EL CERO ENTRE LA ECUACIONES: CONCEPCIONES EN ALUMNOS DE SECUNDARIA SUPERIOR

Carla De Zan[1]*; Verónica Parra*[2]
[1]EEM N°1, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísica. UNLP
[2]Núcleo de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología. Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA.
CONICET
carladezan@yahoo.com.ar; vparra@exa.unicen.edu.ar

Resumen
El presente trabajo forma parte de una tesis de licenciatura en vías de desarrollo, cuyo principal objetivo es identificar y formular los conceptos y teoremas en acto que estudiantes de 4to año de una escuela Secundaria de la ciudad de La Plata, ponen en juego cuando aparece el Cero en las soluciones de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. Para ello se diseño e implementó una secuencia didáctica cuyos resultados están siendo analizados a la luz de la Teoría de los Campos Conceptuales y así poder describir, analizar e interpretar los abordajes y las conceptualizaciones de los participantes. Las dificultades observadas en el trabajo áulico y las producciones escritas de los alumnos son indicadores de la complejidad de su construcción.

Palabras clave: Cero. Concepto-en-acto. Teorema-en-acto. Teoría de los Campos Conceptuales. Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

Introducción
La problemática de investigación en torno al álgebra escolar tiene una marcada trayectoria y ha ido evolucionando con el desarrollo de las perspectivas teóricas en didáctica de la matemática (Gascón, 2001). Muchos trabajos realizados en torno al algebra y la resolución de ecuaciones (Alonso, F.; Barbero, C.; Fuentes, I.; Azcárate, A.; Dozagarat, J.; Gutierrez, S.; Ortíz, M A, A.; Riviere, V.; da Veiga C.; Grupo Azarquiel; 1993); Pinto y Fiorentini, 1997; Di Franco y Gentile, 2006; Caronía y otros, 2009, Lanner de Moura y de Sousa, 2009) dan cuanta de las dificultades que genera su estudio, por ejemplo en el uso de las jerarquías y propiedades de las operaciones al despejar una incógnita, las condiciones de equivalencia y simetría, en el manejo de las relaciones entre una operación y su inversa, entre otros. Cabe notar que, a pesar de los muchos trabajos dedicados a la problemática, las dificultades persisten.
Según Lanner de Moura y de Sousa (2005, p.12-13) "La aparición del algebra está asociada al origen del cero y fue definida por Bell (1995), según Fraile (1998), como fenómeno notable de la historia. Su aparición está relacionada con el pensamiento humano de las diversas civilizaciones. En la misma línea de razonamiento, sigue Ifrah (1998, p.237), al afirmar que "del infinito al cero hay un solo paso, lo que lleva al algebra, ya que lo nulo es lo inverso de lo ilimitado". El cero fue una "invención difícil y genial" y abrió el "camino para el desarrollo del algebra moderna y de todas las ramas de la matemática desde el Renacimiento Europeo."(Traducción propia)"
El tratamiento algebraico adecuado requiere, previamente, el establecimiento del sistema de numeración y las propiedades de la operatoria numérica, otorgándole al "cero" un papel fundamental, por su gran multiplicidad de usos y dificultades en la construcción de su noción. A pesar de lo complejo de su estudio, no hay menciones

