UNA APROXIMACIÓN AL ESTUDIANTE PREUNIVERSITARIO EN MATEMÁTICA COMO USUARIO DE HEURÍSTICAS

Inés Casetta; Víctor González
Universidad Nacional de General Sarmiento. Instituto del Desarrollo Humano.
inescasetta@yahoo.com.ar; vgonzale@ungs.edu.ar

Resumen
En este trabajo presentamos un procedimiento metodológico que hemos implementado en cursos de Matemática pre-universitaria correspondientes a dos Universidades, la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) y la Universidad Tecnológica Nacional de Concepción del Uruguay (UTN). Ambos cursos no contaron con un modelo de enseñanza explícita e intencional de estrategias heurísticas para abordar la resolución de problemas matemáticos. El procedimiento metodológico persiguió obtener una descripción del perfil de un estudiante preuniversitario de matemática bajo un modelo de enseñanza que no tenía por fin la enseñanza de heurísticas. Esto responde al propósito de estudiar el vínculo (preliminar) entre este perfil y el diseño de un dispositivo didáctico para la enseñanza de algunas heurísticas para un curso preuniversitario.

Palabras clave: Matemática – Estrategias Heurísticas – Educación – Enseñanza

1. Introducción

El presente trabajo se enmarca dentro de las nociones que provienen de la escuela Anglosajona de Didáctica de la Matemática. Dos grandes contribuciones al estudio de la resolución de problemas emanan de las obras de Polya (1965) y de Schoenfeld (1980, 1992). Ambos establecen en sus lineamientos, concepciones que permiten describir los procesos cognitivos que pone de manifiesto el estudiante al momento de resolver una situación que resulte ser un problema para él, tales como el uso de heurísticas y aspectos metacognitivos implícitos y/o explícitos.
Reportamos aquí un estudio que continua el que hemos iniciado en Casetta et al. (2009). En este último hemos presentado un procedimiento que nos permite seleccionar a priori, para cada sujeto, el tipo de técnica/s con las que diseñar una entrevista que resulta apropiada para recabar información sobre las *heurísticas* espontáneas que el sujeto utiliza al momento de resolver *problemas.*
Hemos implementado dicho procedimiento en cursos de Matemática pre-universitaria correspondientes a dos Universidades, la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) y la Universidad Tecnológica Nacional de Concepción del Uruguay (UTN). Ambos cursos no contaron con un modelo de enseñanza explícita e intencional de estrategias heurísticas para abordar la resolución de problemas matemáticos. Analizamos los datos obtenidos de dicho procedimiento en términos de una lista de estrategias heurísticas que utilizó Schoenfeld (1980) como un instrumento en la enseñanza de su modelo de resolución de problemas. Entendemos que este proceso puede habilitarnos a lecturas individuales y comparadas que aporten a una aproximación de los estudiantes preuniversitarios como usuarios de estrategias heurísticas.
El objetivo de este trabajo es presentar una descripción del perfil, en cuanto a usuarios de estrategias heurísticas, de algunos estudiantes de nivel preuniversitario. Una de las razones de nuestro interés es estudiar el vínculo (preliminar) entre este perfil y el diseño

de un dispositivo didáctico para la enseñanza de algunas heurísticas para un curso preuniversitario.
Para acercar al lector a qué estamos entendiendo por perfil en cuanto a usuarios de estrategias heurísticas, presentamos a continuación un ejemplo en esa dirección. Tomando por caso la estrategia heurística “argumentar por el contra-recíproco” uno esperaría que los estudiantes de grado de una carrera de Matemática puedan reconocer a ésta como una estrategia heurística de utilidad y que logren usarla apropiadamente, mientras que para un estudiante preuniversitario tal vez uno espere que la misma sea reconocida como una estrategia heurística de utilidad pero que su uso no se espere como una estrategia frecuente (sin una enseñanza explícita de la misma).

