# CONFLICTOS SEMIÓTICOS ASOCIADOS A LOS ERRORES EN LA INTERPRETACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA-VECTORIAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

*Distéfano, María Laura; Aznar, María Andrea; Figueroa, Stella Maris; Moler, Emilce*
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Mar del Plata
mldistefano@fi.mdp.edu.ar

**Resumen**
En este trabajo se analiza el uso que los alumnos hacen de las distintas representaciones de números complejos a fin de detectar los conflictos semióticos asociados a la representación geométrica-vectorial e inferir las funciones semióticas que están ligadas, con el objetivo de mejorar las estrategias de enseñanza. Para ello se efectúa un análisis cualitativo de las producciones escritas de los alumnos. Las mismas corresponden a un ejercicio de una evaluación parcial del primer curso de Álgebra de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. El análisis se realiza utilizando herramientas del Enfoque Ontosemiótico. A partir del análisis se podría conjeturar que, al momento de la evaluación, los alumnos no tenían construido el significado asociado a la representación geométrica-vectorial dado que no lograron establecer las funciones semióticas necesarias para emplear adecuadamente la mencionada representación.

**Palabras clave:** representaciones semióticas– números complejos – conflictos semióticos – funciones semióticas – Enfoque Ontosemiótico

## 1. Introducción

Este trabajo surge de una investigación cuyo propósito es analizar el uso que hacen los alumnos de los distintos sistemas de representación referentes a los números complejos, que a su vez es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es estudiar la incidencia de las representaciones semióticas en las dificultades en el aprendizaje de la Matemática que se observan en alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Argentina. Desde el punto de vista didáctico, la importancia de las representaciones reside en que, mediante el trabajo con las mismas, se asignan significados y se comprenden las estructuras matemáticas (Radford, 1998). Los obstáculos y conflictos que se generan a partir de su uso y cómo influyen en el aprendizaje constituyen un tema central de análisis que ha sido abordado por numerosos autores desde diversas teorías (Janvier, 1987; Kaput, 1991; Hitt, 2001; Duval, 2004; Radford, 1998; Font, Godino & D'Amore, 2007) y continúa siendo tema de marcado interés para su estudio, dada la complejidad de los fenómenos que involucran.
En el caso de los números complejos, las representaciones semióticas utilizadas pueden clasificarse en dos grupos: las aritmético-algebraicas y las geométricas. Entre las primeras se encuentran la forma de par ordenado, la forma binómica y la forma polar; al segundo grupo pertenecen las representaciones puntual y vectorial. Dichas representaciones condicionan las prácticas matemáticas de las cuales son soporte, por lo cual es fundamental que el alumno pueda interpretarlas y articularlas para poderlas desarrollar competentemente. En particular, el campo numérico de los números complejos tiene aplicaciones en diversas áreas de la Física y la Ingeniería, en las que son necesarios ambos tipos de representaciones.

El objetivo de este trabajo es detectar y analizar los errores que se cometen en el uso de la representación geométrica-vectorial de números complejos y los conflictos semióticos a los cuales están vinculados. El interés de realizar un análisis de errores en el aprendizaje ha sido señalado por diversos autores, considerándolo como parte inseparable de este proceso (Radatz, 1980; Borassi, 1987; Rico, 1995; Pochulu, 2004) y, radica en la posibilidad de caracterizar las regularidades con que se presentan y de construir modelos explicativos, considerándolo como una estrategia valiosa para clarificar dificultades en el aprendizaje matemático y plantear propuestas superadoras.
Para ello se realizó un análisis de las resoluciones de los alumnos en una de las evaluaciones parciales del primer curso de Algebra. En la misma se propusieron dos ejercicios referidos al tema números complejos, uno de ellos ligado a la representación aritmético-algebraica y el otro a la geométrica-vectorial. Los alumnos tuvieron una gran diferencia en el desempeño entre ambos ejercicios, destacándose el bajísimo nivel de resoluciones del asociado a la representación geométrica-vectorial. Esta disparidad fue analizada en otros trabajos; en éste nos hemos focalizado en el análisis de los errores cometidos en este último ejercicio, utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). El mismo permite analizar, de manera conjunta, el pensamiento matemático, los ostensivos[60] que lo materializan, y las situaciones y factores que condicionan su desarrollo.
A continuación se presentan algunos constructos de dicho marco teórico.

