

EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA EN EL NIVEL SECUNDARIO

Dattoli, Florencia Iris

Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

fdattoli@fio.unicen.edu.ar

Resumen

En el presente trabajo se reflexiona sobre la necesidad de fortalecer el estudio de la Geometría en el Nivel Secundario y la incorporación en los estudios de Profesorados de Matemática de mayores contenidos en Geometría plana y del espacio. Dichas reflexiones se respaldan en el marco teórico de R. Duval y en un análisis retrospectivo del rol de la Geometría en el desarrollo de la Matemática, que muestra las causas y la inconveniencia de la introducción de la llamada Matemática Moderna a mediados del siglo anterior. Se completa con una serie de sugerencias para comenzar implementar en los estudios Secundarios ciertos cambios que pueden atenuar la problemática.

Palabras clave: Geometría. Revisión teórica. Propuesta didáctica.

1. Introducción

En los últimos años, la comunidad educativa está realizando un proceso de construcción y reflexión sobre el pensamiento geométrico, lo que constituye una contribución al desarrollo de innovaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría, un área fundamental para la formación, que en algunos casos no recibe el énfasis y el tratamiento pedagógico necesario en el currículo.

Los aportes de las tecnologías computacionales para potenciar su desarrollo son muy atractivos para el docente, confiando en el aspecto motivador que puede tener para los alumnos, pero se hace necesario considerar una discusión más profunda sobre otros atributos que presenta la Geometría y la manera de enseñarla durante la formación de los estudiantes.

En base a las serias dificultades que presentan los ingresantes a la Facultad de Ingeniería de la UNCPBA, especialmente en sus capacidades creativas, audaces, de razonamiento, de lenguaje y metacognitivas, es que se ha intentado realizar un análisis sistemático y formal de dichos problemas, enfocando el mismo desde la formación que los alumnos traen del nivel secundario. Se hace necesario realizar dicho análisis, rescatando algunos conceptos desde un análisis retrospectivo de los diferentes paradigmas que fueron ocurriendo en la Historia de la Matemática en general y de la Geometría en particular y sus consecuencias en los lineamientos curriculares de la Enseñanza Secundaria y de los Profesorados en Matemática.

El intento es configurar la presentación de algunas necesidades que debieran cubrirse en la enseñanza de nivel secundario para que los alumnos tengan un acceso menos traumático en el ingreso a la universidad y la formación de los Profesores para que puedan hacerlo posible.

2. Marco teórico

2.a. Análisis retrospectivo

A partir de la lectura de las bases históricas y la evolución del pensamiento sobre las verdades y el saber en Matemática con sus consecuencias en la enseñanza,

especialmente en mediados del siglo XX, es posible comprender las causas de la situación en que se encuentran hoy los estudiantes que llegan a la Universidad y los profesores, en su mayoría, con quienes han trabajado durante su escuela media.

