

ACCIONES DE VALIDACIÓN: UN ESTUDIO DE CASO EN ESCUELA MEDIA

Falsetti, Marcela; Lugo, Javier
Universidad Nacional de General Sarmiento
mfalsetti@ungs.edu.ar jlugo@ungs.edu.ar

Resumen

Se reporta una investigación exploratoria, realizada en un curso de una escuela de nivel secundario superior, para conocer la actuación de los alumnos en validación frente a actividades diseñadas con el propósito de que vencieran la resistencia a incorporar formas propias de la validación en Matemática y desarrollaran una actitud de prueba Brousseau (1995). Las actividades que analizamos aquí se refieren a funciones exponenciales y logarítmicas.

Se estudiaron acciones puestas en juego para presentar lo producido, confrontarlo y defenderlo en el ámbito social de la clase (Falsetti y otros, 2004), de acuerdo a garantías elaboradas según ciertas normas consensuadas por el colectivo o bien institucionalizadas por el profesor (Balacheff, 1987).

No obstante haber mantenido la experiencia por un tiempo prolongado, el estudio muestra fuerte resistencia de los alumnos a controlar, confrontar y defender sus producciones según requerimientos disciplinares de la Matemática.

Palabras clave: validación en Matemática; prueba matemática; acciones de validación.

1. Introducción

En este trabajo reportamos una investigación realizada con un grupo de alumnos de una escuela del conurbano bonaerense de nivel secundario superior cuyo objetivo fue conocer sobre la actuación de los alumnos frente a situaciones que invitaran a validar, por lo que se realizó una indagación exploratoria sobre la presencia y frecuencia de acciones involucradas en el proceso de validación.

La validación es, en general, una actividad científica y técnica por la cual se elaboran las garantías de que el conocimiento, producción o procedimiento construidos cumplen con las especificidades y requerimientos institucionales que pueden ser de tipo técnico, de tipo funcional o de rigor y formalismo. Mediante esta actividad el saber y el saber hacer individual o personal se acercan al institucional⁴⁶ (sea el escolar o el científico) y además se ejerce un control sobre la producción personal en el sentido de que se busca la manera de corroborar que lo realizado sea correcto. La validación matemática es un proceso que comprende la prueba y la demostración matemáticas.

La enseñanza y el aprendizaje de la prueba y la demostración matemáticas están en el centro de la escena de los estudios didácticos, basta observar que la conferencia del

⁴⁶ El término "institucional" es usado aquí en el mismo sentido con el que lo utilizan autores como Chevallard (1999), Gascón (1998) y Díaz Godino (1994). Se entiende por institución matemática al conjunto de intereses, actuaciones, paradigmas, reglas explícitas, producciones, lenguaje, saberes formales y hábitos informales, organizados para una función específica que puede ser producir, enseñar o utilizar la disciplina. Los componentes mencionadas son relativamente estables y regulan la producción de los saberes de esta disciplina en un contexto social y cultural determinado. Por eso se realiza la diferenciación entre institución matemática científica y la escolar. La institución matemática no tiene límites ni geográficos ni temporales y, como otras instituciones, está integrada por personas con diversos grados de pertenencia, injerencia y participación.

“International Comitee of Mathematical Instruction” (ICMI) del 2009 fue dedicada a estos temas (*Study 19: Proof and Proving in Mathematics*).

El estudiante en general confía sin cuestionamientos en el saber matemático presentado ya sea a través del discurso del profesor, de los textos o del visor de una computadora o calculadora. Está más interesado en entender los mecanismos de funcionamiento que en las argumentaciones o la estructura lógica o teórica que permiten dar cuenta del porqué de dicho funcionamiento. Con el fin de estudiar las posibilidades de superar este “reduccionismo” del aprendizaje de la Matemática, encaramos esta investigación pues consideramos importante tener información sobre la actuación de los estudiantes cuando en la clase se promueve la validación matemática.

