

## ENSEÑANZA DEL CÁLCULO VECTORIAL EN EL CONTEXTO DE LA INGENIERÍA: UNA REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Viviana A. Costa<sup>1</sup>, Marcelo Arlego<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, La Plata, Argentina.

<sup>2</sup>Departamento de Física, UNLP, C.C. 67, 1900, La Plata, Argentina. <sup>3</sup>NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN, Tandil, Argentina.

[vacosta@ing.unlp.edu.ar](mailto:vacosta@ing.unlp.edu.ar)

### Resumen

En este trabajo se expone una revisión bibliográfica que se enmarca en la etapa inicial de una tesis de doctorado en la que se abordará la problemática de la *enseñanza del cálculo vectorial en carreras de ingeniería*. El objetivo de este trabajo es relevar las distintas estrategias de enseñanza que tienen como propósito ayudar al alumno en la vinculación y comprensión de los conceptos involucrados, identificar posibles encuadres teóricos y metodológicos y delimitar la relevancia del problema de investigación. Para ello se analizan libros, artículos en revistas científicas, de divulgación, actas de congresos, simposios y jornadas, que abordan la problemática mencionada.

**Palabras clave:** enseñanza de la matemática, cálculo vectorial, ingeniería, estrategias didácticas.

### 1. Introducción

La *enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería*, tiene sus características y problemáticas particulares. Por un lado, está la problemática de la *enseñanza de la matemática*, con numerosas investigaciones que la abordan, desde diferentes dimensiones: la psicológica, la didáctica y la epistemológica y desde distintos marcos teóricos de referencia. Por otro lado, y más recientemente, está la problemática de la *educación en carreras de ingeniería*. Esta última, está asociada al avance de la tecnología, de la industria y de los requerimientos de la humanidad. El avance en esta línea de investigación se observa en el aumento de congresos, simposios y jornadas, tanto a nivel nacional como internacional dedicados a propiciar un escenario de reflexión sobre la innovación en la formación del ingeniero. Cabe citar: EMCI, CAEDI, en Argentina; SOCHEDI, en Chile; ICECE en Latinoamérica y a nivel mundial, organizado por IEEE, EDUCON<sup>34</sup>.

Numerosos trabajos de investigación abordan estas problemáticas mencionadas proponiendo diversas *estrategias didácticas*, con diversos objetivos, algunos de ellos, el de propiciar aprendizajes significativos (Ausubel et al, 1990). Se entiende por *estrategias didácticas*<sup>35</sup>, a las estrategias de enseñanza que concretan una serie de actividades de aprendizaje dirigidas a los estudiantes y adaptadas a sus características, a los recursos disponibles y a los contenidos objeto de estudio, con el objetivo de favorecer la comprensión de los conceptos, su clasificación y relación, la reflexión, el ejercicio de formas de razonamiento y la transferencia de conocimientos.

Varias investigaciones dan cuenta de la problemática de la *enseñanza y aprendizaje del cálculo* en la universidad. Señalan que estas dificultades son de diferente naturaleza.

<sup>34</sup> <http://www.educon-conference.org/>

<sup>35</sup> <http://peremarques.pangea.org/actodid.htm>

Entre ellas, indican que en general se enseña el cálculo en forma mecánica, algorítmica, con el peligro que el alumno, solo aprende para lo que será evaluado, sin comprender los significados. En carreras de ingeniería, en general no se vinculan los conceptos del cálculo con los del contexto en el cual se enseña y no se atienden las necesidades particulares de los alumnos de estas carreras. Expresan la importancia de las investigaciones didácticas en el ámbito del conocimiento del profesor, como motor del proceso de enseñanza y aprendizaje (Zúñiga, 2007), (Moreno, 2005), (Kümmerer, 2003), (Guzmán, 2007), (McCartan et al, 2009).