especificas relativas al concepto del cero y su operatoria en los Lineamientos Curriculares (Diseño Curricular para la Educación Primaria, 2008). Es en este sentido, que consideramos la inclusión de la Conceptualización del Cero como otro de los factores intervinientes en la construcción de las nociones algebraicas.
Atendiendo a la complejidad en la conceptualización del cero, la dificultad que esto genera en los estudiantes para su aprendizaje y el exiguo lugar que ocupa en el Diseño Curricular, nos proponemos con este trabajo describir, analizar e interpretar los abordajes y usos que alumnos de 4to año de la Escuela Secundaria hacen en referencia al concepto de cero en el tratamiento de las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Antecedentes de la problemática: El cero, la aritmética y la abstracción algebraica
Algunos autores han realizado investigaciones en torno al concepto del cero y nos aportan algunas consideraciones relevantes. Según Gheverghese, (2002) el concepto de cero está asociado a términos como nada, vacío, nulo. Mientras que “no hay” refleja la existencia sin disponibilidad, “nada” refleja que no existe. Culturalmente la “nada”, el “vacío” generan en los seres humanos ansiedad, inquietud emocional. La incomodidad que sienten los lleva a generar ideas sustitutas para enmascararla y evitar así su confrontación.
Por su parte Parra (1997,p. 222-223), plantea que “los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones, y ponen en juego diferentes tipos de escritura de los números, así como diversas relaciones entre los números”, permitiendo avanzar en la dirección de aprendizajes matemáticos más complejos.
“El aprendizaje matemático se va produciendo gracias a la apropiación progresiva de símbolos y organizaciones de símbolos (significados y patrones operatorios) de creciente abstracción”, sostiene Alcalá Hernández, M. (2000, p.92). “El mayor o menor dominio de un código a un determinado nivel sirve de acelerador o de freno en la progresión en el aprendizaje matemático escolar” (Alcalá Hernández, M., 2000, p.92).
En este sentido, el Grupo Azarquiel (Alonso et al, 1993, p.138) sustentan la idea de que “el paso de la aritmética al álgebra supone un salto cualitativo, ya que el razonamiento algebraico es de distinta naturaleza que el aritmético. Para que tal transferencia pudiera ser resuelta con éxito debería tenerse un buen conocimiento de las propiedades y relaciones que rigen el cálculo aritmético. Los alumnos aprenden a manejar el cálculo aritmético sin tiempo ni, seguramente, posibilidades de tomar conciencia de lo que hacen”. Además, en el aprendizaje del álgebra el trabajo para resolver ecuaciones plantea dificultades como: el cambio de concepto en el signo igual (pasa de ser unidireccional a implicar una situación de equilibrio y su propiedad simétrica, teniendo que utilizar propiedades referentes a ambas estructuras); con las relación entre una operación y su inversa (cuyo dominio no es fundamental para la aritmética ya que el igual se utiliza en una sola dirección), y con los números racionales.
Así mismo, Gascon (2001) sostiene que el modelo dominante del álgebra escolar la identifica con una especie de “aritmética generalizada”, consistente en la generalización de un presunto “lenguaje aritmético” y en considerar el “pensamiento algebraico” como la extensión de un supuesto “pensamiento aritmético”. Y en el paso de la secundaria a la universidad se da un nuevo fenómeno que es el de algebrización abrupta.
Evidentemente, en el aprendizaje de un conocimiento, se da un proceso de construcción que va de lo concreto a lo abstracto, siendo el cero, entre los conceptos abstractos

matemáticos, complejo desde sus orígenes. Sin embargo, es evidente la ausencia de una consideración o problematización particular en relación al cero y a las reglas de su operatoria, o su tratamiento en particular en ecuaciones o sistemas de ecuaciones. Esta observación y la importancia de diseñar Organizaciones Matemáticas tendientes a favorecer el desarrollo del repertorio de esquemas de los alumnos en esta área de conocimientos, le confieren gran relevancia a los resultados que puedan obtenerse del desarrollo de este proyecto.

Marco Teórico

La Teoría de los Campos Conceptuales, propuesta por Vergnaud (1990), es una teoría cognitivista, que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo del aprendizaje de competencias complejas. Primeramente, fue elaborada para dar cuenta de procesos de conceptualización progresiva de estructuras aditivas, multiplicativas, relación número-espacio, y del álgebra. Los conceptos clave de la teoría de los campos conceptuales son, además del propio concepto de ***campo conceptual,*** los conceptos de **esquema** (la gran herencia piagetiana de Vergnaud), **situación, invariante operatorio** (**teorema-en-acción** o **concepto-en-acción**), y su propia concepción de **concepto**.

