SECUENCIA DE ACTIVIDADES PROPUESTA PARA UN TALLER DE GEOMETRÍA

José Campos; Mercedes Astiz; Perla Medina
Universidad Nacional de Mar del Plata
josecampos86@yahoo.com.ar

Resumen
En el presente trabajo se describe una Secuencia de Actividades (SA) diseñada para un taller de geometría, la opinión de los expertos que la juzgaron, la de los alumnos que la desarrollaron y la del docente que la utilizó en el aula. La SA configuró el principal instrumento desarrollado para una experiencia, realizada con alumnos universitarios de la asignatura Cálculo II de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata y tuvo su origen en las dificultades detectadas a lo largo del tiempo en el aprendizaje de la asignatura Cálculo II perteneciente al segundo cuatrimestre del primer año del plan de estudios de ambas carreras.

Palabras clave: Geometría, Análisis Matemático, visualización, herramientas informáticas.

1. Introducción

Una de las grandes dificultades que presentan los temas de Análisis Matemático y su relación con los de Geometría reside en la gran capacidad de abstracción que se necesita para acercarse a ellos. En particular, mayores son los problemas cuando se trata de funciones de dos variables, su interpretación y representación gráfica en el espacio. Diversas investigaciones han puesto de manifiesto estas dificultades (Hershkowitz et al., 1987; Hershkowitz, 1989; Parzysz, 1991; Gutiérrez et al., 1996).
En este sentido, la Informática provee de herramientas para allanar este camino, con programas sencillos es posible graficar funciones de R^2, moverlas, rotarlas, observarlas desde distintos puntos de vista y así analizar sus comportamientos en la dirección de cualquier vector. Sin duda, un buen paso por las funciones en R^2 y sus representaciones en el espacio facilita el proceso de abstracción para el estudio de las funciones de R^n.
Desarrollar el pensamiento visual y favorecer las habilidades de visualización son dos objetivos claves en la educación geométrica. Zimmermann y Cunningham (1991) señalan que en matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio hacia un fin, la cual determina la comprensión. Es el proceso de formar figuras (mentalmente, con la ayuda de lápiz o papel, o tecnología) y usarlas eficazmente para el descubrimiento y la comprensión de los conceptos. Gutiérrez y Jaime (1996) afirman que "en la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona juega un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado…". El pensamiento visual, según afirma Alsina Catalá y otros (1997) incluye la habilidad de visualizar, pero va más allá, al poder incluir, entre otros, aspectos tales como el reconocimiento rápido de determinadas formas o categorías y la manipulación automática de determinados códigos. Explorar, seleccionar, simplificar, abstraer, analizar, comparar, completar, resolver, combinar y reflexionar sobre información visual son acciones necesarias en el pensamiento visual (Hershkowitz, 1989). "El pensamiento visual, si se explota convenientemente, puede revolucionar la forma de

hacer Geometría y de enseñarla", afirma Marjorie Senechal citada por Alsina y otros (1997) y agregan que la exploración espacial mediante el uso de computadoras es un claro ejemplo de cómo se ha revolucionado la aproximación docente a las estructuras tridimensionales y cómo se han abierto nuevas fronteras de investigación sobre el efecto en el aprendizaje.

Aunque existe consenso en la incorporación de la tecnología tanto como herramienta en el descubrimiento matemático, como un auxiliar en el proceso de enseñanza-aprendizaje, aún no se le ha dado el lugar que debería tener. Experiencias con evidencias favorables en este sentido permitirán dar pasos firmes hacia un cambio en las metodologías de enseñanza acordes con las necesidades del alumno de hoy.

En este marco se planteó un plan de trabajo, para una beca de Alumno Avanzado, denominado *Un plan de investigación para evaluar el aporte de las herramientas computacionales en la conceptualización del conocimiento geométrico en alumnos universitarios*. En esta presentación se describe una "Secuencia de Actividades" (SA) diseñada como principal instrumento de la experiencia, se detalla el contenido y un par de actividades a modo de ejemplo, como también, la opinión expresada por los expertos que la juzgaron, de los alumnos que la desarrollaron y del docente que la puso en práctica.

