CARACTERIZAÇÃO DO RACIOCÍNIO INDUTIVO COMO APORTE PARA O CONHECIMENTO MATEMÁTICO

José Roberto da Silva, *Emanuel Henrique Pereira*, *Natália Dias de Morais*, *Jakeline Carneiro de Oliveira*
Universidade de Pernambuco (UPE)
jrobertosilva@bol.com.br

Resumo
A busca por caminhos que auxiliem o melhor desempenho das atividades de professores e alunos tem sido alvo de muitos estudos. Neste trabalho, investiu-se no uso de laboratório de matemática na intenção de lidar com a indução como forma de produção de conhecimento. Metodologicamente, utilizou-se o jogo Torre de Hanói como material didático para caracterizar a elaboração de conjecturas e formulação de demonstrações para enunciados matemáticos simples. O resultado obtido foi a organização da proposta didática de nome Torre de Hanói como Recurso para apresentação do Principio Indutivo, composta de três atividades com o intuito de caracterizar a potencialidade do raciocínio indutivo.

Palavras chave: Indução Finita, Torre de Hanói, Laboratório de Matemática.

1. Introdução

A diversidade frutífera de estudos, envolvendo a ação pedagógica do professor apesar da multiplicidade de possibilidades para apresentar um dado conteúdo, cabe salientar que muitos ainda estão restritos à forma mais elementar. Para ser mais claro, na esfera dos recursos pedagógicos, boa parte dos professores continua refém dos livros didáticos e contemplam recursivamente suas ações de ensino com a lousa e o pincel. E, lamentavelmente, no ensino de matemática, associando ao que foi dito as "imensas" listas de exercícios creditam o êxito das aprendizagens matemáticas de seus alunos.

O jogo torre de Hanói foi adotado neste estudo por sua versatilidade e características a ele inerentes capazes de viabilizar ações pedagógicas que justifiquem a potencialidade do laboratório de matemática como ambiente propício ao desenvolvimento de atividades investigativas epistemológicas. O propósito investigativo consiste em explorar a ação pedagógica dos professores e alunos, respectivamente em suas tarefas didáticas e de aprendizagens, ou seja, trabalhar a formulação de proposições, leis, teoremas, teorias e suas aplicações. O objeto matemático de interesse está voltado para esclarecer a indução enquanto principio e sua contribuição no processo de validação no âmbito do conhecimento matemático, pois como enfoca Singh (2005, p. 219):

> A prova por indução é uma forma poderosa de demonstração porque permite ao matemático provar que uma declaração é válida para certo número infinito de casos demonstrando apenas um único caso.

Há uma diversidade de procedimentos metodológicos para lidar com a indução, mas aqui se fez opção por enfoques presentes nos estudos de Medeiros *et al*. (1994), Druck (2004), Drabeski e Francisco (2010) uma vez que utilizam como material recursivo a torre de Hanói. E quanto à forma de aprendizagem almejada, segundo as informações apresentadas, procura-se levar em consideração aspectos inerentes ao cognitivismo, particularmente, os apontados em seguida como responsáveis pela eficácia de uma aprendizagem.

> A teoria cognitivista de David Ausubel propõe que a eficácia da aprendizagem em sala de aula depende: (i) do conhecimento prévio do aluno; (ii) do material que se pretende ensinar ser potencialmente significativo para o aprendiz e; (iii) do indivíduo manifestar uma intenção de relacionar os novos conceitos com aquilo que ele conhece. Como outros teóricos do cognitivismo, Ausubel acredita que existe uma estrutura na mente humana na qual o conteúdo total de idéias e sua organização em uma área particular do conhecimento estão armazenados de forma hierárquica (MOREIRA apud BORCELLI e DA COSTA, 1999, p. 03).

De modo especifico, o foco é a indução enquanto forma de produção de conhecimento e procura levar em consideração os aspectos inerentes ao último, dentre os nove objetivos, que configuram o novo sentido das matemáticas, segundo Bagazgoitia (1997, p. 7):

> Matemática como raciocínio: o currículo de matemática deveria incluir experiências numerosas e variadas que reforcem e ampliem as destrezas do raciocínio lógico. Os estudantes deveram ser capazes de elaborar e comprovar conjecturas, formular contra exemplos, seguir argumentos lógicos, construir demonstrações para enunciados matemáticos simples, entender demonstrações (tanto diretas como indiretas) e em definitivo raciocinar matematicamente.

Tais aspectos foram explorados no âmbito dos laboratórios de ensino de matemática por entender que este se tem credenciado como local favorável para subsidiar a aquisição de conhecimento, no caso, a indução como já anunciada. O material utilizado para servir de apoio para as atividades no laboratório foi a torre de Hanói e matematicamente se trabalhou *o principio de indução finita* como forma possível, levando em consideração a matemática como raciocínio conforme Bagazgoitia *et al*. (*op. cit*.).