2. Breve descripción del marco teórico

Con respecto a los factores que intervienen en el *proceso* de resolución de *problemas* matemáticos Schoenfeld (1992) menciona como uno de los factores a las *estrategias de resolución de problemas o estrategias heurísticas*. Se hace necesario aquí especificar qué concepción de problema y de heurísticas adoptamos.
Un problema matemático para un individuo es una situación que requiere solución y, éste, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato. (Chacón, Farías, González y Poco, 2009, p. 572).
Entendemos por *estrategias heurísticas* (Schoenfeld, 1980) a una técnica o sugerencia general que le ayuda al que resuelve a entender o a resolver el problema. Y por *heurísticas espontáneas* a aquellas estrategias heurísticas que el estudiante utiliza sin una enseñanza explícita de las mismas por parte del docente.
Schoenfeld (1980) reporta un modelo del *proceso* de resolución de problemas matemáticos basado en las siguientes fases: análisis –diseño y exploración –implementación– verificación. Lo útil de dicho modelo es que provee una lista de estrategias heurísticas que usualmente entran en juego más apropiadamente en ciertas fases del proceso de resolución de un problema matemático. A continuación presentamos una traducción de dicha lista extraída de la referencia citada.

ANALISIS

- *Dibuje un diagrama siempre que sea posible*
- *Examine casos especiales*
    - *seleccione algunos valores especiales para ejemplificar el problema e irse familiarizando con él.*
    - *examine casos límite para explorar el rango de posibilidades.*
    - *si hay un parámetro entero, dele sucesivamente los valores 1, 2, …,m y vea si emerge algún patrón inductivo*
- *Trate de simplificar el problema*
    - *Explotando la existencia de simetría.*
    - *Usando argumentos del tipo \sin pérdida de generalidad".*

EXPLORACIÓN

- *Considere problemas esencialmente equivalentes.*
    - *Reemplazando condiciones por otras equivalentes.*
    - *Recombinando los elementos del problema de maneras diferentes.*
    - *Introduciendo elementos auxiliares.*
    - *Reformulando el problema:*

    - *Mediante un cambio de perspectiva o notación.*
    - *Mediante argumentos por contradicción o contraposición.*
    - *Asumiendo que tenemos una solución y determinando sus propiedades.*
- *Considere un problema ligeramente modificado.*
    - *Escoja submetas (tratando de satisfacer parcialmente las condiciones).*
    - *Relaje una condición y luego trate de reimponerla.*
    - *Descomponga el dominio del problema y trabaje caso por caso.*
- *Considere problemas sustancialmente modificados.*
    - *Construya un problema análogo con menos variables.*
    - *Deje todas las variables fijas excepto una, para determinar su impacto.*
    - *Trate de aprovechar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones similares.*

VERFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN

- *¿Pasa su solución estas pruebas específicas?*
    - *¿Usa todos los datos pertinentes?*
    - *¿Está de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables?*
    - *¿Soporta pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?*
- *¿Pasa estas pruebas generales?*
    - *¿Puede ser obtenida de manera diferente?*
    - *¿Puede ser sustanciada por casos especiales?*
    - *¿Puede ser reducida a resultados conocidos?*
    - *¿Puede utilizarse para generar algún resultado conocido?*

Con respecto a la actividad intelectual que realiza un estudiante, en nuestro caso al resolver un problema matemático, consideramos el proceso que realiza el alumno cuando analiza la marcha del proceso de resolución como parte de la *metacognición*. Entendemos que es amplia la bibliografía existente sobre metacognición y compartimos con Sigmund Tobias y Howard T. Everson (2009) que existen desacuerdos acerca de las posibles definiciones de dicho concepto. Pero pareciera haber acuerdos en que el docente-investigador podrá inferir aspectos referentes a la metacognición sobre la base de las observaciones del comportamiento de los estudiantes a través de distintos métodos de observación: protocolos, entrevistas, grabaciones en video de parejas de estudiantes resolviendo una actividad, etc. En particular para conocer las heurísticas espontáneas que utiliza el estudiante, entendemos que necesitamos que éste eleve al plano consciente los procesos de pensamiento que moviliza durante la resolución de un problema matemático y que sea capaz de comunicarlos, o nosotros pudiéramos advertirlos. De este modo dentro de una variedad de técnicas para recabar información de los procesos de pensamiento puestos en juego a la hora de resolver problemas describimos a continuación las características esenciales de dos de las técnicas utilizadas para el diseño de las entrevistas (cuyos resultados de implementación analizaremos en la sección siguiente).