2. Marco Teórico.

Como bien señala Brousseau (1995), para aprender a validar matemáticamente es necesario vencer la resistencia a incorporar formas propias de la validación en Matemática y desarrollar una actitud de prueba. Según este autor esto se logra transitando por una situación de validación, la cual, en relación con la de acción y la de formulación, debe incentivar al estudiante a defender su producción ante pares, así como también interpelar la de ellos.

Para conceptualizar los procesos y producciones involucrados en la validación en Matemática, nos basamos en trabajos de Arsac (1992), Duval (1999), Balacheff (2000) y Alagia (2005). A partir de ellos interpretamos que en la base de la validación se encuentra la “explicación” que es el discurso que hace inteligible para otro sujeto un hecho, el resultado de una experiencia, una definición, un procedimiento, etc. Cuando la explicación toma el rol de convencer a otro y se dan razones del porqué de ese hecho, resultado, aseveración, etc., la consideramos como “argumento”, que es utilizado para justificar o refutar una producción. Cuando las explicaciones y los argumentos son aceptados por la comunidad a la que va dirigida, toman status de “prueba”, esto exige que las razones dadas trasciendan el nivel subjetivo, que sí puede tener el argumento, y se basen en normas, prácticas, terminología, etc. instituidas en esa comunidad. Si las pruebas respetan una cierta estructura deductiva estamos frente a una “demostración matemática”, que consta de un cierto número de enunciados que son aceptados como verdaderos (axiomas o propiedades ya validadas) y otros que se deducen de éstos (teoremas) a partir razonamientos lógicos.

Para validar, el estudiante debe apropiarse de recursos técnicos y competencias argumentativas que permitan defender su producción en un ámbito social y apropiarse del sistema externo, de símbolos, principios y prácticas, para confrontar su conocimiento personal con el institucionalizado. En la validación convergen las dimensiones discursiva, epistémica, lógica, simbólica y la “heurística”, que es la más personal de las dimensiones, que se refiere a cómo los individuos actúan particularmente para estructurar las garantías institucionales del conocimiento producido haciendo uso de los conocimientos de cada una de las dimensiones anteriores.

Uno de nuestros propósitos con este trabajo es entonces conocer estas formas personales o *heurísticas* del proceso de validación que debiera ir aproximando al estudiante a un proceso de validación más cercano al que la “institución matemática” pretende para garantizar que su conocimiento personal es válido por cuanto hay una teoría matemática capaz de explicarlo y solventarlo por intermedio de razonamientos lógicos. Esto está relacionado con lo que Balacheff considera como proceso de validación (Balacheff,

1987) el cual “consiste en asegurarse las garantías necesarias de un compromiso en la acción; en este caso la acción de decidir sobre la verdad de una aserción”. Según Balacheff, se entiende que el proceso de validación es todo aquello que se genera y manifiesta dentro de una situación de validación. Forman parte de este proceso cuestiones como: la toma de conciencia de las contradicciones, la elaboración de pruebas de distinto tipo, la argumentación y la refutación como parte de la misma, etc. También está relacionado con los esquemas empíricos de prueba introducidos por Sowder y Harel (1998).

Retomando los *procedimientos heurísticos* de la validación, decimos que son las acciones que hemos identificado a través del análisis de las producciones de los estudiantes y de sus respuestas en la clase (Falsetti y otros, 2004, Barreiro y otros (2009)): En este trabajo nos referiremos a ellas por lo que las enunciamos a continuación:

A1 Hacer ensayos o intentos / A2 Usar fórmulas, definiciones o procedimientos desconectados de la actividad a resolver / A3 Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados a la actividad a resolver / A4 Identificar alguna regularidad a partir de una cierta cantidad de casos particulares. / A5 Enunciar ambigüedades / A6 Ejemplificar / A7 Anticipar, predecir / A8 Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección / A9 Encontrar analogías o similitudes / A10 Describir (mostrar pasos y procedimientos) / A11 Ejemplificar mostrando regularidades / A12 Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento) / A13 Explicar (dar razones y relaciones) / A14 Comparar (establecer semejanzas y diferencias) / A15 Justificar por la “autoridad” (libro, docente, par experto) / A16 Reconocer contradicciones / A17 Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen / A18 Enunciar la negación de una regla, propiedad, etc. / A19 Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas / A20 Derivar conclusiones con premisas dadas / A21 Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y deriva una conclusión) / A22 Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez) / A23 Apelar a un registro semiótico para validar lo producido en otro.

