capaz de unir las soluciones de una forma recursiva.

5. Evaluación

Con el fin de dar respuesta a las preguntas inicialmente planteadas se toma un parcialito con los contenidos de combinatoria solamente al finalizar el desarrollo de la unidad. Para la evaluación se tuvo en cuenta las tendencias recientes en Educación Matemática,

las cuales expresan que la Matemática no es sólo un lenguaje simbólico y un sistema conceptual, sino una actividad humana que implica la resolución de problemas socialmente compartidos. En Godino y Batanero (1994) se analizan estos aspectos y, consecuentemente, se enfatiza el papel de la resolución de problemas en la enseñanza, aprendizaje y evaluación del conocimiento matemático de los alumnos. De acuerdo con ello, el sistema cognitivo de los sujetos es una totalidad organizada y compleja. Más aún, tal como indican estos autores "a causa de la naturaleza inobservable del conocimiento, la caracterización de la capacidad de los alumnos, respecto a un campo conceptual matemático, tal como la Combinatoria, debe realizarse a través de un proceso de inferencia, a partir del sistema de respuestas observables de los alumnos a los problemas planteados."
Por lo tanto, además de puntuar la corrección de la solución, también se califican las estrategias de los alumnos, sus argumentos y los tipos de error que manifiestan. El éxito o fracaso en los diferentes ejercicios de una prueba, muchas veces están relacionados entre sí, ya que se refieren a competencias similares. Por ello, se considera que las respuestas de los alumnos tienen un carácter cualitativo, multidimensional e interdependiente. Esto requiere enfocar el problema de la evaluación del conocimiento matemático desde una nueva perspectiva, como indica Webb (1992): "El informe comprehensivo del funcionamiento de un individuo o grupo en la Matemática o en la aplicación de la Matemática." (p. 662).

6. Conclusiones

Los alumnos de ingeniería poseen dificultades para resolver problemas de análisis combinatorio ya que el contar un número de casos elevado no es un proceso intuitivo sino que es necesario la utilización del razonamiento para entender frente a qué tipo de situación problemática se encuentra y a partir de ella aplicar el procedimiento o fórmula adecuada. Se verifica que, a pesar de ser la enseñanza de la combinatoria y la probabilidad obligatoria a nivel medio, muchas veces no se realiza con la profundidad adecuada o directamente no se realiza (en el 65% del alumnado) motivo por lo cual, el alumno universitario se encuentra con un vacío en sus conocimientos estocásticos que debe llenar al cursar la materia Probabilidad y Estadística en la facultad.
A partir de los resultados del presente trabajo concluimos que la capacidad combinatoria no es sólo un instrumento matemático sino que es un componente fundamental del razonamiento lógico siendo la resolución de problemas una buena herramienta para la enseñanza de este tema.

7. Bibliografía

Antibí, A. (2000). *Didáctica de las Matemáticas: Métodos de resolución de problemas.* Serie Cabecar. Costa Rica.

Batanero, C., Díaz Godino, J. y Cañizarez, M. (1994). Análisis exploratorio de datos: Sus posibilidades en la Enseñanza Secundaria. *Suma* 9, 25-31.

Bressan, O. y Bressan, A. (2008). *Probabilidad y estadística: Cómo trabajar con niños y jóvenes.* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Cisneros, J. (s.f) *Sistemas de datos, combinatoria y probabilidad, en la enseñanza a través de situaciones problemas.*

Crespo Crespo, C. (2008). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. En P. Leston (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21, 717 -727. México: Comité latinoamericano de matemática educativa A.C.

Dubois, J. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*. v. 15, n. 1, 37-57.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 5, 193-198.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistics thinking in children.* Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Hadar, N. y Hadass, R. (1981). *El camino para solucionar un problema combinatorio sembrado de riesgos.* Educational Studies in Mathematics.

Heitele, D. (1975). *An epistemological view on fundamental stochastic ideas*. Educational Studies in Mathematics 6, 187-205.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent.* París: P.U.F

Kapur, J.N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 3, 111-127.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares para matemática.*Asociación Colombiana de Matemática Educativa. Colombia.

Navarro-Pelayo, V; Batanero, C y Díaz Godino, J. (s.f). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática*, 8(1), 26-39.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La génèse de l'idée d'hasard chez l'enfant.* París: Presses Universitaire de France.

Roa, R. y Navarro-Pelayo, V. (s.f). *Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad.* Universidad de Granada. Recuperado de http:/www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades_10_01/doc/Roa-Navarro.doc en junio de 2010

Sanabria, G. (2010). Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio. *Matemática, Educación e Internet.* Vol. 10, N°2. Costa Rica.

Webb, N. (1992). Assessment of student's knowledge of mathematics: step toward a theory. In D.A. Grouws (Ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.