## 2. Marco teórico

El EOS considera a la Matemática en su triple aspecto como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. En este marco, una *práctica matemática* se define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino Batanero & Font, 2008).
A partir de este concepto surge la noción de *significado*, definido como “el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas” (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2007, p.7). Para el EOS, la cuestión del significado de los objetos matemáticos es de índole ontológica y epistemológica, puesto que se centra tanto la naturaleza como en el origen de dichos objetos (Godino, Batanero & Font, 2008). En los casos en que el significado se atribuye a un individuo, se considera un *significado personal*, mientras que, si el significado es compartido por un grupo de individuos en el seno de una institución, se lo considera un *significado institucional*.
En este contexto, el aprendizaje supone la apropiación de los significados institucionales por parte del estudiante, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero & Font, 2008). Puesto que no siempre existirá concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se generan diferencias que dan lugar a lo que bajo este enfoque se denomina *conflicto semiótico*. Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

[60] Se entiende por *ostensivos* aquellos objetos que se pueden mostrar a otro directamente.

Plantear el aprendizaje en términos de significados, otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. De esta manera, la función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos que causan equivocaciones en los alumnos no resultan de su falta de conocimientos, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (Godino, Batanero & Font, 2008).
Debido al rol preponderante que juegan los objetos, el EOS considera que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Así, la tipología de objetos primarios, u objetos de primer orden, según Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2007), está constituida por:

- *Situaciones-problemas:* aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios.
- *Elementos lingüísticos:* términos, expresiones, notaciones, gráficos, en diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- *Conceptos- definiciones:* introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función)
- *Proposiciones:* enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos:* algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- *Argumentos:* enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y/o procedimientos (deductivos o de otro tipo)

Las seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados sino que se vinculan entre sí, conformando redes denominadas *configuraciones* (Godino, Batanero & Font, 2008). En los casos en que estas redes se refieren a acciones representativas de la institución y acordes a ella, se denominan *configuraciones epistémicas*. Paralelamente, las *configuraciones cognitivas*, son aquellas que describen los sistemas de práctica personales.
Todos los elementos que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o contenido de funciones semióticas. De este modo, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza relacional de la matemática y amplían el significado de representación.
El EOS destaca el rol que tienen las representaciones en las prácticas matemáticas y en la comprensión de un objeto, ya que la comprensión de un objeto, por parte del estudiante, se manifiesta en su competencia en el sistema de prácticas asociadas al mismo y cada subconjunto de ellas está condicionado por el par objeto/representación.

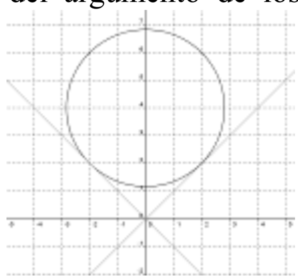
## 3. Metodología

El presente estudio es de naturaleza descriptiva y se ubica en la línea de análisis de errores, en tanto se busca analizar y categorizar los errores cometidos por los alumnos en el uso de la representación geométrica-vectorial de los números complejos. Para este estudio se consideraron las resoluciones de un ejercicio del parcial, planteado en los términos de la representación mencionada, presente en el examen parcial de la asignatura Álgebra de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Al mismo asistieron 135 alumnos se consideraron. Se realizó un análisis cualitativo, utilizando como herramientas las configuraciones epistémica y cognitivas, construidas de acuerdo al EOS, para examinar las soluciones de los alumnos.

A través de la configuración epistémica del ejercicio se describen detalladamente los elementos de primer orden que entran en juego en su resolución, como así también su vinculación con las representaciones y significados asignados mediante funciones semióticas. Dicha configuración epistémico es utilizada para estructurar las configuraciones cognitivas de las resoluciones de los estudiantes. A partir de ellas se determinaron los conflictos semióticos y algunas de las posibles funciones semióticas asociadas.
En la siguiente sección se muestran el enunciado del ejercicio, su configuración epistémica y las principales funciones semióticas involucradas.

## 4. Enunciado y configuración epistémica del problema propuesto

En el ejercicio propuesto se muestran las representaciones gráficas de una circunferencia y de dos rectas tangentes a la misma que pasan por el origen de coordenadas. La circunferencia corresponde a un conjunto B de números complejos expresado por comprensión mediante una condición planteada como ecuación. Se les pregunta a los alumnos acerca de los valores del módulo y del argumento de los elementos del conjunto. Su enunciado es el siguiente:



*A la derecha figura la representación de los números complejos del conjunto* $B = \{z \in C,\ |z-4i| = \sqrt{8}\}$.
*a) Todos los números complejos del conjunto B ¿tienen el mismo módulo? ¿Por qué?*
*b) ¿Entre qué valores varían los argumentos de los números complejos del conjunto B?*