3. Contexto y diseño del dispositivo didáctico

3.1 La escuela y la clase.

La investigación fue realizada con el grupo de quinto⁴⁷ año de la secundaria, de veinte alumnos, en una escuela situada en la ciudad Santa María⁴⁸, con orientación en Humanidades y Ciencias Sociales. Una particularidad de esta institución es que los alumnos mantienen su escolaridad en ella, conservando el grupo de alumnos durante toda la trayectoria escolar.

Entre las características principales de este curso mencionamos que en toda su formación matemática no habían tenido la práctica de justificar sus producciones, sino que las actividades trabajadas se correspondían con un hacer más mecanizado que reflexivo. Para los estudiantes ésta fue su primera experiencia con resolución de problemas en pequeños grupos; para ellos una clase de matemática tipo consistía en una práctica en la cual el docente exponía los contenidos, ejemplificando según fuese

⁴⁷ Penúltimo año de estudios secundarios.

⁴⁸ Perteneciente al partido de San Miguel, Buenos Aires.

necesario para luego dar espacio y tiempo a que los alumnos resolvieran los ejercicios con procedimientos similares a los mostrados.

En nuestra investigación, el docente no sólo fue el encargado de observar y registrar lo sucedido al interior de los grupos de trabajo sino también de gestionar la clase, de poner en acción las actividades y de reformular las siguientes de acuerdo a la implementación anterior. Características que son parte de una investigación-acción. La experiencia se desarrolló durante un semestre (cuarenta clases) aunque en este trabajo reportamos los resultados obtenidos en las últimas veinticinco. Es decir que los alumnos ya conocían la dinámica de trabajo pues así habían estudiado el tema antecedente (función cuadrática). La observación del docente estuvo orientada mediante una grilla en la cual se registraba la frecuencia con la que emergía cada acción de validación y se tomaban algunas notas sobre aspectos cualitativos que luego se ampliaban inmediatamente después de la clase. Para el análisis cualitativo se eligió una muestra representativa formada por seis alumnos, quienes presentaban diferencias en cuanto a sus habilidades, competencias, y dificultades en Matemática, de forma tal de conformar un grupo heterogéneo y así enriquecer el análisis.

3.2 Sobre las actividades para la clase.

3.2.1 Criterios para un diseño que favorezca la validación.

En diferentes trabajos sobre el aprendizaje de la demostración (ver por ejemplo Duval 1999, Hanna, 2000), se plantea la posibilidad de acceder a dicho aprendizaje mediante actividades que abrirían vías facilitadoras como la exploración, la explicación, la argumentación, la visualización, la conjeturación. Un ejemplo de las relaciones que se han tratado de establecer entre estas actividades y la demostración está dado en el trabajo de (Garuti y Boero, 1998) donde se plantea la noción de “unidad cognitiva” entre la conjeturación y la demostración, lo que llevaría a la hipótesis de que un proceso de exploración y conjeturación en donde se ponen en juego relaciones que resultan fundamentales en la construcción de la demostración, facilitarían una elaboración de la misma. Lo que no nos resulta evidente, a partir de las investigaciones realizadas, es que dicha unidad sea siempre realizable y qué hacer, desde la enseñanza, para que la misma tenga lugar.

En relación con lo expuesto en el párrafo anterior, hemos extendido estas características enunciadas para el aprendizaje de la demostración a la práctica de la validación y elaboramos las actividades teniendo en cuenta los siguientes criterios generales: a) que presentaran un desafío, para el grupo de estudiantes descrito; b) que el alumno estuviera en contacto con algunos aspectos del contenido antes de que éste fuera presentado y organizado por el profesor; c) que diera lugar a la exploración y en la medida de lo posible a la conjeturación; d) que en ellas se trabajaran distintos registros semióticos y que los mismos se relacionaran entre sí; e) que la elaboración de razones esté ligada a la toma de decisiones para que responda a una necesidad del alumno y no una exigencia del profesor; f) que pudieran realizarse en equipos promoviendo la discusión y el intercambio g) que pudieran, en conjunto, barrer la mayor cantidad posible de acciones de validación.