Según Viviente Mateu (1988) la interpretación equivocada de Aristóteles de la Geometría como un “sistema euclídeo de eternas verdades, base de la certeza del conocimiento humano” y ante la aparición posterior de las geometrías no euclídeas (hiperbólica, elíptica y esférica) durante el siglo XIX, se procedió a tratar de axiomatizar toda la Matemática siguiendo el proceso de vigorización y formalización que Euclides inició con la Geometría Clásica. En algunos aspectos específicos, como el Análisis Matemático y la teoría de los Números dio sus buenos resultados, dando origen a la aparición de la Teoría de Conjuntos y a una intensa búsqueda del correcto fundamento de la Matemática y la consecuente evidencia de un mayor rigor en su tratamiento. Este mayor rigor fue proporcionado por la escuela formalista de Hilbert, partiendo de la noción de sistema axiomático formal, tomado en 1898 en los *Grundlagen der Geometrie* (Bases de Geometría). En este contexto se puso en evidencia la limitación de la axiomatización de Euclides (quinto postulado) en la Geometría Clásica y se comenzó a poner en duda la utilización de dicha Geometría en los estudios matemáticos. Es en esta línea en la que los formalistas comenzaron a eliminar de los planes docentes la enseñanza de la geometría euclídea sintética e introducir una algebrización cada vez mayor, basándola en una presentación axiomática sobre la estructura conjuntista subyacente. Ello eliminó la formación intuitivo-espacial y me estoy refiriendo específicamente a la consecuencia ya conocida de la incorporación de la llamada Matemática Moderna, en la década del 50 del siglo pasado, llegando a nuestro país en los diseños curriculares de los años '60. Existen autores que aún hoy insisten en que es posible concluir que dicha modificación de los planes de estudio respondió a un movimiento social que nada tiene que ver con la matemática en sí misma. Para los grandes avances de dicha ciencia es muy poco lo que este movimiento ha representado, en cambio en la problemática de la formación esto ya se ha reconocido como un retroceso, el que no hubiese sido tan nocivo si no hubiera hecho que la geometría prácticamente desapareciera de los planes de los profesorados en nuestro país. Llegando a fines de dicho siglo y ante el nuevo paradigma de la enseñanza instalado a partir de las nuevas tecnologías, la búsqueda de “reparaciones” se orientó hacia el uso de las mismas con la esperanza de encontrar (a veces logrado parcialmente) mejoras importantes en el aprendizaje de la Matemática.

2.b. Enseñanza de la Geometría

Cuando uno se detiene a pensar en enseñar Geometría, encuentra que todo estudio puede ser localizado en alguna parte entre los extremos de una aproximación "intuitiva" y una aproximación "formal" o "axiomática". Considero que no es posible que sólo una de estas dos aproximaciones debiera ser privilegiada sino que debiera haber un interjuego dialéctico entre ellas. En el nivel universitario ya no contamos con los tiempos para ir dando un cambio gradual conforme se incrementa la edad y el nivel escolar de los estudiantes y también conocemos claramente que esto no se ha dado en los niveles anteriores. Entonces la oportunidad en el primer año de Ingeniería no es de lo más cómoda pero es un deber afrontar el desafío.

En cuanto a la diversidad de aspectos que pueden observarse en la caracterización de la Geometría y con el objetivo de enriquecer el presente análisis, es posible mencionar características relevantes, en vista de las implicaciones didácticas, presentes en ICMI

PMME-UNISON (2001) . Dicho documento presenta a la Geometría de la siguiente manera:

- ✓ como la ciencia del espacio, constituyendo una teoría de ideas y métodos mediante las cuales podemos construir y estudiar modelos idealizados tanto del mundo físico como también de otros fenómenos del mundo real.
- ✓ como un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias
- ✓ como un punto de encuentro entre matemáticas como una teoría y matemáticas como una fuente de modelos.
- ✓ como una manera de pensar y entender en un nivel más alto, como una teoría formal
- ✓ como un ejemplo paradigmático para la enseñanza del razonamiento deductivo
- ✓ como una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovativas

Como se puede observar en lo enumerado, la Geometría puede brindar aportes tanto desde el punto de vista del desarrollo cognitivo como el metacognitivo en el aprendizaje, y en este último sentido también contribuye a un mejor desenvolvimiento para la formación general. Desde una postura de quienes estamos comprometidos con la enseñanza de la Matemática en los niveles superiores podemos preguntarnos más aún:

¿Cuál es el papel de la axiomática en la enseñanza de la geometría?

¿Debiera establecerse un conjunto completo de axiomas desde el principio (y si es así, a qué edad y nivel escolar) o es aconsejable la introducción gradual de la axiomática?

¿La "demostración de teoremas" debiera estar restringida a la geometría?

¿Nos gustaría exponer a los estudiantes a diferentes niveles de rigor en las demostraciones?

¿Las demostraciones deberían ser herramientas para el entendimiento personal, para convencer a otros, o la búsqueda de la verdad aunque sea en un pequeño campo?

