Una experiencia de Aprendizaje de Geometría Diferencial con Mathematica y Cabri- Geometry

Omar Narváez[1]
Hilbert Blanco-Álvarez[2]

Resumen

Lo expuesto a continuación refleja una de las sesiones de trabajo dentro del seminario de Geometría Diferencial con Mathematica desarrollado en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, en ella se verifica una de las indicaciones dadas en el texto guía, junto con las inquietudes que surgen en la discusión con el grupo, las cuales están orientadas a indagar propiedades, en este caso particular, de la curva plana conocida como "ocho"; entre las inquietudes están: conocer la manera en que se "dibuja su traza", su curvatura y la variación de ésta a través de la curva.
Una segunda parte de la presentación hace referencia a una de las debilidades del programa Mathematica en niveles iniciales de empleo y la inclusión del Cabri- Geometry como medio de suplirla; la "visualización" de la construcción de curvas especiales. Para nuestro propósito se escogió el Astroide.

Palabras clave: Cabri geometry, Mathematica, geometría diferencial

INTRODUCCIÓN

Hace algunos años tuve la oportunidad de conocer un texto de geometría diferencial que llamó mi atención al ofrecer el curso con el empleo de Mathematica, me creó inquietud puesto que mi habilidad y conocimiento de este programa, aún hoy, son pocas. El libro en mención es Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica de Luis A. Cordero, Marisa Fernández y Alfred Gray.

Al iniciar el semestre Enero – Junio del 2000 se me hizo la oferta de dirigir un seminario de Geometría Diferencial y vi la oportunidad de aprender, junto con los que serian mis estudiantes, el empleo de Mathematica en la realización de un curso regular de Geometría Diferencial.

---

[1] Profesor del Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. e-mail: omarnare@mafalda.univalle.edu.co
[2] Estudiante de Licenciatura en matemáticas. IEP. Universidad del Valle. e-mail: hilbla@yahoo.com

Las inquietudes que moverían el seminario serían: el determinar las ventajas y limitaciones de este recurso para permitir en los estudiantes una mayor apropiación de los conceptos tratados al interior del curso,
explorar el empleo del programa en el análisis de los conceptos geométricos y desarrollar un espíritu de indagación frente a lo expuesto en el texto y frente a los conceptos mismos.
Un propósito a más largo plazo es diseñar un tutorial para el aprendizaje de la Geometría Diferencial.
Queremos, algunos de los alumnos participantes y yo, dar a conocer nuestra experiencia y animarlos a que se arriesguen junto con nosotros a involucrar en nuestro trabajo como docentes estos recursos que en algún momento nos causan temor por lo desconocidos que nos puedan ser. De antemano les agradecemos sus comentarios y sugerencias que nos permitan mejorar lo que aquí les presentamos.

JUSTIFICACIÓN

En los últimos años los profesores nos hemos visto casi obligados a tener algún tipo de acercamiento con las nuevas tecnologías. Entre las reacciones que inicialmente se dieron frente a éstas se pueden mencionar dos: primera, la de un rechazo profundo, causado posiblemente por el temor que ellas generan por su desconocimiento, y la segunda de una aceptación a ultranza, en el sentido de no ser posible hacer investigación de punta o de ser imprescindible en la enseñanza de las matemáticas.
Más recientemente las posiciones frente a estos medios ha sido más moderada y con un mayor juicio.
Entre los programas más reconocidos se encuentran Mathematica y Cabri- Geometry, junto con ellos han surgido propuestas de cursos que tratan de explorar su uso en la docencia y en la investigación matemática. Creemos que es importante anotar que cualquier recurso introducido dentro del aula no es por si mismo la solución de los problemas inherentes al aprendizaje, sino que dependen en buen grado del uso que el docente y el alumno hagan de él, es más, estos mismos recursos introducen problemas nuevos los cuales estamos llamados a estudiar.

PERTINENCIA DE LA UTILIZACIÓN DEL SOFTWARE EDUCATIVO "MATHEMATICA"

Dado que el seminario se trabajó alrededor de la propuesta hecha en el texto *Geometría Diferencial de curvas y superficies con Mathematica*, nos limitamos a reseñar algunas observaciones que en este sentido hacen los autores, añadimos sin embargo, que al considerar que el programa Mathematica se encuentra difundido en mayor grado en nuestro medio su empleo en la enseñanza se hace pertinente para poner en manifiesto las implicaciones didácticas y cognitivas que él conlleva.

