

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA CON DISTINTOS GRADOS DE PARAMETRIZACIÓN EN ENTORNOS DE GEOMETRÍA DINÁMICA: EL CASO DE LA CIRCUNFERENCIA DESDE UN ENFOQUE GEOMÉTRICO - ALGEBRAICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Rosa Ana Ferragina, Leonardo José Lupinacci
Centro de Estudios en Didácticas Específicas, (CEDE).
Universidad Nacional de General San Martín (UNSAM).
rosaferragina_1@hotmail.com leolupinacci@yahoo.com.ar

Resumen

La presente propuesta se encuadra en la formación inicial de profesores de matemática, desarrollando problemas que integran cuestiones geométricas y algebraicas, en conjunto con las que posibilitan los entornos de geometría dinámica. De este modo, tomando como base a la circunferencia, se pretende poner en primer plano la relación existente entre variables y parámetros que, a veces, queda oculta cuando sólo se realizan procedimientos algebraicos. Asimismo, se plantea la valorización que proporcionan los entornos de geometría dinámica para fortalecer el vínculo variable/parámetro que está presente en los problemas geométrico-algebraicos, además de la interacción y la manipulación en tiempo real de las construcciones que dichos entornos ofrecen.

Palabras Clave: Formación Docente Inicial, Geometría, Circunferencia, Parámetros, Geometría Dinámica.

1. Introducción

La presente propuesta se encuadra en el marco de un proyecto de investigación cuyo tema de estudio es “Geometría y TICs: estudio didáctico de propuestas de enseñanza en la escuela secundaria”. Esta investigación se realiza desde el área Didáctica de la Matemática del CEDE (Centro de Estudios en Didácticas Específicas) perteneciente a la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) en Argentina.

La problemática de la enseñanza de la Geometría ha sido considerada en los últimos años como tema de interés por numerosos investigadores en Didáctica de la Matemática (Acosta Gempeler (2004, 2005), Gascón (2002, 2007), Santaló (1994), Santos Trigo (2003), entre otros).

Para destacar la importancia que tiene la Geometría en la formación del profesor de Matemática, exponemos nuestro acuerdo con el siguiente pensamiento:

“La Geometría, puede mostrarse en su forma intuitiva, la primera históricamente, para llegar a la geometría en coordenadas y la introducción de las estructuras algebraicas, pero estas comparaciones y variedad de posibilidades deben ser mostradas por el profesor de la materia, no esperar a que se las indique el profesor de didáctica o de historia y filosofía de las ciencias.” (Santaló, 1994, p 212)

La multiplicidad de sentidos que se propone en el párrafo anterior podría permitir que en su formación, el futuro docente, reflexione con mayor fundamento que la Geometría debe estar presente en sus clases de Matemática.

El diseño curricular vigente de la provincia de Buenos Aires para la formación de profesores en Matemática para la Enseñanza Secundaria⁴², plantea, como un modo de

⁴² Res. N° 13271/99, Res. N° 13259/99 y Res. N° 03581/00.

evolución e integración de objetos matemáticos a estudiar, dos espacios curriculares sobre *Álgebra y Geometría* (uno en primero y otro en segundo año). Pero, cuando se analizan los contenidos y expectativas de logros de estos espacios, se podría decir que no se ha logrado esa conjunción de saberes que se esperaba, quedando aparentemente dos bloques separados. Uno de ellos para la Geometría euclidiana (la más clásica) y, el otro, para la Geometría analítica o de coordenadas, sustentándose en el desarrollo de técnicas algebraicas. Además, pareciera existir un acuerdo implícito de reservar para la Secundaria Básica los contenidos de la euclidiana y, para el tramo superior de enseñanza, la analítica, produciendo entonces una discontinuidad entre ambas que no permite mostrar su complementariedad y evolución (Gascón, 2002).

Con lo cual, esta ausencia de la Geometría, en un sentido integrador, en el contexto de la formación docente específica, implica una pérdida importante de conocimiento y de desarrollo de habilidades matemáticas, ya que es un campo de estudio que favorece el desarrollo de la conjeturación, la argumentación deductiva y la modelización.