2. Descripción de la investigación en el marco donde se diseñó la SA

El plan consistió en el diseño e implementación de una experiencia para trabajar con alumnos del segundo cuatrimestre de primer año de las carreras de matemática de la FCEyN de la UNMdP, a fin de analizar en qué medida las herramientas computacionales utilizadas para el trazado de curvas y/o representación tridimensional, favorecen el proceso conceptualización y sistematización del conocimiento geométrico (Campos, 2010). Se contó con un año de tiempo por lo que se seleccionó el tema parametrización de superficies de revolución, que involucra no sólo trabajar con distintos tipos de coordenadas (rectangulares, polares, cilíndricas y esféricas), sino también el concepto de curva (funciones vectoriales), sus propiedades, parametrización y reparametrización. Abarca varias unidades temáticas y conceptuales de la asignatura Cálculo II que se profundizan en Geometría Diferencial.

Se implementó una intervención didáctica con dos modalidades (tradicional y con soporte informático), basada en la SA, a fin de comparar los resultados en la conceptualización y parametrización de curvas a partir del análisis de las representaciones obtenidas por los alumnos en ambas modalidades. La investigación fue de tipo descriptiva (Hernández Sampieri et al, 1993), se estudiaron los efectos que produjo la visualización a través del trabajo con computadoras, con un diseño cuasi-experimental (León y Montero, 1997) pues la asignación a los grupos, 8 alumnos en cada uno, no fue posible realizarla al azar. Se realizaron entrevistas a docentes de Cálculo II y Geometría Diferencial con el objeto de relevar las mayores dificultades observadas en los alumnos en la conceptualización del tema. Se elaboró SA y para evaluar los resultados se utilizaron registros de observación en aula, cuestionarios, entrevistas, resolución de problemas y el rendimiento en los exámenes parciales. El asistente matemático seleccionado fue wxMaxima, pues de los software libres es el que más se adecuaba a los requerimientos de las actividades que se diseñaron.

Los dos grupos desarrollaron la SA, al mismo tiempo, en 6 (seis) sesiones de una duración de 120 minutos cada una, con una frecuencia de 1 (una) sesión semanal. El grupo control continuó con los docentes de la asignatura con la práctica convencional, mientras que el experimental desarrolló los encuentros, con dinámica de aula taller, en el laboratorio de computación. Finalmente se aplicó la medición post intervención a ambos grupos, que consistió en una actividad especial y el desempeño en los exámenes parciales. Además, los alumnos del grupo control expresaron su opinión sobre la experiencia en general, y en particular sobre la SA, a través de una encuesta que fue diseñada para tal fin y entrevistas personales. La SA y el cuestionario fueron validados a través de la consulta a expertos.

3. Descripción de la SA

Consta de doce (12) actividades, más una diagnóstica. Fueron resueltas individualmente por los alumnos de ambos grupos. Se contempló que las actividades involucraran cada uno de los conceptos a tratar y que propiciaran el análisis y discusión de sus aspectos más relevantes. Versaron sobre: Secciones Cónicas. Geometría en el Espacio R^3. Coordenadas esféricas, polares y cilíndricas. Superficies. Parametrización de superficies. Funciones vectoriales. Superficies de Revolución. Funciones de dos variables: estudio y gráfico. Curvas de nivel. Límites dobles. Derivadas direccionales, plano tangente y vector gradiente. Diferenciabilidad. Integrales múltiples. Descripción de regiones del plano y del espacio. Cálculo de integrales y volumen de un sólido. Cálculo vectorial. Integrales de funciones vectoriales y escalares sobre curvas y superficies.

En cuanto al diseño, se presentan recuadros con definiciones, gráficos, fórmulas, conceptos y propiedades importantes, breves introducciones teóricas como ayuda para la resolución, como también, referencias sobre las funciones a utilizar con el asistente matemático.

La extensión de esta presentación no permite mostrar la SA completa, por lo que a modo de ejemplo, se muestran a continuación la cuarta y la séptima.

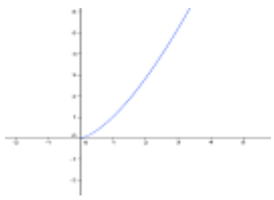
A4: Volumen y área de una superficie de revolución, deducción de fórmulas a través de la visualización geométrica e intuitiva.