## 2. La enseñanza del cálculo vectorial en carreras de ingeniería

*Ingeniería*<sup>36</sup> es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquiridas mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se emplea con buen juicio a fin de desarrollar modos en que se puedan utilizar, de manera óptima los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad, en el contexto de restricciones éticas, físicas, económicas, ambientales, humanas, políticas, legales y culturales. Sus inicios, como campo de conocimiento, están ligados al comienzo de la revolución industrial. En la actualidad la ingeniería se enfrenta con desafíos relacionados a temas claves, como son: la sostenibilidad, la salud, la reducción de la vulnerabilidad y la calidad de vida, entre otros (National Academy of Engineering, NAE<sup>37</sup>).

En el Congreso Mundial de Ingeniería 2010<sup>38</sup>, se redactó un informe final. En el mismo, se destacó el requerimiento de ingenieros provistos de sólidos conocimientos y competencias técnicas y tecnológicas, de una sólida cultura general, conocimiento de las características y necesidades de su región, y dotados de una cosmovisión sistémica, que acompañe los acontecimientos históricos, de profundos cambios de paradigmas en todos los aspectos del quehacer social, político, económico, científico, tecnológico y ambiental.

A partir de estos desafíos, se requieren ingenieros con diversas competencias, entre ellas, disponer del conocimiento, manejo y dominio de las matemáticas, la física y otras ciencias, que serán sus herramientas fundamentales.

Por ello, la *enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería*, debe buscar diversas estrategias de enseñanza y aprendizaje que acompañen los nuevos paradigmas.

En las carreras de ingeniería, una de las asignaturas básicas del área matemática, es el *cálculo vectorial*. El cálculo vectorial es un campo de la matemática referido al análisis real multivariable de vectores en dos o más dimensiones. El dominio conceptual y práctico de las herramientas que involucra es esencial para alumnos de carreras de ingeniería, el cual será importante para su correcta aplicación en la resolución de problemas de su especialidad, establecer leyes y para abordar los contenidos de las asignaturas como son: Electromagnetismo, Mecánica de los Fluidos, Aerodinámica, Mecánica de Sólidos, Transferencia de Calor, Mecánica del Medio Continuo, entre otras.

El cálculo vectorial, tiene sus orígenes durante finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX. En estos siglos se dan importantes acontecimientos relacionados con las

---

<sup>36</sup> CONFEDI. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina.

[http://www.unalmed.edu.co/fisica/paginas/pregrado/autoevaluacion/documentos/ingenieria\\_argentina/definicion\\_ingenieria.doc](http://www.unalmed.edu.co/fisica/paginas/pregrado/autoevaluacion/documentos/ingenieria_argentina/definicion_ingenieria.doc)

<sup>37</sup> <http://www.nae.edu/nae/naehome.nsf>

<sup>38</sup> <http://ingenieria2010.com.ar/es.html>

ciencias físicas y matemáticas, junto a las llamadas Primera y Segunda Revolución Industrial y las revoluciones sociales e intelectuales asociadas a ellas. Su desarrollo está relacionado con: los *cuaterniones* (de Hamilton), con la *teoría del potencial*, con la *ecuación de Laplace* y con el análisis matemático de los fenómenos físicos (Crowe, 1994). En particular con la *termodinámica*, la *hidrodinámica*, la *mecánica de los fluidos* desarrollada por Navier y Stokes y las investigaciones sobre la *luz*, la *electricidad* y el *magnetismo*, con Maxwell (Wussing, 1998), (Mankiewicz, 2005).

Gibbs, primer doctor en ingeniería en USA (1839-1903), es quien da la notación actual del cálculo vectorial, al elaborar una versión exclusivamente vectorial, independientemente de los cuaterniones. Es allí cuando se establece el cálculo vectorial como disciplina autónoma.

El aprendizaje del cálculo vectorial, presenta para los alumnos una gran variedad de conceptos. Entre ellos el concepto de *campo vectorial* y los *operadores nabla*, *divergencia*, *rotor* y *laplaciano*. El estudio de los teoremas de *Green*, *Gauss* y *Stokes*, que relacionan integrales de línea e integrales de superficie, con integrales dobles y triples. Además el cálculo de *flujo*, *potencial*, *trabajo* y *circulación* y sus *aplicaciones físicas* al magnetismo, a la mecánica de los fluidos, a la hidrodinámica, a la conducción del calor, a la resolución de ecuaciones diferenciales mediante la *teoría del potencial*<sup>39</sup> y al electromagnetismo (Marsden et al, 2004), (Simmons, 1993).