“En los últimos años se ha reconocido que el aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Se acepta que en el proceso de aprender la disciplina, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planten conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados. Además el desarrollo de herramientas tecnológicas está influyendo notablemente la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas.” (Santos Trigo, 2003, p 196)

Además, queremos destacar que esta mutiplicidad de sentidos que adquiere la Geometría, en la formación del profesor, se podría potenciar con el empleo de algún software de geometría dinámica; puesto que consideramos que adquirir conocimientos profesionales en el ámbito de estas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento propio de la Matemática, como en el análisis de los resultados de su implementación en la enseñanza.

“A diferencia de otros software de matemáticas, la geometría dinámica fue destinada desde su origen a la enseñanza, por lo que se reconoce fácilmente su vocación didáctica y se resaltan sus potencialidades en la enseñanza; pero como la comunidad matemática no lo ha integrado dentro de su práctica profesional, no lo reconoce como una herramienta legítima para hacer matemáticas ni se estudian las repercusiones de su utilización en la producción de nuevo conocimiento.”(Acosta Gempeler, 2005, p 122)

Es por ello que la elección de los problemas resulta muy importante, puesto que éstos dan lugar a conjeturar con la ayuda del software y, además, el modo en que se interpela al que los resuelve, para que no quede en una simple observación sino que busque explicitar las propiedades permitiendo justificar la observación realizada.

2. Geometría analítica, algo más que coordenadas y letras

Como se mencionó en párrafos anteriores, pondremos en primer plano a la Geometría y, si bien son muchos los recorridos posibles sobre los cuales reflexionar del modo en que están presentes a lo largo de la formación básica del docente, nos centraremos en problemas que, cuando se le realizan pequeñas variaciones, se convierten en un campo de problemas. Es decir que comenzamos explorando un problema utilizando las técnicas clásicas de resolución, construcción y/o planteo algebraico de condiciones, pero que

cuando se propone realizar modificaciones en sus condiciones iniciales, estas técnicas pueden resultar insuficientes.

Además, esto se relaciona con la necesidad de realizar elecciones didácticas que permitirían a los alumnos/profesores profundizar en diferentes procesos de generalización y, los ambientes dinámicos no sólo admiten construir figuras con ciertas propiedades, sino que también se pueden transformar esas construcciones en tiempo real.

Geogebra⁴³, además de ser un software de geometría dinámica, incorpora algunas funcionalidades de los sistemas de procesamiento simbólico puesto que posibilita trabajar algunos temas de Geometría Analítica, de Álgebra y de Cálculo Aritmético.

“La geometría analítica resultó ser una herramienta de doble uso para las matemáticas. Por una parte, los conceptos geométricos podían formularse algebraicamente, y los objetivos geométricos podían alcanzarse por medio del álgebra. Recíprocamente, al interpretar geoméricamente los enunciados algebraicos puede lograrse una visión más intuitiva de su significado, lo cual a su vez, puede ser fuente de nuevas conclusiones” (Kline, 1992, p 446)

De hecho, en este programa las relaciones entre los objetos geométricos y sus correspondientes expresiones algebraicas, se establecen “por defecto”. Es decir, en forma automática, el programa grafica una expresión ingresada (siguiendo la notación que interpreta el programa) y, por otro lado, cualquier representación como objeto geométrico tiene su correspondencia como una expresión, en la ventana algebraica.

Ahora bien, estas correspondencias geométrico–algebraicas se basan en el doble estatus –sea como variable o parámetro– que pueden tener las letras en el enunciado de un problema.

Acordamos con lo que expone Gascón (1999) al referirse a una nueva forma de realizar matemática cuando se profundiza en el estudio de las nuevas técnicas que surgen del doble juego impuesto por las letras como “incógnitas” y como “parámetros”.

Nuestra propuesta didáctica sustenta que asignándole distintos grados de parametrización a los datos de un problema, cuando se lo resuelve en entornos de geometría dinámica, podría convertirse en un campo de problemas, susceptible al estudio tanto de las variaciones como de los invariantes visuales proveyendo, las bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones.

3. Propuesta didáctica

A modo de ejemplo de lo anteriormente expuesto, hemos elegido presentar el análisis de un problema⁴⁴ que permite profundizar en las relaciones entre parámetros y variables desde una perspectiva geométrica. Asimismo, se pretende explicitar las potencialidades de los entornos de geometría dinámica, en este caso con el software Geogebra, para el trabajo geométrico–algebraico.