Técnica denominada *Auto observación retrospectiva*: El estudiante analiza su accionar cognitivo objetivamente después de realizar una actividad intelectualmente exigente.

Técnica denominada *Pensar en voz alta*: El estudiante resuelve en voz alta una actividad intelectualmente exigente, mencionando todo lo que realiza y en particular lo que está pensando alrededor de la resolución de dicha actividad.
Para ampliar información sobre las técnicas el lector puede consultar González (1996) y (2009). Y para refinamientos sobre el diseño de entrevistas para otros tipos de técnicas puede consultar en Casetta (2009).

3. Desarrollo

El ámbito en que se desarrolla la investigación está determinado por los cursos de Matemática pre-universitaria correspondientes a dos Universidades, Universidad Nacional de General Sarmiento y la Universidad Tecnológica Nacional Regional Concepción del Uruguay. En ellos se incluyen contenidos de la escuela media (álgebra básica, conjuntos numéricos, geometría básica, un recorrido por funciones elementales) con un tratamiento que pone énfasis en la resolución de problemas y modelización así como en la argumentación sobre procesos y resultados.
Presentamos brevemente el recorrido que realizamos en diferentes trabajos dentro del equipo de investigación y que abonan para el desprendimiento del estudio que reportamos aquí.
En Chacón et al (2009) se obtuvieron criterios para elaborar actividades que sean problemas para los estudiantes de UTN y UNGS. Éstos, derivados de resultados de la investigación, son:

- Presentar enunciados en lengua natural
- Presentar gráficos conteniendo información que debe extraerse de ellos para poder resolver la actividad
- Incluir contenidos matemáticos que utilicen elementos numéricos o algebraicos complejos, inclusive parámetros

Posteriormente el estudio realizado en Colombano et al (2009) reporta la propuesta y justificación de un procedimiento para diseñar problemas para su uso en el contexto de la clase de Matemática, atendiendo a la perspectiva de la escuela Anglosajona. Considera como destinatario de los problemas a un grupo de estudiantes con características similares. Establece que al momento del diseño de las actividades las mismas deberían denominarse potenciales problemas, pues sólo cuando el estudiante se enfrente a ellos los docentes sabrán con certeza si resultaron problema para sus alumnos.
Finalmente se llevó a cabo <u>el trabajo de campo</u> implementando actividades que sean potenciales problemas en ambas poblaciones para estudiar heurísticas presentes en los estudiantes. Se decidió suministrar a la totalidad de los estudiantes de los cursos preuniversitarios (de ambas universidades) un cuestionario conteniendo potenciales problemas. Esto representó la primera parte del trabajo de campo. La resolución fue de carácter individual y domiciliaria. Dentro de las pautas se les solicitó la entrega de borradores previos (a la producción final) y de la producción final. Se les hizo explícita la siguiente declaración "Anotá todo lo que pienses cuando desarrollas la resolución de cada uno de los problemas, SIN BORRAR NI TACHAR nada".
El análisis de las resoluciones nos condujo a conformar una primera muestra intencional de estudiantes para entrevistar. El criterio de selección fue que sus producciones incluyan los "intentos" previos a la entrega formal y que pongan en evidencia capacidad para explicitar lo que hace, para probar y descartar posibles estrategias en su resolución, y que hayan usado distintos registros semióticos para comunicar parte de su resolución

