EXPLORACIÓN DE FORMAS LÓGICAS Y DEDUCCIONES ANALÍTICAS DE ESTUDIANTES PREUNIVERSITARIOS EN MATEMÁTICA.

Marcela C. Falsetti; Marisa Alvarez
Universidad Nacional de General Sarmiento
mfalse@ungs.edu.ar; marisa.alvarez@ungs.edu.ar

Resumen
Presentamos algunos avances realizados en el marco de un estudio exploratorio sobre aprendizaje de aspectos formales en Matemática llevado a cabo en comisiones del Curso de Apretamiento Universitario en la UNGS. El estudio fue de tipo cualitativo, consistió en la identificación, análisis e interpretación de manifestaciones lógico-formales de los estudiantes a partir de lo expresado por ellos en el ámbito de la clase y de lo expuesto en producciones escritas. Nos referiremos particularmente aquí a: a) La refutación, b) La elaboración de cadenas deductivas, c) la deducción analítica, d) La determinación del valor de verdad de una proposición compuesta y e)la pertenencia a una clase.

Palabras clave: Formas lógicas, refutación, inferencia deductiva, deducción analítica.

1. Introducción
Mientras en la presentación del saber matemático experto los discursos, razonamientos y la exposición de razones y garantías del saber producido se soportan en reglas lógicas, es sabido que en el aprendizaje de la Matemática, la estructuración del pensamiento y del discurso no sigue necesariamente dichas reglas por esto exploramos cuáles son las manifestaciones formales que involucran aspectos lógicos de un grupo de estudiantes del Curso de Apretamiento Universitario (CAU) de la Universidad Nacional de General Sarmiento y cómo éstas se presentan cuando validan sus producciones. El estudio fue de tipo cualitativo, consistió en la identificación, análisis e interpretación de manifestaciones lógico-formales de los estudiantes a partir de lo expresado por ellos en el ámbito de la clase y de lo expuesto en producciones escritas.

2- El contexto donde se hizo el estudio.
2.1. El Curso de Aprestamiento Universitario
El Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) es un curso obligatorio para ingresar a todas las carreras que ofrece la Universidad Nacional de General Sarmiento. Está compuesto por tres asignaturas: Matemática, Taller de Lectoescritura y Taller de Ciencias.
La asignatura Matemática busca profundizar y resignificar los contenidos abordados en el nivel secundario: números reales, álgebra, nociones de geometría y funciones numéricas. El trabajo en el aula se desarrolla mediante actividades propuestas para todas las comisiones en un material impreso. La propuesta didáctica considera que un estudiante aprende Matemática cuando es capaz de realizar "actividad matemática" en torno a los problemas matemáticos que se le presentan, es por esto que la secuencia de cada clase se caracteriza por plantear situaciones problemáticas. De acuerdo con la propuesta didáctica, el profesor propone resolver diversos problemas promoviendo el trabajo individual y grupal en pequeños grupos, orienta el desarrollo del trabajo y luego realiza una puesta en común.

2.1.1. El perfil del grupo de estudiantes

Los estudiantes de edades entre los 18 y los 30 años en promedio, provienen de distintas escuelas de la zona de influencia de la universidad, tanto estatales como privadas. La experiencia formativa previa es muy heterogénea, algunos alumnos se encuentran cursando el último año de la escuela secundaria, otros finalizaron el nivel medio hace mucho tiempo y otros cursaron el secundario para adultos. En general, asisten a las clases y trabajan con las actividades propuestas en las mismas, sin embargo muy pocos realizan las actividades que se proponen de tarea domiciliaria.