Específicamente, desarrollaremos el siguiente problema con diversos niveles de parametrización: *“Obtener las circunferencias que pasan por el punto $A(a, b)$ y son tangentes a la recta $y = mx + p$ en el punto $B(c, d)$ ”.*

Es posible realizar una primera aproximación al problema mediante la resolución de un caso particular: *“Obtener las circunferencias que pasan por el punto $A(8, 3)$ y son tangentes a la recta $y = x + 3$ en el punto $B(2, 5)$ ”.*

⁴³ Es el software elegido para la resolución de la propuesta.

⁴⁴ Problema propuesto por el Dr. Josep Gascón en el marco de la Escuela de Invierno de la Universidad Nacional de San Martín (2007).

Los programas de geometría dinámica, como el Geogebra, permiten tener como primer contacto con la situación un trabajo exploratorio mayor al que puede ser realizado en lápiz y papel, puesto que: “La geometría dinámica constituye un nuevo sistema de representación de los objetos geométricos que utiliza nuevos objetos ostensivos, los dibujos computarizados, que se diferencian de los dibujos sobre papel precisamente por su dinamismo: pueden ser arrastrados y deformados en la pantalla, conservando las propiedades geométricas que se les ha asignado por el procedimiento de construcción.” (Acosta Gempeler, 2005, p 123).

Además, resulta interesante la manipulación dinámica del dibujo si bien éste no ha sido construido con todas las propiedades geométricas que establece el problema. Diversas herramientas que ofrece el entorno permiten modificaciones de un dibujo realizado sólo en función de “posicionar” a los objetos para que cumplan las condiciones pedidas. Por ejemplo, se podría comenzar por la construcción de una circunferencia que pasara por los puntos dados para, posteriormente, manipular la posición del tercer punto haciendo coincidir la tangencia solicitada, integrando de este modo elementos de “dibujo” libres con objetos geométricos dependientes.

Es importante notar aquí que, por aproximación, es posible encontrar la circunferencia pedida, $(x - 4.5)^2 + (y - 2.5)^2 = 12.5$, expresión que puede visualizarse a través de la ventana algebraica del entorno. Esto se relaciona con elecciones didácticas referentes a comenzar con los alumnos/profesores procesos graduales de algebrización. Estas elecciones podrían basarse tanto en la supresión de ciertas herramientas del software⁴⁵, como en las consignas específicas que se indiquen..

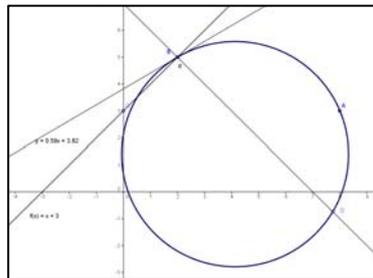


Figura 1: Aproximación por medio de la interacción de propiedades geométricas y elementos de dibujo libres. Recta $f(x) = x+3$, puntos A y B fijos. Punto D sobre la recta perpendicular a $x+3$ que pasa por B. Recta e Tangente a la circunferencia. Desplazando el punto D se hace coincidir la recta tangente con $x+3$ para hallar la ecuación de la circunferencia

Estas decisiones didácticas remarcarían el uso de interacciones entre dibujo y propiedades geométricas, como fuente de conjeturas para el inicio de los procesos algebraicos y no como una resolución ostensiva en sí misma.

En este punto, es importante analizar las distintas relaciones y propiedades que cumplen los objetos geométricos manipulados para establecer las características que deben cumplir los objetos puestos en juego. Entonces, estos análisis podrán centrarse en la relación de perpendicularidad de la recta tangente a la circunferencia por el punto B y el radio de la misma que tiene como extremo a dicho punto y, al combinarse con la propiedad que establece que, la mediatriz de una cuerda de la circunferencia pasa por el

⁴⁵ Específicamente el Geogebra permite tanto la desactivación de herramientas desde su propia interfaz, como la creación de applets en donde se elijan previamente cuáles serán las herramientas que los alumnos dispondrán para el trabajo.

centro de la misma, podrá dar lugar a la ubicación de dicho centro, llegando de este modo a las pautas de construcción geométrica de la figura solicitada.