Baldini e Gomes (2009) pontuam que a tarefa matemática do jogo consiste em vislumbrar a partir da relação entre o número de discos e o número mínimo de movimentos para transportar todos os discos do pino para um outro, sem descumprir a regra básica do jogo já apresentada que pode ser subdividida nos três subitens acrescida a estes uma exigência para que o jogo se encerre: 1. Mover um único disco por vez; 2. O disco em movimento deve ser colocado em um dos outros dois pinos; 3. Nunca se deve colocar um disco de diâmetro maior sobre um de diâmetro menor; 4. O vencedor do jogo é aquele que conseguir montar a torre em um dos outros pinos inicialmente vazios com menor número de movimentos.

2. O Principio da Indução Finita

O uso da indução como apoio ao processo de elaboração do conhecimento não se trata de algo recente, pois como lembra Kilmovsky e Boido (2005), Aristóteles pontua que tal processo possui duas etapas, a primeira trata-se de uma sequência de passos que estimulam a atitude de conhecer, viabilizando o surgimento de verdades gerais ou leis sobre o real, levando em conta aspectos matemáticos. Além disso, informam que esta etapa tem caráter empírico, observacional e *indutivo*, tendo como características as recomendações seguintes:

> (1) observações de casos isolados de um fenômeno; (2) reiteração da observação até dispor de uma amostra considerável de casos; (3) generalização da observação da amostra para todo o gênero do conjunto de entidades do estudo (KILMOVSKY e BOIDO, 2005, pp. 58-59).

Na intenção de contemplar inicialmente uma informação global sobre indução na visão de Aristóteles, segundo Kilmovsky e Boido (2005), cabe assinalar ter sido essa figura emblemática o primeiro a empregar o termo indução bem como trazer, respectivamente, algo envolvendo a credibilidade do processo em si e em seguida se apresenta uma alusão a outra etapa do processo de conhecimento aristotélico:

> A indução proporciona algo assim como um tema a investigar, origina o interesse de decidir se a generalização obtida deste modo é valida ou não (op. cit., 2005, p. 59).
> ...segunda etapa a problemática se centra envolta dos procedimentos mediante os quais seria possível verificar as potenciais leis cientificas sugeridas na primeira etapa. No momento suporemos que se tem insinuado certos enunciados científicos e o problema é como proceder para *verificá-los*, quer dizer, garantir sua verdade (*ibdem*).

Bagazgoitia *et al*. (1997) por sua vez, informam que a analogia, a indução e a dedução são formas de raciocínio matemático e alerta que a analogia não chega a ter a mesma credibilidade cientifica da indução e da dedução que têm servido como os tipos fundamentais de raciocínios científicos. Na intenção de trazer mais informações sobre estas formas de raciocínio, se apresentará em seguida o raciocínio indutivo e dedutivo nesta ordem a partir de Bagazgoitia *et al*. (*op*., *cit*. p. 17):

> A indução consiste em recopilar evidências, estabelecer pautas de comportamentos e formular conclusões que tenham o caráter de **conjecturas** enquanto não sejam provadas. Às vezes podem proporcionar as idéias decisivas para a resolução de problemas.
> A dedução consiste em extrair conclusões combinando de forma lógica fatos aceites como certos, os resultados assim obtidos constituem os **teoremas**.

Não se pode deixar de registrar que o método axiomático vai além da concepção clássica já pontuada inicialmente. O que pode ser observado a partir de Lorenzo (1998, p. 149):

> O sistema de axiomas, de ser instrumento de análise e garantir segurança a algo já existente, se converte em elaborador de estruturas e teorias. Mas, como não há referente prévio para as mesmas e a definição não implica a existência do definido, então toda a chave tem de centrar-se em demonstrar que o sistema de axiomas não é contraditório, que a teoria correspondente tem um sentido intrínseco. A consistência se converte, assim, na chave da existência.(...)

Lima *et. all* (1998) apresenta o *axioma da indução* como o ultimo dos axiomas de Peano, destacando-o como um método eficiente empregado para demonstrar proposições sobre os números naturais conhecido como *demonstração por indução* ou *recorrência* e o enuncia em forma de propriedade ao invés de conjuntos (PEANO *apud* LIMA, *op. cit*., pp. 32-33):

> Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que i) $P(1)$ é valida; ii) Para todo $n \in IN$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n. Então $P(n)$ é valida qualquer que seja o número natural n. Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é valida, veremos que $1 \in X$ em virtude de i) e que $n \in X \Rightarrow n' \in X$, em virtude de ii). Logo, pelo axioma da indução, concluímos que $X = IN$.