Entre las razones del empleo de Mathematica, se señalan, en términos generales, que la utilización de la informática en el contexto de las matemáticas es ya esencial en determinadas áreas, tanto a nivel docente como en el de la investigación. Mas puntualmente, se señala, que la adopción del uso de Mathematica, frente a otros programas existentes en el mercado, se debe a que ofrece mayores ventajas y mejores prestaciones en razón de los objetivos planteados, dada su eficiencia en la manipulación simbólica y la relativa sencillez de su lenguaje interno de programación, unido a su capacidad gráfica. Además de la existencia de este programa para PC's, Macintosh, NeXT, Sun, Iris y otros.

PERTINENCIA DE LA UTILIZACIÓN DEL SOFTWARE CABRI-GEOMETRY

Cabri Geometry fue diseñado como un apoyo didáctico para el proceso de enseñanza-aprendizaje en geometría. Cabri permite crear en la pantalla los objetos básicos de la geometría plana, como puntos, segmentos, rectas, triángulos y círculos, a partir de los cuales es capaz de construir automáticamente, por ejemplo, puntos medios y mediatrices de segmentos, rectas paralelas y perpendiculares a un segmento dado, bisectrices de ángulos, así como puntos simétricos con respecto a ejes y puntos. Cabri agiliza la construcción geométrica, pero no puede sustituir el dibujo con lápiz y papel, cuya función se deriva de la demostración lógica a partir de una sola figura "general".

La característica más importante del programa Cabri, desde el punto de vista didáctico, es el modo de "arrastre". Esto significa que el usuario puede seleccionar un punto de una figura construida y, por medio del ratón, cambiar su posición continuamente. Al mover este punto se mantienen todas las relaciones establecidas entre los objetos básicos de la figura. De esta manera, se pueden observar las propiedades invariantes de una figura que cambia dinámicamente, lo que facilita el descubrimiento de regularidades y teoremas. Este modo cambia la visualización estática de una construcción en el papel por una visión funcional y dinámica de las figuras geométricas.

El modo de "arrastre" corrige la visión tradicional de la geometría como algo estático (figuras dibujadas en papel), relacionándola así con la visión moderna de las matemáticas escolares, cuya columna vertebral (no la única) es el concepto de función. Wenzelburger (1991) enfatiza la importancia "de visualizaciones dinámicas e interactivas sobre la formación de imágenes conceptuales" (p, 66, [4]) en el ámbito de la graficación de funciones, y Kaput (1989) afirma, en relación con el estudio de los conceptos variable y función en álgebra, que "la red compleja de ideas asociadas con la palabra variable podría volverse más accesible al disponer de un medio, en la cual la variación dinámica es posible y las invariantes pueden ser estudiadas sistemáticamente y visualmente mediante variaciones controladas". (P.185, [4]). Estas ideas pueden transferirse a una interpretación funcional del modo de arrastre de Cabri: una figura construida cambia su forma y/o tamaño como función de la ubicación de sus puntos. Se le presenta al estudiante un ejemplo más del concepto de función y en un ámbito diferente al acostumbrado (como álgebra y análisis)

Las anteriores razones nos llevaron a incluir en este primer nivel de empleo de Mathematica el uso de Cabri – Geometry en la “visualización” de la generación de curvas especiales dentro de la Geometría Diferencial. Es decir lo utilizamos como un complemento “dinámico” en el trazado de curvas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LAS ACTIVIDADES EN CLASE CON MATHEMATICA

Los objetivos que se persiguieron en el transcurso de cada sesión se dividen en tres líneas de interés:

La primera era determinar las ventajas y limitaciones del programa Mathematica como recurso didáctico en el desarrollo de un curso formal de Geometría Diferencial.