Los conceptos involucran un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (referente), un conjunto de invariantes sobre las que reposa la operacionalidad del concepto (significado) y un conjunto de representaciones simbólicas (significante), y se torna significativo a través de una variedad de situaciones, siendo los esquemas evocados por el sujeto los que dan sentido a una situación dada. Los invariantes operatorios incluyen concepto-en-acción (categoría de pensamiento considerada como pertinente) y teorema-en-acción (proposición considerada como verdadera sobre lo real), y son implícitos.

Las concepciones previas de los alumnos contienen teoremas y conceptos-en acción que no son verdaderos teoremas y conceptos científicos pero que pueden evolucionar hacia ellos, y que pueden convertirse en obstáculos epistemológicos. Por ejemplo, en matemática, particularmente en álgebra, la verificación del significado de las representaciones simbólicas depende no sólo de la habilidad que el sujeto tenga para representar las entidades y las relaciones entre ellas, sino principalmente de elementos conceptuales que deben ser tenidos en cuenta (conceptos como sistema, estado, interacción, transferencia, conservación, entre otros).

En general, pocas veces los alumnos explican o expresan en lenguaje natural sus teoremas y conceptos-en-acción, pero los mismos pueden explicitarse desde la enseñanza, ayudando al alumno a construir conceptos y teoremas explícitos, y científicamente aceptados a partir del conocimiento implícito. Así, la Teoría desarrollada por Gérard Vergnaud presenta un gran potencial para describir, analizar e interpretar lo que ocurre en el aula en la conceptualización matemática.

Metodología

Esta investigación es cualitativa, de tipo etnográfico, con observación participante. Se funda en la necesidad de explorar, describir, analizar e interpretar los teoremas y conceptos en acto que ponen en juego los alumnos al resolver sistemas de ecuaciones que involucran específicamente al cero en su resolución o solución a partir de la aplicación de un conjunto de situaciones[84]. Se realizó en un 4to año de una Escuela Secundaria de la ciudad de La Plata (E.E.M.N°1). Se trata de un curso de 25 alumnos distribuidos en 6 grupos de entre 3 y 5 integrantes cada uno. La implementación de la Secuencia fue llevada a cabo por la investigadora entre Septiembre y Noviembre del año 2010 de La Plata. Las clases se realizaron en dos encuentros semanales de una y dos horas reloj cada uno.

La Secuencia fue diseñada atendiendo a la situación socio educativa del grupo de alumnos, y el haber concebido la investigación con diseño abierto permitió realizar reconfiguraciones a la misma y readecuar las situaciones de trabajo. Si bien el estudio es predominantemente de carácter cualitativo, se realizaran conteos que acompañen la aparición de las categorías, que permitan registrar las nociones que se puedan reiterar con marcada frecuencia.

En el proceso de registro se utilizó el escaneado y fotocopiado de las producciones de cada situación trabajada en la clase, su devolución y discusión en la clase siguiente, previo al trabajo con la nueva situación. La docente-investigadora realizó un registro escrito de sucesos particulares acontecidos durante alguna de las clases.

Preguntas de la Investigación

Se propone a los estudiantes una serie de situaciones de resolución de sistemas de ecuaciones lineales en las que pueden aparecer los siguientes tipos de soluciones: $x = 0$, $y = 0$, $(x;y) = (0;0)$, $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot x = k$; y nos interrogamos:

- ¿Cómo interpretan algebraicamente y gráficamente esos resultados?¿Qué teoremas-en-acto y/o conceptos-en-acto se pueden formular en el caso de x = 0, y = 0 o (x,y) = (0;0)? En los casos 0.x = 0 o 0.x = k, ¿logran los alumnos, hacer una interpretación del significado subyacente, que implica que "vale para *cualquier valor de x,* incluyendo al cero" y "no hay *ningún valor de x* que satisfaga la ecuación"?
- ¿Qué teoremas-en-acto y conceptos-en-acto surgen ante una situación conflictiva?