3.2.2 Análisis a priori

El análisis fue realizado por los miembros del equipo de investigación, y consistió en anticipar las posibles acciones de validación (ver marco teórico) que cada ítem permitiría desarrollar en la puesta en acto de las actividades. En función de ello, se

confeccionó la planilla que, en conjunto, nos resultó fundamental para orientar y agudizar la observación y el registro de lo que sucedió en la clase, ya que el profesor debía estar atento no sólo a las respuestas y su registro, sino también a la gestión de la clase. Cabe aclarar que si el profesor notaba que surgía alguna conducta que tuviera relación con la validación que no estaba prevista, también tomaba nota de ella para luego incorporarla al análisis. Se diseñaron e implementaron veintidós actividades, de las cuales diecisiete contenían cuestiones de validación. En ellas fueron identificadas un promedio de tres acciones de validación.

4. Análisis de Actividades

4.1 Análisis cuantitativo

A continuación exhibimos las tablas correspondientes a cada acción estudiada durante la implementación. Contabilizamos las ocurrencias según lo manifestado en la clase y luego corroborado en los apuntes escritos de los alumnos. Dichas manifestaciones se contabilizan cuando responden lo esperado, o sea lo matemáticamente correcto. Las siguientes tablas presentan las actividades en la que se manifestó cada acción y su porcentaje de frecuencia.

A3 Cuestiones conectadas con la actividad	Act. 1	Act. 3	Act. 9	Act. 15	A7 Justificar por anticipación	Act. 1	Act. 7	Act. 10	Act. 17	Act. 18						
Manifestación	0%	50%	15%	50%	Manifestación	10%	15%	45%	15%	10%						
A4 Generalizar inductivamente	Act. 1	Act. 7	Act. 11	Act. 12	A9 Justificar por analogías	Act. 8	Act. 9	Act. 19	Act. 20							
Manifestación	40%	20%	25%	5%	Manifestación	45%	40%	45%	45%							
A11 Ejemplificar	Act. 7	Act. 8	Act. 10		A10 Describir mostrando regularidades	Act. 1	Act. 2	Act. 3	Act. 12	Act. 15	Act. 17					
Manifestación	40%	20%	25%		Manifestación	0%	40%	30%	55%	20%	60%					
A17 Reconocer la adecuación	Act. 2	Act. 4	Act. 5	Act. 8	A14 Establecer semejanzas	Act. 13			A15 Justificar por autoridad	Act. 4						
Manifestación	90%	65%	25%	65%	Manifestación	25%			Manifestación	10%						
A13 Explicar dando razones	Act. 1	Act. 3	Act. 4	Act. 5	Act. 7	Act. 8	Act. 9	Act. 10	Act. 11	Act. 12	Act. 13	Act. 14	Act. 15	Act. 17	Act. 18	Act. 19
Manifestación	30%	50%	30%	75%	25%	65%	50%	50%	10%	0%	25%	25%	35%	70%	65%	30%
A23 Justificar un registro semiótico con otro	Act. 1		A19 Identificar condiciones	Act. 13	A20 Derivar conclusiones	Act. 4		A8 Elegir justificadamente	Act. 5							
Manifestación	10%		Manifestación	25%	Manifestación	10%		Manifestación	75%							

Las tablas de arriba muestran una gran fluctuación en la apropiación de las acciones de validación para diferentes actividades en la mayoría de los casos lo cual se evidencia en la acción de explicar, la más presente en las actividades. Las acciones que consideramos mejor desempeñadas, por su regularidad y frecuencia, son las justificaciones por analogía, la ejemplificación mostrando regularidades y el reconocimiento de la adecuación de lo realizado en relación con lo requerido y la elección de forma justificada.