3. Marco teórico.

En Matemática la forma de validar la producción, es decir de garantizar que los resultados de la misma cumplen con requisitos prefijados por la comunidad de práctica científica, tiene formatos bastante rigurosos (Godino y Recio, 2001). El aprendizaje de las pruebas matemáticas que validen lo producido, tanto entenderlas como realizarlas, es un asunto importante en la Educación Matemática (ICMI 2009); uno de los puntos álgidos de este aprendizaje es la adquisición y comprensión de las operaciones lógicas, de su aplicación y su alcance. Para relevar los aspectos matemáticos más formales de lo presentado por los alumnos que ingresan a la universidad cuando explican por qué lo que realizan es correcto o cómo llegan a una conclusión, introducimos la noción de *construcción formal*, con la que nos referimos: a) o bien a una elaboración discursiva o simbólica (con símbolos o registros matemáticos) donde se pone de manifiesto alguna "forma lógica", entendidas éstas como "los modos de construcción, expresión y enlace de pensamientos (y partes del pensamiento) de contenido concreto distinto"[85], b) o bien a un procedimiento algebraico sobre una expresión simbólica del cual se deriva otra expresión simbólica cuyo contexto semántico es una propiedad (por ejemplo: si a partir de la manipulación de una ecuación el conjunto solución es el conjunto referencial, entonces se concluye que las expresiones algebraicas igualadas inicialmente son equivalentes en dicho conjunto), una relación entre objetos o una fórmula de cálculo (por ejemplo: la sucesión de transformaciones algebraicas de la que se deriva la fórmula de cálculo de las raíces de una expresión cuadrática). Los procedimientos correspondientes al ítem b) los llamaremos deducciones analíticas. También llamamos construcción formal a aquella que combine lo enunciado en los ítems anteriores. De lo dicho anteriormente se infiere que las construcciones formales se caracterizan porque se expresan en alguno, o varios, de los registros semióticos matemáticos (tablas, símbolos algebraicos, ejes cartesianos, etc.) y porque conllevan alguna de las funciones cognitivas asociadas (Duval, 2001): la formación de la representación, la traducción de una representación a otra, la conversión de un registro a otro o tratamiento en el mismo registro. Para precisar las construcciones formales que identificamos, nos basamos en los trabajos de Campistrous (1993), sobre procedimientos lógicos del aprendizaje, de Valdes (1989) y Gutiérrez (on line), sobre lógica elemental y sistemas de deducción natural.

En relación con las formas lógicas en las construcciones formales, nos abocaremos en este trabajo a las inferencias deductivas, las refutaciones y las proposiciones compuestas. De estas últimas nos interesa particularmente la determinación del valor de verdad.

---

[85] Diccionario soviético de Filosofía

Las inferencias deductivas

- Inferencia inmediata: Es aquella conclusión que proviene de la aplicación de una regla de inferencia del “sistema de deducción natural” (Valdés, 1989; Gutiérrez, on line) que consta de ocho reglas básicas agrupadas en reglas de Implicación, de Conjunción, de Disyunción y de Negación. Entre estas formas lógicas, particularizamos: el reconocimiento de pertenencia a una clase, que se trata de una inferencia inmediata de Implicación pues: sabiendo que si un objeto posee ciertas características pertenece a una clase, al dar un objeto determinado, si se comprueba que éste posee dichas características entonces pertenece a la clase que las mismas definen.
- Cadenas deductivas: Aquéllas que se obtienen a partir de una concatenación de las reglas de arriba.

Las refutaciones

Si bien las refutaciones pueden ser analizadas por las reglas básicas de inferencia, queremos darle una entidad aparte por la importancia que tienen en el razonamiento matemático. Dentro de esta categoría incluimos a: el contraejemplo, el reconocimiento de la contradicción y la reducción al absurdo.

Las proposiciones compuestas.

Una proposición es compuesta cuando resulta de combinar otras proposiciones mediante los conectores lógicos de conjunción (□), disyunción inclusiva (□), implicación (→) y negación (¬) bajo ciertas reglas sintácticas (por ejemplo, el conector de conjunción es de tipo binario y siempre va entre dos símbolos que representen proposiciones: p□q). Hay otros conectores lógicos pero estos pueden ser expresados como una combinación de los cuatro enunciados.

3. Metodología de trabajo.

Nos abocamos a identificar y analizar las construcciones formales más usuales en el tratamiento propuesto en nuestro ámbito de las matemáticas preuniversitarias, en los temas función lineal, polinómicas y exponenciales. La metodología fue de tipo cualitativa, se basó en los datos obtenidos por: a) observación directa y participante del docente, b) producciones escritas de los estudiantes (tareas y exámenes). Para orientar la observación para cada clase se realizaba una cuidadosa planificación y análisis de las actividades a trabajar sobre la base del material del curso identificando las construcciones formales que se podían manifestar en la realización de dichas actividades y si era necesario, se realizaban algunas modificaciones para activar el uso de las mismas. Luego, en una planilla semiestructurada se registraba cuántos estudiantes hacían uso de cada construcción formal identificada y en algunos casos se especificaba el modo que en la misma se evidenciaba. También se estaba alerta para tomar nota de otras formas lógicas no previstas que pudieran surgir en el momento. El análisis previo de las actividades también estuvo presente cuando se analizaron las producciones escritas de los alumnos. Posteriormente se procedió al análisis de los datos tratando de interpretarlos estableciendo relación con lo anticipado y a la luz del marco teórico.