(esté o no matemáticamente correcta, tanto sea en el borrador y/o en la presentación en limpio).
Abordamos para esta muestra la segunda etapa del trabajo de campo, que consistió en complementar la información cognitiva referida a heurísticas espontáneas que usan los alumnos cuando están frente a problemas, realizando entrevistas individuales a los integrantes de la muestra.
Las entrevistas fueron diseñadas a partir de la elaboración de criterios descriptos en Casetta et al (2009). Pudimos elegir la técnica más apropiada, en el sentido de posibilitar el acercamiento a conocer las heurísticas espontáneas al momento de enfrentar un problema. Se llevaron a cabo 10 entrevistas en total entre las dos universidades (6 estudiantes de UNGS y 4 de UTN).
Para dar respuestas que aporten al objetivo planteado en este trabajo presentamos algunos análisis sobre la base de 3 de las entrevistas realizadas (2 en UNGS y 1 en UTN) articulando las dos partes del trabajo de campo con la lectura de sus producciones en términos de diversas variables tales como: recursos cognitivos, heurísticas, reflexión metacognitiva, etc. Luego desprendemos el estudio al uso de estrategias heurísticas para determinar el perfil del estudiante como usuario de heurísticas.
El enlace entre el cuestionario inicial de los estudiantes de la primera muestra con su entrevista permitió la configuración de la segunda muestra intencional. Ésta entendemos y explicitamos no es representativa de los alumnos de ingreso de ambas universidades, en el sentido de las heurísticas espontáneas que utilizan la mayoría de los estudiantes; sino que lo es por la posibilidad de aproximar a un perfil de usuario de estrategias heurísticas.
El estudio de la segunda muestra nos permitió elaborar las siguientes conceptualizaciones que son parte del perfil del usuario de heurísticas:
Estos estudiantes manifiestan en el cuestionario inicial asumir la responsabilidad de resolver la actividad asignada. Este primer momento del hacerse cargo no es un tema menor, dado que muchos de los estudiantes preuniversitarios no pueden afrontarlo. Los motivos exceden este estudio, pero podemos observar entre otras causas, que no confían en su formación previa y se sienten en el ámbito universitario sin pasado cognitivo, o bien lo reconocen pero no saben cómo ponerlo en juego.
La lectura de los cuestionarios que obtuvimos de tres estudiantes fueron analizados utilizando la tabla de heurísticas de Schoenfeld, en forma conjunta con las heurísticas que estimábamos que aparecieran. Este análisis deja ver algunas heurísticas comunes en el uso al resolver problemas. A continuación transcribimos algunos sucesos en las entrevistas. La notación que utilizamos para referir a los estudiantes es Al1, Al2 y Al3.
- En la fase de Análisis. Dibuje un diagrama siempre que sea posible.
Al1: "Estoy haciendo un gráfico para más o menos mostrar lo que estoy pensando"
Al2: "Primero una visualización gráfica" "Primero los gráficos, siempre"
Al3: "Hice el esquema más que nada para nombrar ángulos. No sabía si lo iba a usar pero bueno, ya que lo tenía empecé a nombrar ángulos, le medí los grados; y es más que nada para escribir, y puse todo"'
- En la fase de Análisis. Trate de simplificar el problema explotando la existencia de simetría.
Al1: "Yo lo que hice es mirar, eh, este lado que ustedes ven acá…el lado opuesto, sé que los dos tienen…"

Al2: Lo muestra a través de un registro gráfico, dibuja para uno de los problemas un lado de un polígono y señala que no completa el dibujo y realiza un conteo aceptando que va a pasar lo mismo en los otros lados del polígono.
Al3: “para poner algo de lo que pensé… multipliqué 5 x 4 que son los lados y le resté digamos… eh... los que estaban demás porque se repiten en los otros lados”
- En la fase de Exploración. Considere problemas esencialmente equivalentes, mediante un cambio de perspectiva o notación.
Al1: Establece una conexión entre una fórmula que encuentra f(x)= 4.x+ 2, que se adecua a la modelización del problema, con la siguiente f(x)= c.x + 2 realizando aclaraciones sobre el parámetro ‘c’ en el contexto del problema.
Al2: “Puse *p* por algo, en tantos lados, como que hay tantas posibilidades” “*b* es *p*, *p* es *x*”…bueno eso es una aclaración para esto”
Al3: “…uno cuando lo hace graficando no es analíticamente porque uno está tomando un rango arbitrario de números, no está determinando que para todos sea así”
- En la fase de Verificación. Pasa su solución esta pregunta: ¿Usa todos los datos pertinentes?
Los tres alumnos manifestaron chequear la respuesta de esta pregunta al resolver un problema matemático. Al3 es claro en el siguiente fragmento: “Y… vuelvo, me fijo la pregunta, lo releo y me fijo si mi resultado cumple con todas las exigencias que me está dando…”
Luego en el caso de todos los estudiantes considerados para aplicar las entrevistas, tanto en la de “Pensar en voz alta” como en la “Retrospectiva”, se manifestaron con mucha fuerza los recursos para comunicar, como de aportar a la reflexión metacognitiva. En este sentido, sostenemos que en el caso de la metacognición aportaron experiencias previas de reflexión que no advertían como tal, pero que la implementación de las entrevistas personalizadas puso ampliamente de manifiesto.
El recorrido analizado especialmente, la conformación de la primera muestra intencional de estudiantes sobre el total de la población de alumnos pre-universitarios, el enlace del cuestionario con las respectivas entrevistas, la segunda muestra intencional y las lecturas en perspectiva de heurísticas según Schoenfeld nos ha permitido realizar un proceso de argumentación que sostiene el concepto de *un perfil de usuario de estrategias heurísticas*.