En la Tabla 1 se distinguen los objetos primarios que conforman la configuración epistémica de este ejercicio.

| **OBJETOS PRIMARIOS** | **ESPECIFICACIONES** |
|---|---|
| Situaciones-problema | Enunciado del problema |
| Lenguaje | - Coloquial: figura, complejos, conjunto, módulo, valores, argumentos<br>- Simbólico: $B=\{z \in C,\ |z-4i| = \sqrt{8}\}$<br>- Gráfico: la representación en un sistema cartesiano |
| Definiciones | - Conjunto, pertenencia, módulo, argumento. |
| Propiedades | - Dado un conjunto definido por comprensión a través de una condición, cualquier elemento que pertenezca al conjunto debe satisfacer dicha condición.<br>- Un número complejo pertenece a una circunferencia si su afijo pertenece a la misma. |

| | |
|---|---|
| Procedimie n-tos | - Identificar, gráfica o analíticamente, varios números complejos pertenecientes a B<br>- Identificar los módulos de los números complejos pertenecientes a B.<br>- Identificar los argumentos de los números complejos pertenecientes a B.<br>- Determinar valores extremos del argumento de los números complejos de la gráfica. |
| Argumentos | - Fundamentar la respuesta negativa mostrando casos particulares de elementos de B que tienen distinto módulo.<br>- Fundamentar, con afirmaciones generales que aluden a que todos los afijos de los números complejos del conjunto B, están a la misma distancia del centro de la circunferencia, pero no del origen de coordenadas.<br>- Todos los elementos del conjunto B se encuentran en el sector del plano limitado por las dos semirrectas incluidas en las rectas graficadas. |

Tabla 1. Configuración epistémica del ejercicio propuesto.

A continuación se formulan algunas de las funciones semióticas implicadas en la resolución del Ejercicio propuesto.

| ANTECEDENTE | | CONSECUENTE |
|---|---|---|
| número complejo z | $\xrightarrow{F_1}$ | Vector con origen en (0,0) y extremo en su afijo (a,b) |
| módulo de z | $\xrightarrow{F_2}$ | Distancia del afijo al origen o longitud del vector |
| argumento de z | $\xrightarrow{F_3}$ | Ángulo con lado inicial en el semieje positivo de las abscisas y lado final en la semirrecta que contiene al vector asociado al número complejo. |

La funciones $F_1$, $F_2$ y $F_3$ hacen referencia al *significado institucional* asociado a la representación geométrica-vectorial de un número complejo a+bi, donde los significados de módulo y argumento se derivan del significado de vector. Puede considerarse que, para la correcta resolución de este ejercicio, es necesario haber construido un significado geométrico de los números complejos asociado a esta forma de representación, lo cual implica haber establecido estas tres funciones semióticas.

**4. Resultados y análisis**

De los 135 alumnos que asistieron al parcial sólo 15 resolvieron correctamente el Ejercicio propuesto, 76 presentan una resolución en la que cometieron distintos tipos de errores y 44 no lo resolvieron. El análisis de los errores aquí presentado se efectuó sobre las resoluciones de 76 alumnos, reservando para otras metodologías el análisis de los casos de no resolución.

Si se observan la configuración epistémica y funciones semióticas $F_1$, $F_2$ y $F_3$, puede inferirse que para la resolución del Ejercicio requieren los significados asociados a la representación geométrica-vectorial.

A partir de la elaboración de las configuraciones cognitivas se categorizaron los errores cometidos por los estudiantes y se describieron los conflictos semióticos implicados. A continuación se describen dichas categorías.

- *Errores en las definiciones de módulo y de argumento.*
  Se incluyeron dentro de esta categoría aquellos casos en los que, para analizar tanto el módulo como el argumento de los números complejos pertenecientes al conjunto B, consideran al centro de la circunferencia como origen de sus vectores asociados. En estos casos, la respuesta dada es que tienen módulo constante igual al radio de la circunferencia y argumento que varía entre 0 y 2π.
  Este error sería la manifestación de un *conflicto semiótico* pues el significado que se asigna a dichas definiciones no coincide con el otorgado por las funciones semióticas $F_2$ y $F_3$, anteriormente definidas. Esto pareciera producirse como consecuencia de una diferente asignación de significado vectorial al número complejo z. En lugar de la función semiótica $F_1$ estarían estableciendo la siguiente función semiótica errónea $f_4$:

| ANTECEDENTE | | CONSECUENTE |
|---|---|---|
| número complejo z | $\xrightarrow{f_4}$ | Vector con origen en el centro de la circunferencia a la que el afijo pertenece y extremo en su afijo (a,b) |