4- Análisis de algunos casos

A continuación se presenta el análisis correspondiente a algunas de las construcciones formales mencionadas.

5.1 La refutación

Consigna: Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar la elección

El conjunto imagen de la función $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-3$ es el intervalo $[-3;+\infty)$.

Respuesta del alumno: Falso. Probé reemplazando y por -3 ya que está incluido en el conjunto imagen $[-3;+\infty)$.

$$-3=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-3 \Rightarrow 0=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 0=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

Pero… $\frac{1}{3}$ elevado a ningún número da como resultado “0”.

Imagen 1. Ejemplo de refutación

La imagen 1 muestra un caso de reducción al absurdo. El estudiante decidió que la proposición era falsa mediante el reconocimiento de una contradicción. Para provocarla, distinguió un elemento que determinó la falsedad del enunciado: el -3. Suponiendo que el conjunto imagen era el indicado, el -3 debería haber satisfecho la definición de imagen, luego debería haber existido un valor real de modo que se satisfaciera la ecuación exponencial planteada. Usando características esenciales de la exponencial, la ecuación resultó irresoluble. Este tipo de deducciones es muy poco frecuente entre los estudiantes. El abordaje más frecuente fue graficar la función y determinar, mediante observación del gráfico, el conjunto imagen. Luego compararon lo obtenido con el conjunto propuesto en la consigna para determinar que lo enunciado era falso. Es decir que compararon un conjunto, resultado de un procedimiento que saben aplicar pero poco fiable, con otro conjunto dado como dato (el supuesto conjunto imagen) y el criterio de decisión es la no igualdad entre ellos. La diferencia entre los procedimientos utilizados radica en que el primer estudiante comprende los cuantificadores que intervienen en la definición de conjunto imagen (para todo elemento perteneciente al conjunto imagen existe un elemento del dominio relacionado con él mediante la fórmula dada) y en la selección del elemento adecuado para arribar al absurdo. Por otro lado, los registros manipulados en uno y otro caso no son los mismos, en el primer caso es simbólico y en el segundo es gráfico. De todos modos, en el segundo caso, los argumentos utilizados son pertinentes y ofrecen garantías suficientes para una comunidad de producción (podría ser en este caso el aula) que acepta al registro gráfico como fiable.

5.2 La deducción analítica

5.2.1 Un caso con función lineal. Analizamos la actuación a partir de la situación siguiente que fue presentada a los estudiantes luego de haber realizado un problema de conversión de precios donde se aplicaban las propiedades de la función proporcional numéricamente.

Consigna: Dada $f: R \rightarrow R, f(x)=mx$,

Escribir en símbolos cómo se encuentra el correspondiente de una variable x_1.
¿Cuál es desarrollo analítico que permite verificar que: "El correspondiente de la suma de dos valores es la suma de los correspondientes de cada uno de ellos."? Encontrar en el problema los cálculos en los que se trabaja con esta propiedad.
¿Cuál es el desarrollo analítico que permite verificar que: "El correspondiente del producto de dos valores es el producto de un valor y el correspondiente del otro."? Encontrar en el problema los cálculos con los que se trabaja con esta propiedad.
De los 33 estudiantes observados, sólo dos atinaron a escribir simbólicamente $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ traduciendo sólo el enunciado dado y como no lo relacionó con la expresión funcional dada, no continuó la deducción. Otro escribió $f(x_1+x_2)=m(x_1+x_2)$ pero no continuó con la deducción. En la puesta en común se les presentaron las dos expresiones y se les pidió que elijan cuál de ellas les parecía correcta. Observaron por sus medios que mediante la propiedad distributiva se podía continuar desarrollando la segunda expresión para obtener la primera. Todos identificaron fácilmente dónde se utilizó esta propiedad. La segunda condición $f(kx)=kf(x)$ fue deducida sin dificultad.
<u>5.2.2 Un caso con función polinómica.</u> En *Imagen 2* el alumno realizó un gráfico de una función polinómica que cumpliera con la condición de positividad pedida. Además de las raíces que obtuvo por la manipulación algebraica y de acuerdo a los datos, infirió que -1 era raíz. Luego manipuló la expresión polinómica para encontrar el factor al cual impondría la condición que -1 fuera raíz. Usó la fórmula resolvente para la ecuación cuadrática y al igualar a la pretendida raíz -1, obtuvo el parámetro.
El hecho que comprobara que el valor obtenido satisficiera que -1 es raíz doble nos hace pensar que entiende la relación entre la condición de multiplicidad de la raíz y el conjunto de positividad solicitado, aunque no fuera explicitado.