- Realiza primeras aproximaciones a la resolución de una determinada actividad utilizando distintos registros semióticos (en general registro gráfico, algebraico y numérico) muchas veces no conectados en forma clara en su hoja borrador. Pero que ante las preguntas de ordenamiento en su resolución en limpio es capaz de vincularlos coherentemente.
- Logra explicitar lo que hace, para probar y descartar posibles estrategias en su resolución.
- Utiliza estrategias pertenecientes a las tres fases descritas en el modelo de resolución de Schoenfeld.
- Utiliza en la fase de análisis: Dibuja un diagrama siempre que sea posible - Trate de simplificar el problema explotando la existencia de simetría
- Utiliza en la fase de exploración: Considere problemas esencialmente equivalentes, mediante un cambio de perspectiva o notación
- En la fase de Verificación, pone en ejecución la pregunta: ¿Usa todos los datos pertinentes?

4. Consideraciones finales

Consideramos que la descripción del perfil, en cuanto a usuarios de estrategias heurísticas, que hemos obtenido a partir de información sobre tres estudiantes de nivel preuniversitario, nos permite establecer preliminares vinculaciones con el diseño de un dispositivo didáctico para la enseñanza de heurísticas.
Consideramos así que las características del perfil encontrado es un buen punto de partida como objetivo a alcanzar en un dispositivo didáctico pensado con el fin de enseñar estrategias heurísticas para todo un curso de estudiantes.
El perfil de usuario descripto al igual que lo plasmado en el párrafo anterior nos permite también direccionar nuestros esfuerzos para abordar una serie de interrogantes que planteó Schoenfeld en 1980 en el contexto de su modelo de enseñanza: ¿cuánta sofisticación y 'background' necesitarían tener los estudiantes antes de que esta enseñanza sea efectiva?, ¿qué se necesita para entender una estrategia como "establecer sub-metas" y cómo usarla? ¿Qué es lo que se necesita además del dominio de las estrategias individuales? Consideramos que falta ampliar aún más la información sobre el perfil de usuario, pero valoramos la contribución realizada en este proceso.

5. Bibliografía

- Casetta, I., González, V., Rodríguez, M. (2009). Selección de técnicas para el diseño de entrevistas a través de las cuales profundizar en el conocimiento sobre heurísticas de estudiantes pre-universitario, *XXXII Reunión de Educación Matemática*. Universidad Nacional de Mar del Plata.
- Chacón, M., Farías, S., González, V., Poco, A. (2009). Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas, *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática*. Universidad Nacional de Luján, Regional Chivilcoy. Formato CD.
- Colombano, V., Isla Zuvialde, D., Marino, T., Rea, M. (2009). El problema de diseñar problemas. *XXXII Reunión de Educación Matemática*. Universidad Nacional de Mar del Plata.
- González, F. (1996). Acerca de la metacognición. Paradigma, 17, 109-135.
- González, F. (2009). Métodos, técnicas y procedimientos para el estudio de procesos de pensamiento (Manuscrito no publicado). UPEL, Maracay, Venezuela.
- Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México. [Versión en español de la obra *How to solve it* publicada por Princeton University Press en 1945]
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning*. New York, MacMillan.
- Schoenfeld A. (1980). Teaching Problem Solving skills, Amer. Math. Monthly, 87, 794-805.
- Sigmund Tobias y Howard T. Everson (2009). The Importance of Knowing What You Know. En *Handbook of metacognition in education*. Editado por Douglas J. Hacker, John Dunlosky, Arthur C. Graesser. New York and London, Routledge. 107-127.