¿Debieran ser privilegiadas las afirmaciones intuitivas o las contraintuitivas?

Resulta evidente ante la observación de los planes de estudio de los profesorados, que existe una realidad orientada hacia la enseñanza de los métodos analíticos en Geometría, hasta en los grados más tempranos a expensas de otros aspectos de la geometría. En algunas personalidades es posible encontrar un rechazo a "asomarse" siquiera a las utilidades gráficas, considerándolas de bajo nivel científico, cuando la verdadera situación es que pueden estar desconociendo el tema, máxime porque en su formación no se encontraron con ello. Se supone que la geometría analítica presenta los modelos algebraicos para las situaciones geométricas pero tan pronto como los estudiantes son introducidos a estos métodos nuevos, son empujados repentinamente a un mundo de cálculos y símbolos en los que se rompen las correlaciones entre las situaciones geométricas y sus modelos algebraicos y con frecuencia son omitidas las interpretaciones geométricas de los cálculos numéricos.

Del documento de ICMI (2001) resultan también oportunas para las presentes reflexiones, unas nuevas preguntas que han sido adaptadas y/o complementadas para esta ocasión. Ellas son:

¿De qué maneras el estudio del álgebra lineal puede potenciar el entendimiento de la geometría? ¿O es que la situación sería la inversa?

¿Cómo podemos potenciar de mejor manera la habilidad de los estudiantes para elegir las herramientas adecuadas (conceptuales, manipulativas, tecnológicas) para resolver problemas geométricos específicos?

¿Los procedimientos de trabajo debieran estar fundamentados principalmente en el papel, en la comunicación oral, en el dibujo técnico o el trabajo con la computadora?

¿Qué es exactamente lo que debiera ser evaluado y considerado para una calificación: La solución? ¿El proceso de solución? ¿Las formas de pensamiento? ¿Las construcciones geométricas?

Para dar sustento teórico a lo que se considera, es oportuno tomar a Duval, R. (1998), quien ha profundizado en gran manera por la problemática planteada. Las hipótesis de las que es posible partir, tomadas como adaptaciones de dicho marco de análisis, son aquellas en las que refieren al problema básico de la enseñanza de la geometría:

1. La actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento y la construcción.
2. Es necesario realizar durante el currículo escolar un trabajo que reconozca los diferentes procesos de visualización y de razonamiento, pues no sólo hay varias formas de ver una figura, sino también de razonar las situaciones.
3. La coordinación entre los tres procesos citados, visualización, construcción y razonamiento debe ocurrir realmente durante todo el trabajo de aprendizaje
4. Las tres clases de procesos deben ser analizados y adaptados en profundidad por parte del docente para entonces poder desarrollarlos en los alumnos.

Pero no es posible pensar a la visualización como un simple papel ilustrativo de las afirmaciones geométricas sino que es necesario tener en cuenta el concepto de Aprehensión y sus diferentes tipos según Duval, R.(2001).

1. Aprehensión perceptiva: es aquella apreciación que se caracteriza como la identificación simple de una configuración. Es la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del alumno y es completamente independiente de cualquier proceso discursivo.
2. Aprehensión discursiva: es la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones, primeramente ingenuas y posteriormente al reconocimiento de las formas y sus clasificaciones, ya matemáticas como propiedades, definiciones, teoremas, axiomas. Este vínculo debe realizarse de dos maneras, denominados por el autor como cambios de anclaje.
3. Aprehensión operativa: se produce cuando la persona lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial, para resolver un problema geométrico o analizar una configuración que aparece como base pseudoconcreta de un estudio analítico. Salgueiro-Dáttoli (2006). Se establecen dos niveles en este proceso:
 - a) Aprehensión operativa de cambio figural: Cuando a la configuración inicial se le agregan o quitan nuevos elementos geométricos (o se remarcan) creando nuevas configuraciones para estudiar un tema o resolver un problema.
 - b) Aprehensión operativa de reconfiguración. Cuando las configuraciones iniciales se subdividen y se recolocan las subconfiguraciones en otras posiciones, como las piezas de un rompecabezas.