Consigna: Sea la función polinómica $f:\Re\to\Re$ dada por $f(x)=2(x^3-9x)(x^2+2x+c)$. Hallar el valor de c para que $C^+=(-3,-1)\cup(-1,0)\cup(3,+\infty)$

Respuesta del alumno:

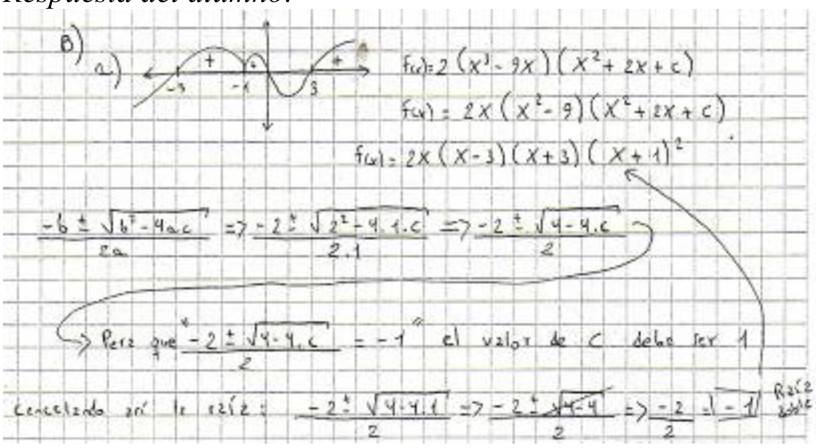

Imagen 2. Ejemplo de cadena deductiva.

<u>5.3 La determinación del valor de verdad de una proposición compuesta.</u>
Analizamos el siguiente caso en donde aparece una conjunción

Consigna: Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y justificar la respuesta: La expresión de la función polinómica $f: R \to R \,/\, f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ *es divisible por la expresión de* $g: R \to R \,/\, g(x) = x - 1$ *y por la de* $h: R \to R \,/\, h(x) = x + 2$.

Para resolver esta actividad algunos estudiantes usaron la regla de Ruffini y otros el teorema de resto para determinar si f es divisible por g. Concluyen que f no es divisible por g. Pocos reconocieron que dado que g no divide a f la afirmación es falsa y no es necesario analizar si f es divisible por h. La mayoría analizó si h divide a f con el mismo método empleado antes, dado que h no divide a f concluyen que la afirmación es falsa. En estos modos de plantear la situación, se presentan dificultades para analizar la validez de proposiciones compuestas por una conjunción de proposiciones simples. En este caso, los alumnos analizan la validez de cada una de las proposiciones simples pero creemos que no les queda claro cómo estos valores de verdad determinan el valor de verdad de la proposición compuesta. Puede suceder que no entiendan la forma de determinar el valor de verdad de una conjunción o bien que el lenguaje natural los induzca a realizar ambas cosas.

5.4 El reconocimiento de pertenencia a una clase

En el caso de hacer uso de definiciones y propiedades para reconocer la pertenencia a una clase, se presentan dificultades cuando el alumno conjetura que el objeto pertenece a la clase pero analíticamente encuentra un resultado que no logra interpretar, en el siguiente caso se ilustra esto.