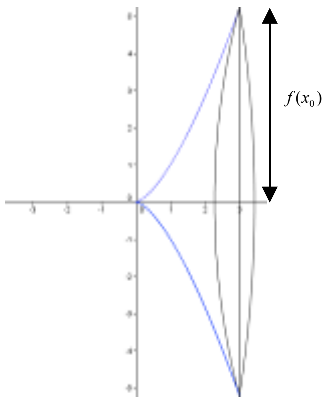
Volumen y Área de una superficie de revolución:

Existen fórmulas para calcular el volumen y el área de una superficie de revolución a partir de conceptos aprendidos en Cálculo I. Éstas son:

Volumen de una superficie de revolución $= \pi \cdot \int^{b} (f(x))^2 \; dx$

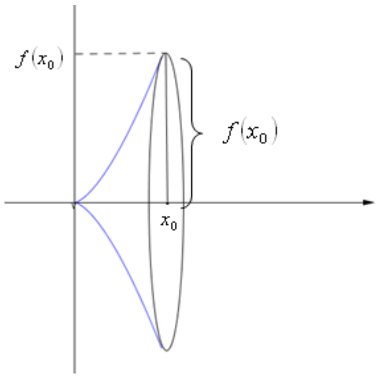
Veamos cómo surgen:
A partir de esta curva





Si rotamos la curva con respecto al eje x, obtenemos la superficie que nos muestra la figura.

De la misma manera

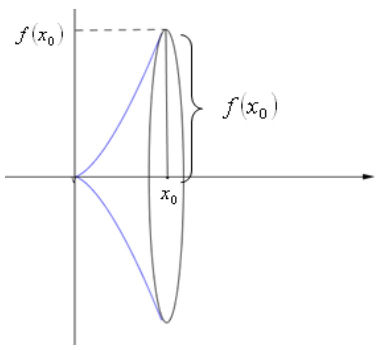


Cuando $x = x_0$, *observamos en la figura que obtenemos como traza una circunferencia de radio* $f(x_0)$. *Por ello su área es* $A_{x_0} = \pi \cdot (f(x_0))^2$. *Por lo tanto, para calcular el volumen de la superficie generada al rotar la curva con respecto al eje* x *debemos sumar las áreas de las circunferencias que obtenemos para cada* x_0 *del intervalo* $[a,b]$. *Por lo cual obtenemos una suma infinita de dichos volúmenes* A_{x_0}*.espesor infinitesimal*, *lo que equivale a:*

<u>Volumen de la superficie de Revolución</u>

$$= \int^{b} A_x \, dx = \int^{b} \pi \cdot (f(x))^2 \, dx = \pi \int^{b} (f(x))^2 \, dx$$

Observamos intuitivamente cómo surge la fórmula para calcular el área de una superficie de revolución.



Para cada x *en* $[a,b]$, *la longitud de la circunferencia es* $P_x = 2\pi . f(x)$ *y esto se debe multiplicar por la longitud vector tangente a la curva que viene dada por* $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ *(recordar que el área lateral de un cuerpo se calcula como el perímetro de la base multiplicado por la altura del cuerpo).*

Por lo tanto debemos sumar esto para todos los $x \in [a,b]$, *lo que equivale a:*

<u>Área de una superficie de revolución</u>

$$= \int_a^b P_x \sqrt{1+(f'(x))^2} \, dx = 2\pi \int_a^b f(x).\sqrt{1+(f'(x))^2} \, dx$$

<u>Nota</u>: Más adelante se harán las demostraciones formales de cada una de las fórmulas.

Actividad Nº 4:

1) *¿Cómo se llama la superficie que se genera al rotar una función lineal respecto de alguno de los ejes coordenados? Esboza una gráfica.*
2) *a) ¿Qué superficie se obtiene al rotar la curva de ecuación* $x^2 + y^2 = 4$, *con* $y \geq 0$ *respecto del eje x? Esboza una gráfica.*

   b) Calcula su volumen.
3) *Deduce las fórmulas antes mencionadas pero ahora cuando la curva se rota respecto del eje y.*

4) *a) Sea* $f(x) = 2x$, *deduce gráficamente si la superficie generada al rotar el gráfico de f(x) respecto al eje x tiene mayor volumen que la superficie que se obtiene al rotarlo al respecto al eje y o viceversa.*

   b) ¿Con qué parámetro de la función se relaciona?

   c) Sea ahora $f(x) = k.x, k \neq 0$. *Sea* S_1 *la superficie generada al rotar el gráfico de f(x) respecto al eje x y sea* S_2 *la superficie que se genera al rotar al gráfico respecto de y. Completa con <, > o = según corresponda:*

   Si $k < 1$ *entonces* $Vol(S_1)$.....$Vol(S_2)$.