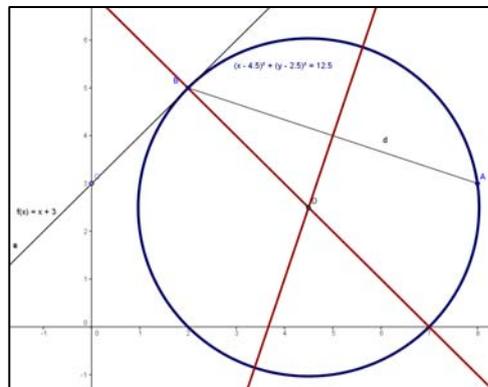


Figura 2: Construcción análoga a la realización con regla y compás. El centro de la circunferencia se obtiene de la intersección de la mediatriz del segmento (cuerda) AB y de la recta perpendicular a $f(x) = x + 3$ por el punto B.

Mediante esta construcción se puede explicitar las propiedades geométricas conjeturadas en la etapa anterior, permitiendo entonces comenzar a indagar las condiciones algebraicas que se manifiestan en este caso particular. En este punto se podría retomar técnicas y manipulaciones algebraicas quizás ya conocidas como las condiciones de perpendicularidad, la obtención de la recta que pasa por dos puntos dados, etc.

Es el momento de poner en escena nuevamente el enunciado original que permita analizar las diversas condiciones geométricas y algebraicas puestas en juego con anterioridad. La primera posibilidad de exploración es un trabajo análogo al realizado anteriormente, pero utilizando puntos libres para la construcción y, “arrastrando” los mismos por el plano para analizar los cambios que las distintas posiciones de dichos puntos realizan sobre la construcción obtenida.

Por ejemplo, es posible desarrollar este trabajo manteniendo la recta tangente fija y variando la posición de los puntos como se pide en el siguiente enunciado: “Obtener las circunferencias que pasan por el punto $A(a, b)$ y son tangentes a la recta $y = 0$ en el punto $B(c, 0)$ ”. Para tal fin, la herramienta “deslizador” que ofrece el entorno puede ser de mucha utilidad, puesto que permite evidenciar los cambios de la construcción al modificar cada uno de los parámetros paulatinamente, comenzando así con un nivel de parametrización. En esta instancia lo importante es hacer explícita la relación entre los distintos parámetros de los elementos puestos en juego con la construcción obtenida.

Ahora bien, el trabajo con deslizadores para parametrizar el enunciado del problema original, requiere de cierto trabajo algebraico, puesto que la componente d del punto B no puede ser libre sino que es la imagen de la componente c , en la función $y = mx + p$, que al estar también parametrizada, sustenta la necesidad de establecer algebraicamente estas relaciones.

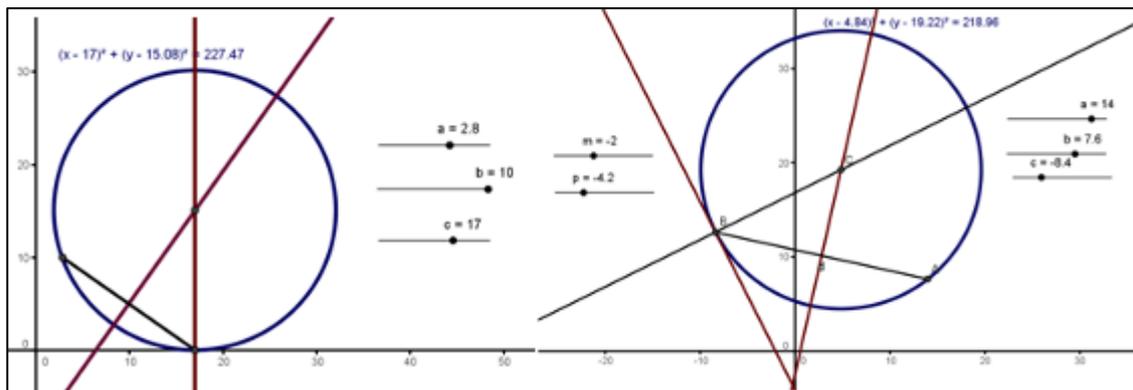


Figura 3: Diferentes niveles de parametrización del enunciado general del problema. A la izquierda partiendo de una recta fija y variando los parámetros de las componentes de los puntos por los que debe pasar la circunferencia. A la derecha variando tanto los puntos como los parámetros de la recta.