Consigna: Sea la función $f: R \to R$ *cuya expresión es de la forma* $f(x) = a(x-h)^2 + k$ *(con a, h y k reales,* $a \neq 0$*). La expresión de f, ¿corresponde a una función cuadrática? ¿Por qué?*

Para resolver este problema el alumno interpretó que *h* corresponde a la coordenada *x* del vértice, entonces reemplazó h con $-\frac{b}{2a}$ y que *k* corresponde a la coordenada *y* del vértice entonces (erróneamente) la reemplazó por *c* y planteo la igualdad: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c = ax^2 + bx + c$ por la que pretende comparar simbólicamente dos expresiones distintas de funciones cuadráticas. Al resolver la ecuación obtuvo $\frac{b^2}{4a} = 0$ y no supo interpretarlo. Este alumno trabajó con un caso particular, sin reconocerlo, donde la coordenada *y* del vértice es *c*. Aún sin obtener una conclusión general, podría haber interpretado que en este caso $b = 0$ y la expresión corresponde a una función cuadrática (particular), pero no lo hizo. Un aspecto a destacar en el procedimiento anteriormente descripto es que el alumno reconoció que el resultado hallado no era el esperado. Ante el mismo problema, otros estudiantes plantearon la ecuación $a(x-h)^2 + k = ax^2 + bx + c$. Aplicaron propiedad distributiva en el primer miembro y luego identificaron los coeficientes obtenidos con los de la expresión correspondiente a los parámetros *b* y *c*. Usaron, sin explicitarlo, el criterio de igualdad entre polinomios. Nuevamente la igualdad aparece como un criterio de decisión. En este caso se plantea la igualdad de una expresión dada a la fórmula $ax^2 + bx + c$ con letras prefijadas. Subyace una idea muy estática sobre la expresión de una función cuadrática, pareciera que lo que la caracteriza es la disposición de esas letras (y no otras) acompañando a las potencias de la letra x. Otros asignaron valores numéricos a los parámetros h y k y luego desarrollaron la expresión para compararla con la forma polinómica. Los alumnos que realizaron estos últimos procedimientos aseguraron que la expresión analizada pertenecía a la clase de funciones cuadráticas.

6- Conclusiones.

A partir de lo registrado de las clases, notamos que mayoritariamente las cadenas deductivas no cuentan con los conectores lingüísticos que se traducen en los conectores lógicos; los párrafos son segmentados, sin ilación interna, de modo que aun cuando la conclusión fuera la correcta no es evidente que concluya de lo expuesto. En relación con la refutación notamos que el razonamiento por reducción al absurdo, el reconocimiento de contradicciones y el uso de contraejemplos son poco frecuentes en los estudiantes aunque en la clase se insista con este tipo de argumentaciones. Para identificar la pertenencia a una clase, la dificultad se presenta en el grado de generalidad en el cual se realiza el análisis.

Un recurso muy utilizado por los estudiantes es tratar de plantear una igualdad al inicio del análisis o la resolución, tal como fue ilustrado en las secciones 5.1 y 5.4. Plantear de este modo una igualdad, hace que los objetos se "encapsulen" trabando el acceso a los cuantificadores que eventualmente aparecen en la definición de los mismos, o bien que se complique el análisis pues hay que tener en claro el significado de los objetos que se igualan en cada paso de la deducción analítica. Observamos además que el lenguaje simbólico, usado tan ineludible y naturalmente en las clases de Matemática por los profesores en general, resultó más bien obstaculizador, tanto en el desarrollo de las formas lógicas como en las deducciones analíticas por la confusión entre el signo y su significado.

7. Referencias

Campistrous, L. (1993) Lógica y Procedimientos Lógicos. Centro de documentación e información pedagógicas del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Ciudad de La Habana. Cuba.

Díaz Godino, J., Recio, A. (2001) Significados institucionales de la demostración matemática: implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias.* 19 (3), 405-414.

Diccionario soviético de filosofía, (1965) Ediciones Pueblos Unidos, Montevideo.

Duval, R. (2001). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en matemática educativa II. *México: Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 173-201.*

Gutiérrez, C.M. Introducción a la lógica. Accesible en www.ucm.es/info/pslogica/cdn.pdf.

Proceedings of the ICMI Study conference 2009: Proof and Proving in Mathematics Education. Vol. 1. Accesible en http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf

Valdés, L.M. (1989) Lógica elemental. En Lógica y Lenguaje. Garrido, M (editor)- Tecnos. Madrid. España.