Análisis y Resultados Parciales

La realización de un trabajo diagnóstico mostró serias dificultades en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, por lo que se desarrollaron actividades de revisión y familiarización tendientes a abordar las actividades de la secuencia reduciendo obstáculos adicionales. Para ello se propuso, como actividad preparatoria, el trabajo sobre un problema con solución matemáticamente, pero inapropiada para el contexto del problema, lo que generó expresiones de desconcierto e intentos por cambiar la situación. Igualmente en la cuarta clase, desde la implementación de la secuencia, se discutió sobre interpretación de consignas y resolución de sistemas ya que se seguían detectando dificultades que interferían en el foco de las situaciones, por ejemplo un sistema en el que x=0 arribaban a otro resultado y se perdía la posibilidad de discutir sobre su significado.

En la séptima clase y con posterioridad al trabajo sobre la segunda situación se propuso una actividad adicional sobre operaciones con el cero, originada en las dificultades de cálculo. La misma se realizó en parejas (trece) y con discusión sobre las respuestas presentadas por cada grupo anticipando la entrega de la tercera situación. En el caso de la operación $a : 0 =$; los teoremas-en-acto puestos en evidencia fueron tres: ´Si a un número lo

[84] Ver Anexo I.

divido por cero entonces da el mismo número´ (cinco parejas), ´Si a un número lo divido por cero entonces da cero´ (siete grupos), mientras que un solo equipo sostuvo que no se podía resolver.
En los Sistemas Compatibles Determinados pueden formularse algunos teoremas-en-acto surgidos de las respuestas escritas por los propios alumnos en sus producciones: ´ Ya que se trata de un número más, si alguna de las incógnitas es cero entonces el sistema tiene solución´, (tres de los grupos), ´Si alguna de las incógnitas es cero entonces el sistema no tiene solución´ (un equipo) pero ´si es distinto de cero entonces si tiene´ (Ej: "*la a y la c no tienen solución, pero la b la tiene…En la a la ´y´ da cero, en la b da puntos que se pueden encontrar en una recta, y la c la ´y´ y la ´x´ dan cero*"). En relación a la interpretación gráfica surge que ´Si las incógnitas son distintas de cero entonces los puntos se pueden ubicar en la recta´.
De igual manera, en los Sistemas Compatibles Indeterminados cinco de los grupos manifiestan dificultades en la operatoria y resolución de ecuaciones proponiendo como solución x = 0 en vez de $0.x = 0$, y de ahí diferentes opciones de resultados. De las respuestas surgen: ´Si no hay un valor puntual para ´x´ e ´y´ entonces no tiene solución´ (un grupo arriba a 0=0), y ´Si la solución verifica las ecuaciones y el punto pertenece a la recta entonces tiene solución´.
Por último en los Sistemas Incompatibles pueden definirse: ´Si al reemplazar el valor de x se obtienen diferentes valores de y entonces el sistema no tiene solución´(de tres grupos), ´Si se obtienen absurdos como 0=-5 o 0=-1 entonces no existe solución´(uno equipo). Un grupo no logra terminar la resolución por lo que puede interpretarse que ´si la incógnita desaparece entonces no se puede resolver´. Por último, del sexto equipo puede expresarse como teorema-en-acto que ´Si encuentro un valor para x pero no verifican las ecuaciones ni la gráfica entonces el sistema no tiene solución´.

Consideraciones Finales

Es de notar que la interpretación analítica varía en relación a la gráfica y en varios grupos fue utilizada como herramienta de contrastación y rectificación de lo concluido inicialmente. Del caso $0.x = 0$ no puede asumirse que la conceptualización "vale para todo x" se encuentra consolidada, a lo sumo los alumnos encuentran alguna solución particular. También se observa en la situación $0.x = k$ que la mayoría de los grupos expresan la inexistencia de solución, observándose en tales casos errores de cálculo o imposibilidad de verificación, no pudiendo, entonces, afirmarse que hayan logrado conceptualizar la generalización de la noción: "no hay *ningún valor de x* que satisfaga la ecuación".
Ante las situaciones conflictivas y superado el desconcierto inicial, los alumnos adoptan, en general, la postura de resolver y responder acorde a lo encontrado, solo en pocos casos intentan algo nuevo y solo en uno de ellos abandonaron la actividad. De lo analizado hasta el momento puede evidenciarse, una vez más, la dificultad manifiesta en la operatividad con el cero, y su persistencia a lo largo de la implementación de la Secuencia, su interferencia en la conceptualización de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas y la necesidad de profundizar el abordaje de este concepto con mayor profundidad y a más temprana edad.