Volviendo a los procesos involucrados en la actividad geométrica, es fundamental profundizar en el razonamiento. R. Duval diferencia al menos tres tipos de razonamiento en relación con los procesos discursivos:

1. Un proceso discursivo natural que es espontáneamente realizado en la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación, en el registro del lenguaje natural.

2. Un proceso puramente configural, que puede ser asimilado como una aprehensión operativa y posible de que el alumno lo lleve a cabo justamente una vez lograda dicha aprehensión.
3. Un proceso discursivo teórico que es realizado a través de la deducción. La experiencia de la necesidad lógica está cercanamente conectada a este proceso teórico.

La geometría, más que otras áreas en Matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento. Esta debe ser una tarea esencial para su enseñanza pero se requiere obtener una práctica amplia y bien balanceada de estos procesos cognitivos subyacentes. Esto significa que se requieren situaciones específicas de aprendizaje para la diferenciación y coordinación entre varias clases de procesos en visualización y en razonamiento.

3. Conclusiones a título de propuesta

Considerando el marco teórico precedente y la realidad planteada en la introducción del presente trabajo, es posible avanzar en ciertos lineamientos que también son abonados por la propia experiencia docente. A esta altura seguramente coincidiremos en que:

- ✓ Aquel proceso que muchas veces es designado como razonamiento, se trata más bien una clase de descripción espontánea de un proceso puramente configural y éste no puede ser aceptado como un discurso teórico, aún cuando pueda proporcionar las ideas claves para una demostración. Esa brecha entre el proceso discursivo natural y el teórico conforma uno de los principales problemas de la enseñanza de la Geometría en particular y la Matemática en general, y si los profesores no tenemos una clara advertencia de ello se puede llegar a un aprendizaje más bien anecdótico de la Matemática.
- ✓ La significación de la geometría, para cualquiera que no planea transformarse en un matemático o en un ingeniero, es desarrollar habilidades de razonamiento y de representación visual y favorecer la sinergia de estos dos procesos totalmente diferentes.
- ✓ El nuevo valor de la geometría hoy se ve potenciado por las necesidades en las Ciencias de la Computación, fundamentalmente en los niveles de generación de sistemas específicos y también para el buen uso de las potencialidades de los sistemas CAD.

Tratando de llegar a los lineamientos prometidos, éstos pueden clasificarse en dos miradas:

1. En la formación de Profesores de Matemática: Debieran recuperarse tiempos en los diseños curriculares de los Profesorados para la incorporación de tópicos de Geometría Plana, del Espacio y Geometría Proyectiva, conformando así una base sustentable de conocimientos que configuren una clara inteligencia acerca de los diferentes abordajes que proporciona la formación geométrica, para llegar a estudios matemáticos superiores y poder adaptar los mismos a la enseñanza.

2. En la formación de Nivel Secundario: Los enunciados precedentes sintetizan de manera indiscutible esa oportunidad de hacer uso de la Geometría para el aprendizaje matemático en general y así aportar a la formación de los estudiantes para el ingreso al nivel universitario y quienes, si bien no avancen en estudios matemáticos superiores puedan desarrollar líneas de pensamiento con mayor validez lógica.

Si nos ubicamos en el marco de Duval pensando en cuál sería un nivel aceptable para el egreso desde el Nivel Secundario, en cuanto al camino de la aprehensión, sería deseable

al menos que los alumnos hayan transitado el de la aprehensión perceptiva, la discursiva y algunos avances en la aprehensión operativa de cambio figural.

En cuanto los procesos discursivos, la presente propuesta contempla que es irrenunciable que los alumnos terminen el Nivel Secundario sin haber desarrollado al menos el discursivo natural según como fue definido. Avanzar en el proceso discursivo teórico tal vez deba realizarse al menos en el registro de la lengua natural y, aunque en situaciones sencillas, comenzar a incursionar en la experiencia de la necesidad lógica para las afirmaciones de verdad.