Estos nuevos conceptos, son de difícil comprensión para los alumnos, dado el grado de abstracción de los mismos, las nuevas técnicas de cálculo y el conjunto de conceptos previos con los que deben disponer (álgebra vectorial, cálculo integral y diferencial de funciones reales de una variable, espacio euclídeo y geometría analítica).

### 3. Revisión bibliográfica

En lo que sigue exponemos un resumen de una revisión bibliográfica realizada. Se consultaron libros, artículos en revistas científicas, de divulgación, en actas de congresos, simposios y jornadas, de la última década, que abordan la problemática de la *enseñanza del cálculo vectorial en carreras de ingeniería*. El objetivo de la revisión es el de relevar las distintas estrategias de enseñanza que tienen como propósito ayudar al alumno en la vinculación y comprensión de los conceptos involucrados. Además, identificar posibles encuadres teóricos y metodológicos, y delimitar la relevancia del problema de investigación. Se reflexiona sobre las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles metodologías de enseñanza y aprendizaje serían beneficiosas para la enseñanza del cálculo vectorial en carreras de ingeniería, teniendo en cuenta el escenario e intereses de los alumnos?
- ¿Qué significa poner la matemática en contexto de las ciencias?
- ¿Es necesario un abordaje interdisciplinario con la física en la enseñanza del cálculo vectorial en carreras de ingeniería?
- ¿Es útil el uso de TIC<sup>40</sup> como recurso mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial?

Los artículos analizados se agruparon en las siguientes categorías:

#### a) Trabajo interdisciplinario y contextualización de la matemática con la ciencia e ingeniería

<sup>39</sup> La *teoría del potencial* es una rama de las matemáticas, que estudia la ecuación de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ , sus soluciones y aplicaciones (por ejemplo en la teoría de la gravitación).

<sup>40</sup> Tecnologías de la información y de la comunicación

En los artículos (Ramos et al, 2006), (Fonseca, 2008), (Costa et al, 2008) (McCartan et al, 2009), (Font, 2008), (Dunn et al, 2000), (Camarera, 2009), (Willcox et al, 2004), se relatan diversas estrategias interdisciplinarias que dan cuenta de la importancia en el proceso de enseñanza de la matemática, de la vinculación de los conceptos abstractos de esta ciencia con los del contexto en los cuales se enseña. Instan a reflexionar acerca de la *vinculación* que debe existir entre la *matemática* y las *ciencias*. En particular a la hora de enseñar en carreras de ingeniería, donde la matemática no es una meta por sí misma, dan cuenta de la importancia que tendría el de vincular los conceptos de *cálculo vectorial* con los conceptos del *electromagnetismo*. Dar un enfoque unificado de los conceptos matemáticos permitiría a los alumnos obtener una mayor comprensión de los *vínculos* entre la *ingeniería*, la *física* y el *cálculo*.

#### **b) El uso de TIC como mediador en los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados al cálculo vectorial**

La visualización juega un rol central en el aprendizaje de las ciencias (Zimmerman et al, 1991), (Duval, 1999), (Hitt, 1998). Varios artículos, (Perjési, 2003), (Costa et al, 2008), (Costa et al, 2010), (Álvarez, 2010), relatan experiencias áulicas donde utilizan TIC como recurso mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos vinculados al cálculo vectorial. Destacan que la principal función es la de ofrecer un entorno para la exploración, la experimentación, la creatividad y favorecer la comprensión y apropiación de los conceptos a partir de la visualización. En general, esto sería útil para los alumnos, dado que el proceso por el cual las personas construyen representaciones mentales es beneficiado si se les presentan imágenes que puedan interpretar y manipular.