   Si $k > 1$ *entonces* $Vol(S_1)$.....$Vol(S_2)$.

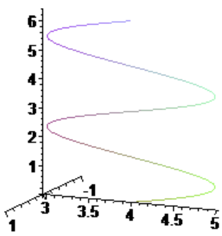
   Si $k = 1$ *entonces* $Vol(S_1)$.....$Vol(S_2)$.

   Relaciona lo obtenido anteriormente con el ángulo que forma la recta con el semieje

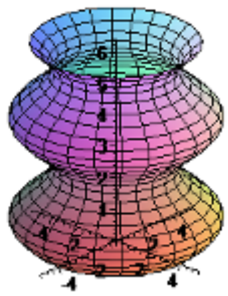
A7: Deducción de la expresión paramétrica de una superficie de revolución. Generación de superficies de revolución a través de curvas planas y realización de su gráfico.

Superficies de revolución

Construcción:



$\alpha(v) = (f(v), g(v))$ *curva regular, donde* $f(v) > 0$ *sin autointersecciones.*



Entonces la superficie de revolución generada por la rotación de $\alpha(v)$ *alrededor del eje z se obtiene mediante la parametrización:*

$$X(u,v) = (f(v)\cos(u), f(v)sen(u), g(v))$$
$$v \in (a,b) \;\; y \;\; u \in (0,2\pi)$$

Actividad Nº 7:

1) Grafica y muestra la parametrización de la curva que al girarla genera dicha superficie.

a) Una esfera de radio 4 y centro (0, 0, 0).

b) El elipsoide de revolución que se genera al rotar la semi-elipse $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$, *alrededor del eje z.*

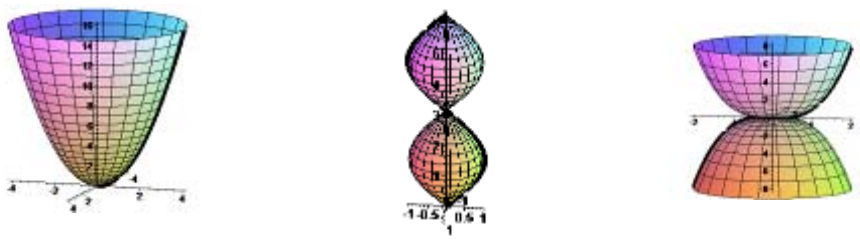
c) El cono circular recto cuya generatriz es $z=3y,\ y\in[-2,2]$.

2) El toro T es una superficie generada al rotar el círculo de radio r alrededor de una recta contenida en el plano del círculo y alejada a una distancia a > r del centro de dicho círculo. Sea S^1 *el círculo en el plano yz con centro en el punto (0, 1, 0) y de radio* $\frac{1}{2}$. *Grafica el toro generado por la rotación de* S^1 *alrededor del eje z.*

3) Realiza los siguientes gráficos utilizando wxMaxima.

4. Opiniones sobre la SA

- **De los Expertos:** La validación de contenido de la SA fue realizada a través de la consulta a expertos. Actuaron como jueces tres docentes, dos de Cálculo II y uno de Geometría Diferencial. Se les presentó el problema que motivó el plan y los objetivos planteados. Opinaron a través de entrevistas y de un cuestionario conformado por 33 ítems relacionados con los siguientes aspectos: el diseño, los contenidos, las actividades, los tiempos asignados y el asistente matemático seleccionado. Se utilizó una escala Likert con 5 niveles: Siempre, La mayoría de las veces, Algunas veces, En pocas ocasiones y Nunca, habiéndose obtenido 72,5% en la primera, un 27% en la segunda y 0,5% en la tercera para el ítem. El cuestionario finaliza con un espacio donde pudieron realizar sugerencias y recomendaciones para mejorar la SA. Todas se tuvieron en cuenta para la



redacción final.
- **De los Alumnos:** para conocer su opinión, al finalizar la experiencia, se realizó una encuesta de 27 ítems, con la misma escala Likert utilizada en la de expertos. De ellos, 10 se refieren a la SA, 5 sobre el diseño y 5 sobre el contenido. Para evaluar la comprensión de los textos, la importancia de las preguntas y la extensión del cuestionario, y obtener la versión definitiva se realizó una prueba piloto con 6 alumnos de la carrera.