Por otra parte, se muestran acciones con poca frecuencia pero manifestadas en varias actividades, como son anticipar, describir y generalizar. Estas acciones fueron desarrolladas por los alumnos que presentaron un buen desempeño.

4.2 Análisis cualitativo

Si bien se hicieron los análisis de los comportamientos de los alumnos de la muestra en todas las actividades, sólo exhibimos una de ellas. Nombramos a los alumnos AL1 y AL2, de buen desempeño, AL3 y AL4, de desempeño medio, AL5 y AL6, de desempeño bajo.

Actividad 1	Un laboratorio se dedica al trabajo con cultivos de bacterias para el desarrollo de vacunas. En todos los casos, se comienza el estudio con una única bacteria. En este momento se está desarrollando la vacuna para la Enfermedad A para lo cual se necesita un cultivo con 250.000 bacterias.			
Objetivos:	los casos, se comienza el estudio con una única bacteria. En este momento se está desarrollando la vacuna para la Enfermedad A para lo cual se necesita un cultivo con 250.000 bacterias.			
a) Reconocer y manipular la relación exponencial entre variables	a) Un grupo de científicos (G1) generó las condiciones de un cultivo de tal manera que las bacterias se reproducen duplicándose por cada hora que transcurre. Se afirma que luego de 1 día es posible fabricar el suero. ¿Ud. Estaría de acuerdo con esta afirmación? Si la respuesta es afirmativa mencione por qué; en caso contrario, determine qué argumentos utilizaría para exponer, ante los demás colegas, su punto de vista.			
b) Comparar comportamiento s exponenciales.	b) Otro grupo de científicos (G2) logró generar un cultivo en donde las bacterias se triplican pero empezaron el estudio 7 horas después de que lo hiciera G1. Si al cabo de un día, usted tuviera que decidir por uno de los dos cultivos, ¿Con cuál se quedaría? Determinar por escrito cuáles son las razones por las cuáles opta por G1 o G2.			
	c) Decidir si es posible encontrar un lapso (intervalo de tiempo) en el cual sea más conveniente el procedimiento G1 y si es posible encontrar un lapso en el cual sea más conveniente el procedimiento G2. Dar una respuesta antes de ponerse a hacer cuentas.			
Acciones de validación previstas	A3 Cuestiones conectadas con la actividad	A7 Anticipar, predecir		A10 Describir
Análisis previo	Ítem a, b: Se espera que los alumnos expliquen cómo arriban a un valor aproximado usando propiedades de la potencia.	Ítem c: Se espera que los alumnos puedan anticipar que el crecimiento de la función exponencial en base 3 es más rápido que el de la función exponencial en base 2 y de esta manera, justificar qué procedimiento es más conveniente.		Ítem a, b: Se espera que los alumnos describan cómo buscan las potencias de 2 hasta obtener un valor aproximado a 250.000. Ítem c: Si encuentran algún valor aproximado que indica los lapsos, dice cómo lo encontró numéricamente.
Acciones de validación manifestadas	A4 Generalizar inductivamente	A7 Anticipar, predecir	A13 Explicar	A23 Justificar con otro registro
Análisis cuantitativo	8	2	6	2

A continuación se destallan aquellos aspectos que amplían la información de la tabla anterior:

Dos acciones de validación se manifiestan con un 10%, A23 y A7. En cuanto a la primera de ellas, AL1 utiliza el gráfico cartesiano que construyó de las dos situaciones, no sólo para justificar su elección hacia el Grupo 1 por sobre el Grupo 2, sino para sostener que existe un punto de quiebre entre la predominancia de uno sobre el otro. Desarrollar esta capacidad para manipular y decidir sobre el uso de uno u otro registro semiótico permitiría fortalecer este tipo de justificación, quizás más usual en los alumnos. Por otra parte, que sólo un 10% de los alumnos hayan podido anticipar los crecimientos de los cultivos en comparación, da cuenta de la dificultad que presentan para prever la situación sin otras herramientas, como por ejemplo podría ser el gráfico. En cuanto a la acción de explicar, los alumnos AL1, AL2 y AL3 respondieron afirmativamente al ítem c justificando la existencia de cada intervalo con la información que obtuvieron del enunciado, mencionando que al inicio G1 es más conveniente porque comienza su estudio antes, pero que como en G2 crecen con mayor rapidez, en algún momento va a superar la cantidad de G1. Vemos cómo una buena interpretación de la información presente en el problema funciona como una herramienta de