3. Metodologia

O presente estudo pode ser classificado, segundo sua intencionalidade e temporalidade, em uma Investigação Diagnóstica, Descritiva ou Exploratória por buscar descrever um fenômeno atual de cuja descrição pode-se conseguir uma melhor compreensão da realidade estudada com o fim, quem sabe, de ser utilizada para solucionar o problema em questão. Indo pela visão qualitativa, pode ser classificado como um estudo de caso educativo. André (1988 *apud* STAKE) chama a atenção para o fato de que os estudos de caso são extremamente úteis para conhecer os problemas e ajudar a entender a dinâmica da prática educativa. Um estudo de caso que retrate um problema educacional em toda sua complexidade individual e social é uma descoberta preciosa.

Este estudo, portanto, situa-se no âmbito das chamadas pesquisas qualitativas, em particular do tipo Estudo de Caso Educativo Descritivo por ter, como interesse, desenhar uma melhor compreensão da ação educativa. Em síntese, o propósito está voltado para auxiliar a elaboração do conhecimento matemático a partir da exploração adequada de um dado fenômeno no âmbito dos laboratórios para propiciar alunos e professores a terem maiores êxitos em suas tarefas pedagógicas. O desenvolvimento deste estudo teve a participação de **cinco professores** e **seis alunos**[49] do quinto período do curso de graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade de Pernambuco (UPE), Campus Nazaré da Mata.

Procedimentos Metodológicos: Seqüência Didática

A sequência didática: **Torre de Hanói como Recurso para apresentação do Principio Indutivo**, em síntese, foi organizada na intenção de proporcionar, ao aprendiz, uma postura investigativa, procurando conforme lembra Kilmovsky e Boido (2005) a possibilidade da indução despertar o interesse em obter uma formulação e ter autonomia em decidir se a generalização obtida é ou não válida. Dessa forma, foram organizadas três atividades pedagógicas, tendo cada uma delas os seguintes propósitos:

[49] **Professores**: Esdras Jafet Aristides da Silva, José Roberto da Silva, Laércio Henrique da Silva, Maria Aparecida da Silva Rufino, Marcos José da Silva. **Alunos**: Emanuel Henrique Pereira, Erica dos Santos Diniz, Hosana Silva de Santana, Jakeline Carneiro de Oliveira, Natália Dias de Morais, Suellen do Monte Santos.

Atividade 1 (*Apresentação do Princípio da Indução*): Tem como base estrutural os intentos delineados na fundamentação teórica deste estudo, portanto, procura caracterizar o tal princípio, aludindo o surgimento da idealização, passando por definições clássicas e críticas sobre essa forma de raciocínio como base para elaboração do conhecimento científico;
Atividade 2 (*Torre de Hanói como Recurso Didático*): Uso da Torre de Hanói como recurso didático para caracterizar a contribuição do emprego do Raciocínio Indutivo na formulação de conhecimento científico, investindo na experimentação.
Atividade 3 (*Validação e Aplicações da Formulação* $2^n - 1$ *com o Princípio Indutivo*): São explorados aspectos inerentes a credibilidade da formulação $2^n - 1$ oriunda das atividades 1 e 2, bem como caracterizar a articulação entre as formas indutivas e dedutivas, empregando situações que envolvam tais formas de raciocínio no âmbito deste contexto trabalhado.

4. Torre de Hanói como Recurso para apresentação do Principio Indutivo

Diante das três atividades que compõem esta proposta didática, conforme já caracterizadas, devido as limitações de espaço, se ilustrará sem seguida apenas a atividade 3.

Validação e Aplicações da Formulação $2^n - 1$ com o Princípio Indutivo

Validação

A formulação $2^n - 1$ que envolve o número mínimo de movimentos para transportar as peças da Torre de Hanói do pino inicial para outro, segundo informações obtidas do cumprimento das atividades 4.1 e 4.2 descritas nos procedimentos metodológicos, provém do emprego do raciocínio indutivo, cabe aplicar o Princípio da indução finita para saber se esta formulação é verdadeira.
Uma possível explicação seria:
De modo imediato, confirma-se que $T(1) = 1$, pois, $2^1 - 1 = 1$, portanto, a fórmula $2^n - 1$ é valida neste caso.
Suponha agora que $T(n)$ seja satisfeito deseja-se garantir $T(n+1)$ também o será, assim, confirma-se a hipótese de indução.
Conforme a suposição anterior, verificar-se-á a validade da proposição para *n* como segue:
$T(n) = 2^n - 1$, daí se tem que $T(n+1) = 2T(n) + 1$ através do resultado obtido anteriormente $(T(n) = 2T(n-1) + 1)$.
Como, pela hipótese de indução, $T(n) = 2^n - 1$, se $T(n+1) = 2T(n) + 1$ pode-se fazer o seguinte desenvolvimento: $T(n+1) = 2T(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$, que era o resultado esperado. Logo, a fórmula $T(n) = 2^n - 1$ vale para qualquer *n* natural.