#### **c) El rol de la historia en la enseñanza del cálculo**

Varios investigadores, (Guzmán, 2007), (Matthews, 1994), (Camarera, 1987, 2009), (Chevallard, 1991), (Muro et al, 2002), proponen como posible estrategia para mejorar el aprendizaje de la matemática y la adquisición de significados, la de incluir tópicos correspondientes a la historia de la ciencia. Expresan que conocer la historia de cómo surgen los conceptos invita a que ese significado se integre a experiencias donde la actividad matemática es parte fundamental del aprendizaje. Salinas (Salinas et al, 2009), enuncia que recurrir a la historia de la génesis del conocimiento ha permitido identificar en el contenido matemático del currículo una variable que influye en la apropiación de las nociones y procedimientos del Cálculo, para apartarse de los tecnicismos. Formula una propuesta global para el aprendizaje, en el marco del acercamiento *socioepistemológico*. Hace notar que el estudio de la historia de la matemática influye en el diseño de experiencias didácticas que retoman caminos ocurridos en la generación del conocimiento y plantean nuevas expectativas.

#### **d) Dificultades que manifiestan los alumnos en la comprensión de fenómenos físicos asociados al concepto de campo vectorial**

Llancaqueo (et al, 2003) realiza una reseña bibliográfica en la que enumera varias de las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión del *concepto campo* en el aprendizaje del *Electromagnetismo*, haciendo referencia a la importancia que tiene el mismo en la comprensión de fenómenos físicos. Infiere que el origen de las dificultades de aprendizaje podría estar en las concepciones alternativas y en un paralelismo entre problemas de aprendizaje y problemas epistemológicos. Identifica que sólo unos pocos estudiantes construyen y activan representaciones mentales del campo electromagnético que les permiten explicar y predecir situaciones físicas desde esa perspectiva. Además que el tipo de enseñanza sobre el *concepto de campo*, altamente *formal* y *matemático*,

lleva a los estudiantes a usar representaciones proposicionales aisladas, no articuladas en modelos y esquemas como fórmulas y definiciones. Propone explorar como referente, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990).

#### 4. Conclusión

Los artículos de investigación revisados, proponen diversas estrategias didácticas desde distintos marcos teóricos, en la enseñanza del cálculo, para mejorar su aprendizaje y comprensión. Algunos investigadores proponen apartarse de la enseñanza clásica, mecanicista y técnica de ésta disciplina. Expresan que con esa forma de enseñar, el alumno no encuentra significados, ni vínculos con otras ciencias, a los conceptos matemáticos abstractos. Recomiendan acercarse a una *enseñanza contextualizada*, ligando los conceptos del cálculo con su *génesis* o *contextualizándolos* con problemas de la *ingeniería* o de la *física*. Otros, encuentran en el uso de *TIC*, un recurso a utilizar en los procesos de enseñanza y aprendizaje que ayude a los alumnos en la comprensión de los conceptos, sus interpretaciones y su vinculación con otras áreas del conocimiento, con el objeto de obtener un aprendizaje significativo. Exponen resultados, cuantitativos o cualitativos, que muestran que las estrategias implementadas propiciaron la comprensión de los contenidos del cálculo.

Considero importante que los actores encargados de la enseñanza e investigación educativa de los tópicos vinculados al cálculo vectorial, reflexionen sobre la implementación de estrategias didácticas, acordes y atentas a las necesidades actuales del alumno de ingeniería y de lo que de éste se espera.

#### 5. Referencias

- Álvarez, T. (2010). *La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo*. Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 4, Nro. 1, 143-148. <http://www.journal.lapen.org.mx>
- Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanaseian, H. (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.
- Camarena, G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.
- Camarera, G. P. (2009). *La matemática en el contexto de las ciencias*. Innovación educativa. Vol 9, Nro 48, 15-25. Instituto Politécnico Nacional de México. (Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=179414894003#> , consulta Marzo 2011)
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. El saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor S. A.
- Costa, V. A., Di Domenicantonio, R. M., Prodanoff, F., Tolosa, E. & Guarepi, V. (2008). *Acciones interdisciplinarias entre matemática y física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial*. Libro digital del VI Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Facultad de Ingeniería e Informática, de la Universidad Católica de Salta y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. Editorial de la Universidad Nacional de Salta.
- Costa, V. A., Di Domenicantonio, R. M. & Vacchino, M. C. (2010). *Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Nro. 21, 173-185. Coordinado por Agustín Carrillo de Albornoz. [http://www.fisem.org/descargas/21/Union\\_021\\_018.pdf](http://www.fisem.org/descargas/21/Union_021_018.pdf)