justificación. Otro ejemplo de esto puede apreciarse con la acción A4, en donde los alumnos reconocen que las cantidades de G_1 y G_2 son potencias de dos y tres respectivamente, justificando a partir de las consignas.

5. Conclusiones

En general, pareciera que en el curso no se logró vencer la resistencia de incorporar formas

propias de validación en Matemática (Brousseau, 200), salvo en los estudiantes más destacados, quienes desarrollaron todas las acciones de validación anticipadas en el análisis a priori de las actividades e incluso fueron aquellos que pudieron anticipar en varias de las oportunidades.

En función de los resultados del análisis cuantitativo no nos queda claro si ¿puede darse por concluida la enseñanza de algún aspecto de validación a partir de un número considerable de actividades? Parecería ser que el hecho que uno promueva ciertas acciones de validación en muchas actividades y que los alumnos logren desarrollarlas en ellas no significa que adquieran independencia y ejercicio en esa acción en las siguientes actividades. Sin embargo, a partir del análisis cualitativo observamos que aquellos alumnos que mantienen un buen desempeño a lo largo de todo el proceso son aquellos que lograron adquirir autonomía en las acciones que se esperaban desarrollar.

Por otra parte, en una entrevista personal con los alumnos de la muestra, expresaron la dificultad en resolver problemas y mantener una conducta tendiente a dar razones y explicaciones de lo que hacían. Esto junto con los valores obtenidos en el análisis cuantitativo da cuenta de la dificultad que existe en revertir la enseñanza tradicional centrada en la práctica mecanizada. Ciertamente, resulta difícil romper con una forma de trabajo muy radicada en los alumnos a lo largo de toda su trayectoria escolar. Sin embargo, afirmamos junto con Sowder y Harel (1998) que la matemática escolar debe reconocer no solo los resultados sino la validez de los argumentos que se centran en el “por qué” de los mismos y, para ello, se deben fomentar situaciones que lo permitan desde los primeros años de la escuela secundaria.

6. Bibliografía

1. Alagia (2005), Razonamiento y demostración; Conferencia de la REM, Salta, 2005. Disponible en www.unionmatemática.org.ar/reunión_anual/reunión05/conferencias05_conferencia_Alagia.doc
2. Arsac y otros (1992). Iniciación al razonamiento deductivo en el Colegio; Capítulo 1: ¿Cómo abordamos el problema? Disponible www.redcimates.org.mx/Documentos/Resumenes.pdf.
3. Balacheff (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemática. Disponible en www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/5toCIEMAC/Ponencias/GEOGEBRAenlaresoluciondeunproblema.pdf
4. Balacheff, N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. 18 (2), 147-176.
5. Balacheff (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemática. Disponible en www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/5toCIEMAC/Ponencias/GEOGEBRAenlaresoluciondeunproblema.pdf

6. Brousseau, G (1995); Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publisher.
7. Chevallard, Y. (1992); Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.
8. Duval, R. (1999) “Algunas cuestiones relativas a la argumentación”. *La lettre de la Preuve*. Nov/Dic. Disponible en <http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html>
9. Falsetti, M. Rodríguez, M., Marino, T. (2004) Validación en Matemática en situación de aprendizaje, *Memorias del VI Simposio de Educación Matemática*. Sagula, Ed...Univ. Nac. de Luján - Edumat. mayo 2004. (Formato CD)
10. Godino J. D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3): 325-355. [Institutional and personal meaning of mathematical objects. *Journal für Mathematik-didaktik*, 1996, 99-121
11. Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. *Research on Collegiate Mathematics Education*, Vol. III. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), AMS, 234-2