Y en línea con las preguntas planteadas en el presente trabajo, algunas respuestas pueden proponerse, siempre pensando en el límite con que se debiera trabajar en el Nivel Secundario.

Si bien la axiomática en este nivel resulta sumamente problemática, en Geometría puede presentarse tanto en la Plana como en la Espacial, como verdades evidentes por medio de construcciones, juegos, mediciones. Gradualmente se puede avanzar a partir del Nivel Primario hasta que en el Secundario, y sobre la base de haber reflexionado acerca de la potencia de los axiomas básicos, introducir otros en diferentes dominios de la disciplina, aun en cuestiones algebraicas y así lograr una mayor comprensión de axiomas más abstractos,

En cuanto a la demostración de teoremas, la Geometría brinda muy buenas oportunidades para la comprensión de esa dinámica usando al menos problemas elementales. En ese proceso comienza también a estar presente el razonamiento lógico y la correlación de diferentes registros de representación (gráfico, simbólico, coloquial, etc.) como así también correlaciones entre el dominio algebraico y el geométrico. Se aconseja entonces el uso simultáneo de los diferentes registros y si se trabaja en este sentido, la situación debiera ser el uso del entendimiento de la Geometría como potenciador del algebra lineal, aunque se realice en los mismos contenidos que se trabajan actualmente.

En el inicio de las demostraciones, y siempre en el Secundario, las afirmaciones intuitivas tienen una gran importancia y cuando las enunciadas por los alumnos resultan erróneas por ingenuas, es el momento de comenzar a introducir la formalidad de manera adecuada.

Como en Geometría los procesos procedimentales resultan relevantes, la habilidad de los estudiantes para elegir y usar las herramientas adecuadas se debe incentivar por medio de presentación de problemáticas de tipo manipulativas y tecnológicas, los procedimientos de trabajo debieran ser diversos como el papel, la comunicación oral, el dibujo técnico, sin descuidar la agilidad de los software adecuados y realizar también allí los mismos análisis y maquetas. En definitiva el uso de la virtualidad para el aprendizaje es una manera adecuada para comprender su importancia como una simple herramienta que está al alcance de la mano.

Y finalmente, y solamente si se ha trabajado en este sentido, entonces las evaluaciones pueden ser elaboradas en un justo equilibrio entre solución, procesos de resolución, formas de pensamiento que ha podido llevar a cabo el alumno y construcciones geométricas con los diferentes elementos mencionados.

4. Referencias

Icimi.pmm-Unison. Perspectives en l'Ensenyament de la Geometria pel segle XXI. Documento de discusión para un estudio. 2001. <http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>. Recuperado el 14/02/11.

- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. http://scholar.google.com/scholar?q=Representation,+vision+and+visualisation:+cognitive+functions+in+mathematical+thinking&hl=es&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart
- Duval, R. Traducción: Hernández, V. y Villalba, M. (2001) La geometría desde un punto de vista cognitivo . PMME-UNISON. <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm> Recuperado el 13/05/2011.
- Viviente Mateu, J. (1988) Geometría y/o álgebra geométrica. Zubía, ISSN 0213-4306, N° 6, , págs. 91-97- <http://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=110213> Recuperado 20/12/2010.
- Rina Hershkowitz, (2001) Acerca del razonamiento en geometría. Traducción: Hernández, V. y Villalba, M. PMME-UNISON. <http://www.euclides.org/menu/articles/article104.htm>- Recuperado 15/12/2010.
- Salgueiro, W. Dattoli, F. (2006) Geometría descriptiva. Base para las competencias científico-técnicas en la formación de los ingenieros. 5° CAEDI. Organizado por el CONFEDI. Facultad de Ingeniería. U.N.Cuyo. Mendoza. Argentina.