Referencias Bibliográficas

Alcalá Hernández, M. (2000). La construcción numérica: ¿de lo concreto a lo abstracto? *Epsilon*, 48, 16 (3), 75-94.

Alonso, F.; Barbero, C.; Fuentes, I.; Azcárate, A.; Dozagarat, J.; Gutierrez, S.; Ortíz, M A, A.; Riviere, V.; da Veiga C.; Grupo Azarquiel. (1993) *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Matemáticas: cultura y aprendizaje Nº 33 Ed. Síntesis.
Caronía, S., Berentt, E.; Lesiw G. (2009) Sistemas De Ecuaciones. Una Meta Reflexión Sobre La Práctica Profesional. *SOAREM*, 11 (40), 25-35.
Di Franco, N; Gentile C. (2006) (ESEL)-Equivalencia En Sistemas De Ecuaciones Lineales. *SOAREM*, 8 (31), 31-42.
Diseño Curricular para la Educación Primaria. (2008) Primer Ciclo Volumen 1. Dirección General de Cultura y Educación. Primera edición. La Plata. Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.
Diseño Curricular para la Educación Primaria. (2008) Segundo Ciclo Volumen 1. Dirección General de Cultura y Educación. Primero edición. La Plata. Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.
Eliza de André, M. (1998) *Etnografia e o estudo da prática escolar cotidiana y o estudo de caso etnográfico*. *Etnografía de la Práctica escolar*, 35-64.
Gascón, J. Bosch, M. Bolea, P. (2001). ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? *Educación Matemática*, 13 (3), 22-63.
Gheverghese J. G. (2002) The enormity of zero. *Revista Brasileira de Historia da Matemática*, 2 (4), 155-167.
Hernández Sampieri, R.; Collado, C.; Lucio, P. (1997) *Metodología de la investigación*. MacGraw Hill. México Capítulo 1, 2 y 3, 1-56
Lanner de Moura y de Sousa (2005*)* O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. *Zetetiké*, 13 (24), 11-45. CEMPEM– FE. UNICAMP
Martínez Montero, J. (2001) Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas. *Épsilon*, 49, 13-26.
Moreira, M.A. (2002) "*A teoria dos campos conceituais de vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área"*. Investigações em Ensino de Ciencias, Instituto de Física, UFRGS, Brasil. Disponible en http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7n1_a1.html Último acceso: 13/06/2011
Parra, C. (1997) *Cálculo mental en la escuela primaria. Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones*. Paidos.Cap. 7, 219-272.
Pinto, R y Fiorentini, D. (1997) *Cenas de uma aula de älgebra: Produzindo e negociando significados para "a coisa"*. Zetetiké, 5 (8), 45-71. CEMPEM– FE /UNICAMP.
Rodríguez Gómez, G. (1999) *Metodología de la investigación cualitativa*. Ed. Aljibe.
Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos Conceptuales. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.

Anexo I: Conjunto de Situaciones

Situación 1

De ser posible, hallen la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2(x - 2) = y - 4 \\ y + x = 0 \end{cases}$

Observen sus resultados y respondan:

El sistema, ¿tiene solución? ¿Por qué? ¿Qué elementos de la resolución les permiten elaborar esa conclusión?

¿Cómo interpretan ese resultado? Elaboren una situación que sea ejemplo de este sistema. Expliquen que creen que ocurrirá con las rectas en la interpretación gráfica. Representen gráficamente y contrasten sus respuestas previas.

Elaboren una conclusión que exprese la relación entre lo que obtuvieron al resolver analíticamente y lo que surgió de la representación gráfica del sistema

Situación 2: Idem 1 con $\begin{cases} 2x - 2 = y \\ -y + 2x = -3 \end{cases}$

Situación 3: Idem 1 con $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$