- *Error en las definición de módulo y pero no en la de argumento.*
  En estos casos, la respuesta que los alumnos dan es que los números complejos del conjunto B tienen módulo constante igual al radio de la circunferencia y argumento que varía entre los valores correctos (π/4 y ¾π). Aquí se hace evidente un *conflicto semiótico de tipo cognitivo*, pues los estudiantes hacen uso de dos funciones semióticas contradictorias para asignar significado geométrico-vectorial a los números complejos, $f_4$ para responder el ítem asociado al módulo y $F_1$ para el asociado al argumento.
- *Errores causados por la incorrecta identificación de los argumentos asociándolos a raíces enésimas.*
  Los alumnos que incurren en este error respondieron que todos los números complejos que pertenecen al conjunto B tienen el mismo módulo y sus argumentos responden a la fórmula $\frac{\varphi + k.2\pi}{n}$. Aparentemente existe un razonamiento abductivo asociado a la siguiente propiedad: Las raíces enésimas de un número complejo w pertenecen a una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\sqrt[n]{|w|}$ y sus argumentos son de la forma $\frac{\varphi + k.2\pi}{n}$.
  La abducción los conduce a concluir que todos los números complejos que están representados en una circunferencia corresponden al conjunto de raíces enésimas de un número dado. Pareciera que se establece la siguiente función semiótica errónea $f_5$:

| ANTECEDENTE | | CONSECUENTE |
|---|---|---|
| números complejos cuyos afijos pertenecen a una circunferencia | $\xrightarrow{f_5}$ | Raíces enésimas de algún número complejo w. |

- *Error causado por la incorrecta interpretación de la expresión simbólica* $|z\text{-}4i|$.

  A la condición $|z\text{-}4i|$ le atribuyen el significado de $|z|$. Como en la definición del conjunto B se expresa que $|z\text{-}4i|=\sqrt{8}$, interpretan que es "z" quien tiene un módulo constante. Se establece una función semiótica errónea $f_6$:

| ANTECEDENTE | | CONSECUENTE |
|---|---|---|
| $\|z\text{-}4i\|$ | $\xrightarrow{f_6}$ | módulo de z |

## 5. Conclusiones

En este trabajo se exploraron los *significados declarados* de números complejos a través de las funciones semióticas establecidas y de los conflictos semióticos que se manifiestan a partir del uso de la representación geométrica-vectorial. El nivel de resolución observado muestra que una gran proporción de alumnos no pudo emplear correctamente este tipo de representación. Esto permitiría afirmar que, al momento de la evaluación, los alumnos no tenían construido el *significado geométrico pretendido* de los números complejos. Esto lleva a conjeturar que el sistema de prácticas desarrollado en las clases no contempló suficientes actividades pertinentes planteadas en el registro gráfico; esta conjetura plantea la necesidad de futuras indagaciones.

Lo anteriormente expuesto, por un lado confirma lo planteado en el EOS, acerca del condicionamiento de los subsistemas de prácticas a la dupla objeto/representación; por otra parte, plantea, como objetivo de futuras investigaciones, el análisis de las prácticas ligadas a la representación geométrica-vectorial de los elementos de este campo numérico, que se desarrollan en la asignatura. Además, proyecta, como objetivo didáctico el desafío de implementar secuencias de enseñanza que favorezcan la construcción, por parte de los alumnos, de las funciones semióticas que permitan ampliar el alcance de sus prácticas matemáticas.

## 6. Referencias

Borassi, R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. *For the Learning of Mathematics*, 7, 2-9.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Univ. del Valle.

Font, V., Godino, J. D. & D'Amore, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática, en M. J. Alderete y M. L. Porcar (Eds.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas* (pp. 1-20). Mendoza, Argentina: Univ. de Cuyo. Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. & D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics,* 27 (2), 2-7. Disponible en: www.webpersonal.net/vfont/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Disponible en: www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Batanero & C., Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en educación matemática, en Gómez,

P. Y Rico, L. (Eds.): *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática*. Homenaje al Profesor Mauricio Castro. Granada. Editorial Universidad de Granada.

Janvier, C. (ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as Mediators of Constructive Processes. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 35 (4). Disponible en: www.campusoei.org/revista/deloslectores/849Pochulu.pdf.

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics,* 1(1), 16-20.

Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia Pedagogica Experimentalis, 35*(1), 277-302. Disponible en: www.laurentian.ca/NR/rdonlyres/BD762C3F-3C8D-4D51-A91F-6648A04A626C/0/signs_and_rep.pdf Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (Eds.). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.