Apéndice

La notación que utilizamos para referir a los estudiantes es Al1, Al2 y Al3.
Algunas cuestiones marco sobre el tipo de entrevistas para cada uno de los estudiantes:

- Al1: Luego de realizarse una entrevista "Pensar en voz alta". El estudiante desarrolla la resolución de un problema.

- Al2: Luego de realizarle una entrevista retrospectiva. El estudiante contestará sobre la resolución de 2 problemas.
- Al3: Luego de realizarle una entrevista retrospectiva. El estudiante contestará sobre la resolución de 3 problemas.

Lista de estrategias heurísticas esperadas	Al1	Al2	Al3
ANALISIS			
Dibuje un diagrama siempre que sea posible	*"Estoy haciendo un gráfico para más o menos mostrar lo que estoy pensando".*	*"Primero una visualización gráfica", "primero los gráficos, siempre"*	*"Hice el esquema más que nada para nombrar ángulos. No sabía si lo iba a usar pero bueno, ya que lo tenía empecé a nombrar ángulos, le medí los grados y es más que nada para escribir, y puse todos"*
Examine casos especiales			
-seleccione algunos valores especiales para ejemplificar el problema e irse familiarizando con él.		*"Si valía 1, la altura era 9, si la altura valía 2…ah esto era lo que hice. Y así infinitas".*	
-examine casos límite para explorar el rango de posibilidades.		*"todos los valores entre 1 y 20 podrían ser"…"son los que más claramente se ven, por poner unos ejemplos. Tomar números enteros, bah, para ver si también me daba".*	
-si hay un parámetro entero, dele sucesivamente los valores 1, 2, …,m y vea si emerge algún patrón inductivo	*"lo hago acá siguiendo esta lógica, acá hay por lado 2, acá hay por lado 4…"*	Se observa en su borrador la prueba con números enteros: 1, 2, 3….., elabora tablas con los valores. Busca generalizar (en el borrador) no lo pasa en limpio porque no encuentra el patrón inductivo. Tiene	

		varias búsquedas.	
Trate de simplificar el problema			
-Explotando la existencia de simetría.	*" Yo lo que hice es mirar, eh, este lado que ustedes ven acá…el lado opuesto, sé que los dos tienen 5 porotos y que no comparten ninguno, y sé que entremedio de ellos hay 3 porotos…"*	Le resulta claro que lo que pasa en un lado del polígono va a pasar en el otro.	*para poner algo de lo que pensé… multipliqué 5 x 4 que son los lados y le resté digamos… eh... los que estaban demás porque se repiten en los otros lados*
-Usando argumentos del tipo \sin pérdida de generalidad".			
EXPLORACIÓN			
Considere problemas esencialmente equivalentes.			
-Reemplazando condiciones por otras equivalentes.		En lugar de trabajar con el perímetro de una figura decide trabajar con el semiperímetro	
-Recombinando los elementos del problema de maneras diferentes.		Intenta diversas recombinaciones en el borrador para poder contar. Especialmente intenta poner condiciones y clasificarlas.	En el momento que se le pregunta sobre una cantidad n de arboles, y hace referencia a las esquinas de la configuración y a su procedimiento para realizar los cálculos.
-Introduciendo elementos auxiliares.			Cuando clasifica en una cantidad par y una cantidad impar
Reformulando el problema:			
-Mediante un cambio de perspectiva o notación.	Establece una conexión entre una fórmula que encuentra f(x)= 4.x+ 2, que se	Puse *p* por algo, en tantos lados, como que hay tantas posibilidades" "*b* es *p*, *p* es *x*"…bueno	"…uno cuando lo hace graficando no es analíticamente porque uno está tomando un rango

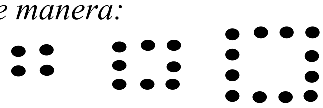
	adecua a la modelización del problema, con la siguiente f(x)= c.x + 2 realizando aclaraciones sobre el parámetro ‘c’ en el contexto del problema	eso es una aclaración para esto”	arbitrario de números, no está determinando que para todos sea así”
-Trate de aprovechar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones similares.	“ah, esto me suena conocido del CAU y además de las olimpiadas matemáticas”		“no encontré ninguna herramienta para hacerlo, o sea, más que nada ninguna que se me ocurriera de haber utilizado para algún problema parecido”
VERFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN			
Pasa su solución estas pruebas especificas?			
-Usa todos los datos pertinentes?	Lo manifiesta.	Lo manifiesta	“Y… vuelvo, me fijo la pregunta, lo relevo y me fijo si mi resultado cumple con todas las exigencias que me está dando…”
-Está de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables?		“…sí, que las cuentas den y que estén dentro de los parámetros que dicen acá..” “que acá no haya un x al cuadrado por ejemplo, no sería coherente”	
-Soporta pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?			
Pasa estas pruebas generales?			
-Puede ser obtenida de manera			“me pongo a pensar si hay otra manera,