En este proceso de evolución del problema el trabajo de parametrización no se agota en el análisis de la relación entre los parámetros y las circunferencias obtenidas, puesto que puede visualizarse, al variar la posición de los puntos por donde pasa la circunferencia, que el centro de la misma “parece desplazarse de una forma particular”. Entonces, resulta interesante analizar cuál es esa forma particular de desplazamiento y cómo influyen las variaciones de los parámetros en las curvas obtenidas, logrando de este modo otra “razón de ser” al problema planteado.

Este nuevo camino de exploración se puede realizar con Geogebra de dos formas, utilizando la herramienta “activa trazo” en el centro de la circunferencia y cambiando los parámetros de la construcción o, mediante la herramienta “lugar geométrico”.

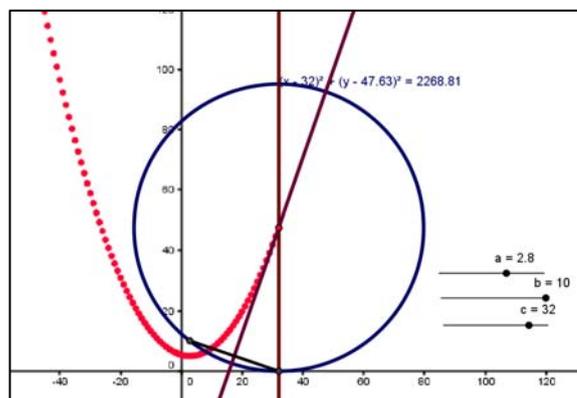


Figura 4: Análisis de las distintas posiciones del centro de la circunferencia a partir de la variación de los parámetros de los elementos de la construcción. (En este caso mediante la herramienta “activa trazo”)

4. Conclusiones

El problema desarrollado nos permitió puntualizar sobre los siguientes aspectos: el modo de explorar las herramientas que ofrece el entrono dinámico; el tipo de trabajo que se puede realizar cuando se incorpora la tecnología y, de lo que significa “hacer matemática”; las características del pensamiento geométrico y las posibilidades que nos brinda el software; la decisión de utilizar o no una herramienta (deslizadores, activa

trazo, lugar geométrico) para la resolución y, finalmente, si tenemos un buen problema geométrico “de lápiz y papel”, puede serlo aún más cuando se incorpora geometría dinámica.

De un modo general, nos propusimos reflexionar, para la formación inicial de profesores, sobre problemas geométricos que pueden evolucionar en un campo de problemas geométrico-algebraicos, tanto por su potencialidad en la exploración como por la elaboración de conjeturas y modelos, en una integración con las herramientas informáticas, y más específicamente de los entornos de geometría dinámica, con las prácticas de enseñanza en las aulas. Puesto que se debería contextualizar la formación del futuro profesor mediante la utilización de un recurso en particular, como es de geometría dinámica y, de este modo, iniciar un recorrido de transformación y reformulación de los contenidos matemáticos que se desarrollarán en el transcurso de su carrera y que luego, en su mayoría, pasarán a ser parte en su labor profesional como contenidos a enseñar.

5. Referencias

- Acosta Gempeler, M. E. (2004). “La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías”. Propuesta de comunicación para el Primer Congreso Internacional de la TAD. Universidad de Jaén.
- Acosta Gempeler, M. E. (2005). “Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática”, en Revista *Educación Matemática*, diciembre, año 17, vol 3. México. pp 121- 140. Santillana
- Dirección General de Cultura y Educación. Provincia de Buenos Aires (1999). *Diseño Curricular del Profesorado de tercer ciclo de la EGB y de la Educación Polimodal en Matemática*.
- Gascón, J. (1999). “La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar” en *Educación Matemática* 11/1, 77-88.
- Gascón, J. (2002). “Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico matemático” En: *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales N°28*. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Gascón, J. (2007). *El proceso de algebrización de las matemáticas escolares*. Escuela de invierno de Didáctica de la Matemática, Buenos Aires, Argentina. Pendiente de publicación.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza, Madrid.
- Santaló L. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la Matemática*. Buenos Aires. Troquel Educación.
- Santos Trigo, L. (2003). “Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos”. Boletín de Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, N° 2.