- Crowe, M. (1994). *A history of vector analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Courier Dover Publications, 270 páginas.
- Dunn, J. W. & Barbanel, J. (2000). *One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics*. American Journal of Physics. American Association of Physics Teachers. Vol. 68, Issue 8, 749.
- Duval, R. (1999). *Representation, Visual and Visualization: Cognitive Function in Mathematical Thinking*. Proceedings, of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group of PME. Cuernavaca, México.
- Font, V. (2008). *Enseñanza de la matemática. Tendencias y perspectivas*. III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las matemáticas. Actas 2008. Pontificia Universidad Católica del Perú, Departamento de Ciencias, Maestría en la enseñanza de las matemáticas. Editora: Cecilia Gaita, 21-62.
- Guzmán, M. de (2007). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Revista Iberoamericana de educación. Nro. 43, 19-58.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, nuevas representaciones, nuevas tecnologías y currículum. Revista de Educación Matemática, Vol. 10, 23-45.
- Kümmerer, B. (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level*. En D. Holton, Editorial Springer, Vol. 7, 321- 334, 560 páginas.
- Llancaqueo, A., Caballero, M. C. & Moreira, M. A. (2003). *El concepto de campo en el aprendizaje de la Física y en la investigación en educación en ciencia*. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, Vol. 2, Nro. 3, 227-253.
- McCartan, C. D., Hermon, J. P. & Cunningham, G. (2009). *A Validated Approach to Teaching Engineering Mathematics*. EE2010, The Higher Education Academy Engineering Subject Centre, EE2010 conference proceedings. (Consultado marzo 2010: [http://www.engsc.ac.uk/downloads/scholarart/ee2010/105\\_GP\\_McCartan.pdf](http://www.engsc.ac.uk/downloads/scholarart/ee2010/105_GP_McCartan.pdf) )
- Mankiewicz, R. (2005). *Historia de las Matemáticas, del cálculo al caos*. Editorial Paidós, colección orígenes, en rústica, pp. 141-147.
- Marsden, J. E. & Tromba, A. J. (2004). *Cálculo vectorial*. Edición 5, Addison Wesley.
- Matthews, M. R. (1994). *Historia, Filosofía y Enseñanza de las Ciencias: La aproximación actual*. Enseñanza de las Ciencias, 12 (2), 255-277.
- Moreno, M. M. (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros*. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Córdoba, España, Universidad de Córdoba, 81-96.
- Muro, U. C. & Camarena, G. P. (2002). *La serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa*. Revista Científica The Mexican Journal of Electromechanical Engineering. Vol 6, No. 4.
- Perjési, I. H. (2003). *Application of CAS for teaching of integral-transforming theorems*. ZMD. Vol. 35, Nro. 2, 43- 47.
- Ramos, A. B. & Font, V. (2006). *Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica*. La Matematica e la sua didattica, Anno 20, Nro. 4, 535-556.
- Salinas, P. & Alanís, J. A. (2009). *Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 12. Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511859004> .
- Simmons, G. F. (1993). *Ecuaciones diferenciales, Con aplicaciones y notas históricas*. Mc Graw-Hill, segunda Edición, Impreso en España.

Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques.

Willcox, K. & Bounova, G. (2004). *Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum*. Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition, Copyright 2004. American Society for Engineering Education.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España Editores, 226-229, 345 páginas.

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). *Editors introduction: What is Mathematical Visualization?* In Zimmerman, W. and Cunningham, S. (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA. Notes Number 19. Washington DC: Mathematical Association of America.

Zuñiga, S. L. (2007). *El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en línea], Marzo. Vol 10. Nro. 1, 145-155. (Consultado: 20 de marzo de 2011) Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33500107> .