Se obtuvo una respuesta favorable de los alumnos con respecto a la SA, ya que el 70% de ellas se concentraron en los dos primeros niveles, y fue reafirmada en las entrevistas personales. En ellas se obtuvieron comentarios alentadores como “las ideas intuitivas me ayudaron a interpretar los conceptos y me facilitó el trabajo abstracto”, “me dí cuenta de lo que significaba encontrar una curva que al girarla generara una superficie de revolución en particular”, “a través de la visualización del concepto de parametrización de superficies, logré comprender los conceptos y realizar los ejercicios de las guías de trabajos prácticos"; "puedo tomar cualquier curva y girarla y así obtener una superficie, puedo ver todas las aplicaciones que tiene la matemática en otras áreas". El 100% coincidió, en las entrevistas y durante las clases, en la importancia de las computadoras para observar y comprobar.

- **Del docente que llevó adelante la experiencia:** fue el autor de la SA y cuenta con importante experiencia en la asignatura Cálculo II, pues se ha desempeñado como "ayudante alumno" durante tres años. En su entrevista expresó que "las actividades desarrolladas en el taller con una computadora por alumno:

-propició la discusión en muchas situaciones, y a través ellas, se pudieron detectar y corregir errores conceptuales, profundizar y establecer conexiones entre los distintos contenidos y áreas.
-permitió al docente supervisar el trabajo de cada alumno, ofrecerles ayudas puntuales y personalizadas, coordinar la puesta en común.

5. Consideraciones finales

Como ya se ha mencionado, los actores de la experiencia opinaron favorablemente sobre la SA, y de lo logrado a través de ella en cuanto a motivación, visualización, clarificación de conceptos. Con respecto a los alumnos se observaron resultados favorables en relación a la interpretación de los conceptos teóricos y la vinculación de estos con otras áreas de la disciplina. En lo que a los docentes se refiere, también han expresado la intensión de continuar con el taller, a tal punto que el profesor responsable de Cálculo II durante el ciclo 2011 ha solicitado por nota formal al departamento de matemática, su incorporación como parte de la asignatura. En ella expresa que la representación grafica de regiones y superficies en el espacio son fundamentales para resolver muchos problemas de la asignatura, es decir, no son meras ilustraciones sino que forman parte de la solución. El Taller de Geometría 3D, ha allanado el camino para superar las dificultades que las mismas representan para los alumnos y abierto notablemente el panorama de aquellos que tuvieron la suerte de realizarlo. Si bien no están concluidos los resultados finales de la investigación, los obtenidos hasta ahora son alentadores. Sin duda, experiencias con evidencias favorables como ésta permiten dar pasos firmes hacia un cambio en las metodologías enseñanza acordes con las necesidades del alumno de hoy.

6. Referencias

Alsina Catalá, C.; Fortuni Aymemí, J.; Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué Geometría?*. Madrid, Editorial Síntesis.
Alsina Catalá, C.; Fortuni Aymemí, J.; Pérez Gómez, R. (1997). *Geometría Analítica*. Madrid, Editorial Síntesis.
Campos, J., Medina, P., Astiz, M. (2010). Un plan de investigación para evaluar el aporte de las herramientas computacionales en la conceptualización del conocimiento geométrico en alumnos universitarios". *III REPEM-Memorias*, (3), 396-402
Gutiérrez, A., Jaime, A. (1996*). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, 143-170.
Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (1993). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill.

Hershkowitz, R. (1989). “Visualizations in geometry. Two sides of the coin”. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11 (1), 61-76.
Hershkowitz, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. *Mathematics and Cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 70-95.
Hershkowitz, R., Bruckeirmer, M., Vinner, S. (1987). Activities with teachers base don cognitive research. *Learning ande Teaching Geometry*, 222-235.
León O. y Montero, I. (1997) *Diseño de investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill
Parzysz, B. (1991). Representation of Space and Students. Conceptions at High School Level, *Educational Studies in Mathematics*, (22), 575-593.
Zimmermann W. y Cunningham. (1990). ¿What is Mathematical Visualization?. *Visualization in Teaching and Mathematics* (19), 1-9.