Aplicação

Aplicação 1: Qual a quantidade mínima de movimentos necessários para se efetuar a mesma tarefa com os 64 discos?
Resposta: Trata-se de uma aplicação que consiste em si, no uso direto da generalização obtida. Daí, a quantidade mínima de movimentos para se efetuar a tarefa com os 64 discos é de $64 = 2^n - 1 = ... = 18.446.073.709.551.615$.

Aplicação 2: Sabendo-se que se n é o número de discos encaixados num pino, o número mínimo de jogadas para se transportar essa torre para outro pino é $2^n - 1$. Se um jogador faz uma jogada a cada 10 segundos e transporta a torre de um pino para o outro em 10 minutos e 30 segundos, utilizando o número mínimo de jogadas possíveis, pode-se afirmar que a quantidade de discos na torre era?
Resposta: Se em 1 minuto cabem 60 segundos, então, em 10 minutos cabem 600 segundos, logo, 10 minutos e 30 segundos é igual a $600 + 30 = 630$ segundos, assim, para transportar a torre de um pino para o outro o jogador leva 630 segundos.
Como o jogador transporta um disco em 10 segundos, a quantidade de jogadas efetuadas será de: $\frac{630}{10} = 63$ (número mínimo de jogadas). Logo, temos que $2^n - 1 = 63 \Rightarrow 2^n = 64$, onde $n = 6$. Daí, a quantidade de discos na torre era 6.

5. Considerações finais

A ideia de auxiliar alunos de licenciatura em matemática a terem uma visão mais concernente às intenções educativas mais recentes nesta área foi trabalhar a formulação do conhecimento matemático e, para tal, buscou-se explorar tais intuitos matematicamente a partir do *principio de indução finita*, fazendo uso da torre de Hanói como material recursivo.
O propósito de levantar um conjunto de atividades para serem desenvolvidas no âmbito dos laboratórios de ensino de matemática na intenção de viabilizar condições favoráveis à produção de conhecimento matemático, levando em conta os aspectos trazidos de Bagazgoitia *et al*. (1997) foram alcançados. Isto pode ser bem concebido a partir das três atividades organizadas no item 4 deste estudo **Torre de Hanói como Recurso para apresentação do Principio Indutivo**.
As destrezas matemáticas almejadas presentes nas intenções pedagógicas anunciadas ao término do parágrafo anterior, foram alcançadas conjuntamente por parte alunos e criticadas pelos professores que participaram deste estudo, mas, certamente, a proposta em si seja, em seus fundamentos teóricos e/ou metodológicos carecem de muitos ajustes.

6. Referências bibliográfica

André, M. E. D. A. (1998). *Etnografia da prática escolar*. São Paulo: Papirus.
Bagazgoitia, A. (1997). *et al*. *La Resolución de Problemas em las Matemáticas del Nuevo Bachillerato: Libro del Profesor*. País Vasco: Universidad del País Vasco.
Baldini, L.; Gomes, M. A. (2009). construção do laboratório de ensino de matemática e suas contribuições no processo de aprendizagem**.** In: *Revista F@pciência*, 3 (6), p. 65 – 71.
Borcelli, A. F.; Da Costa, S. S. C. (2008). Animação Interativa: um material potencialmente significativo para a aprendizagem de conceitos em física. *XI Encontro de Pesquisa em Ensino de Física* – Curitiba, Paraná.
Drabeski, E. J.; Francisco, R. (2010). *Estudo da Função Exponencial e a Indução Matemática com Aplicação da Torre de Hanói*. Disponível em: http://diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/696-4.pdf. Acesso em 20 de novembro de 2010.
Druck, S (org.). (2004). Explorando o ensino da matemática: atividades. v. 2. *Brasília*: *Ministério da Educação*, Secretaria de Educação Básica, p. 132-135.

Klimovsky, G.; Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático*. Buenos Aires: AZ.

Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E. e Morgado, A. C. (1998). *A Matemática do Ensino Médio*. v. 1. Rio de Janeiro: SBM.

Lorenzo, J. (1998). *La Matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: tecnos.

Medeiros, A. P.; Silva, J. R.; Silva, W. (1994). *Torre de Hanói: Um Estudo Exploratório*. Recife. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de especialização em educação matemática) – Universidade federal de Pernambuco.

Moreira, M. A. Teorias de aprendizagens. In: Borcelli, A. F.; Da Costa, S. S. C. (2008). Animação Interativa: um material potencialmente significativo para a aprendizagem de conceitos em física. *XI Encontro de Pesquisa em Ensino de Física* – Curitiba, Paraná.

Stake, R. (1988). Investigación con estudio de casos. In: André, M. E. D. A. *Etnografia da prática escolar*. São Paulo: Papirus Editora.