diferente?			una manera más eficiente, y si no hay digo listo y sigo con otro problema”
-Puede ser sustanciada por casos especiales?			
-Puede ser reducida a resultados conocidos?			
-Puede utilizarse para generar algún resultado conocido?			

A continuación dejamos escrito los problemas que han resuelto cada uno de los estudiantes mencionados en la tabla anterior. La intención es proporcionarle al lector un mejor entendimiento de lo reportado aquí.

Problema para Al1 en su entrevista

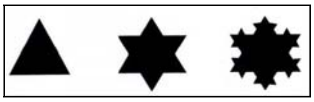
Consigna oral: La situación es así, aquí voy a armar una secuencia de figuras, con porotos, de la siguiente manera:



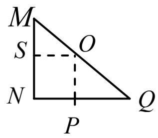
Voy a llevar un registro en este papel de la cantidad de fichas que son usadas por cada figura, contando las fichas una por una. Así es que registro que en la primera figura hay 4 fichas, en la segunda 8, y en la tercera 12. ¿Podrías armar la siguiente figura con los porotos que hay en la mesa (hay 40 porotos en la mesa)? Con las restantes ¿podés armar la siguiente figura de la secuencia?
Consignas escritas:
A) ¿Cuántos porotos necesitás para armar la figura que ocupa el octavo lugar? No vale desarmar nada de lo ya hecho.
B) Con 306 porotos ¿podés armar una configuración de la secuencia, sin que te sobre ninguno? ¿Podrías armar una configuración de la secuencia usando la mayor cantidad de porotos posible?
C) Con las restantes ¿es posible armar otra configuración más pequeña?
D) Pensando en general, esto es, supongamos una cantidad arbitraria (una cantidad cualquiera) de porotos, se nos presentan dos posibilidades:
- usamos todos los porotos para armar la configuración
- o nos sobran porotos. Detengamos nuestra atención en este caso ¿con los porotos restantes es posible armar un cuadrado menor? ¿Siempre?

Problema sobre los que contesta Al2 en su entrevista

Problema 1: La primera figura tiene 3 lados y 3 picos, la segunda tiene 12 lados y 6 picos, la tercera tiene 48 lados y 18 picos, y así sucesivamente. ¿Cuántos picos tendrá la quinta figura?

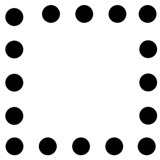


Problema 2: Dibujar un triángulo rectángulo isósceles *MNQ* en el que el cateto *NQ* mida 10 cm. Determinar, si es posible, un punto *P* sobre dicho cateto tal que el rectángulo *NPOS*, que se muestra en la figura, tenga perímetro 20 cm. ¿Es posible encontrar otros puntos que cumplan las condiciones de *P*? Si es así indicar todos los posibles



Problemas sobre los que contesta Al3 en su entrevista

Consigna: Un campo situado sobre un terreno cuadrado está bordeado con árboles plantados en forma regular (la distancia entre árboles consecutivos es siempre la misma) como lo indica la figura.



a) ¿Cuántos árboles bordean el campo si hay en cada lado 5 árboles como en la figura? ¿Cuántos árboles se necesitan para bordear el campo si sobre cada lado hay 8 árboles? ¿Y si hay 24 árboles sobre cada lado?
b) Si en total hay 120 árboles que bordean al campo ¿Cuántos árboles hay en cada lado?
c) Con una totalidad de 1258 árboles ¿Es posible usar todos para bordear un campo colocándolos en una configuración similar a la de la figura? Si es así, mencioná cuántos árboles hay que poner en cada lado. Si no es posible indicá cuál es la mayor cantidad de árboles por lado y cuántos sobran.