La segunda, era explorar las propiedades de los conceptos geométricos como tales, a través del programa. Por ejemplo la secuencia de trazado de la gráfica al variar su parámetro, análisis de la variación de la curvatura. Tercero, complementar al texto guía con la inclusión de interrogantes frente a los resultados obtenidos después de la ejecución de un programa, inclusión de preguntas para futuras exploraciones y nuevos ejercicios que enriquecieran los contenidos temáticos, todo esto pensando en la conformación de un tutorial para el aprendizaje de le Geometría Diferencial.

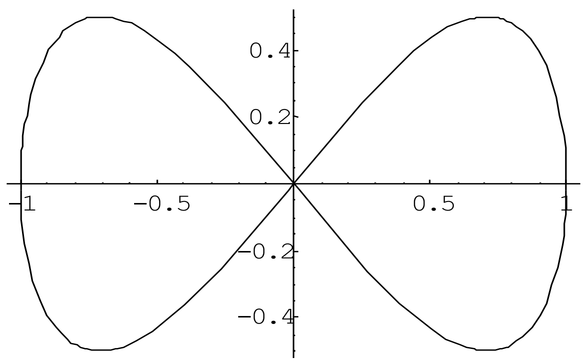
ACTIVIDADES EN LA SESIÓN DE SEMINARIO

Actividad 1. Realizada con Mathematica (trazado de curvas y determinación de su curvatura)

Graficar en Mathematica la función paramétrica

eight [t] = {Sin[t], Sin[t] Cos[t]}

ParametricPlot[{Sin[t], Sin[t] Cos[t]}, {t,0,2π }]



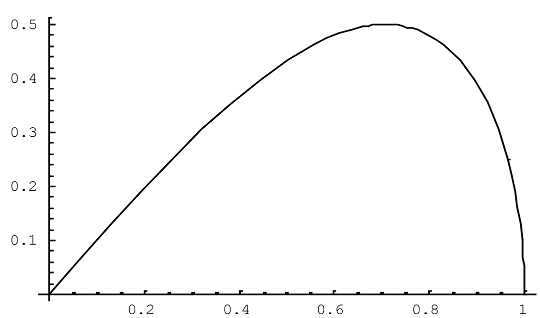
Analizando la gráfica surgen las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el recorrido que realiza un punto móvil al generarse la curva?

Para dar respuesta a esta pregunta variemos el parametro *t*.

Primer Caso: cuando ***t*** varia entre 0 y $\frac{\pi}{2}$

ParametricPlot [{Sin[t], Sin[t] Cos[t]}, {t,0, π /2}]

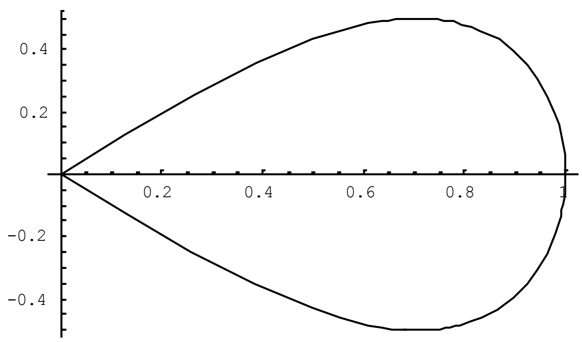


Oservece que cuando t = 0, la traza inicia en (0,0) y si $t = \frac{\pi}{2}$, le corresponde el punto (1,0).

Por tanto la gráfica inicia en el origen del plano, se desarrolla en el primer cuadrante y termina en el punto (1,0).

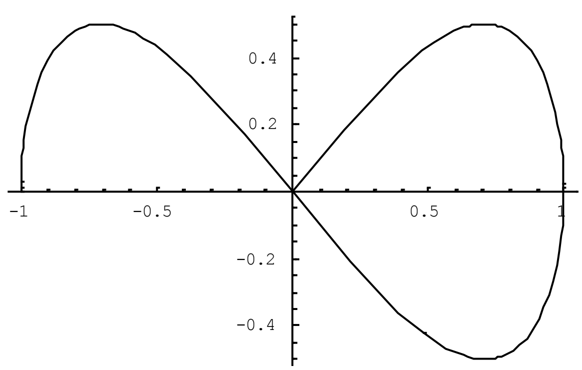
Segundo Caso: cuando t varia entre 0 y π

ParametricPlot[{Sin[t], Sin[t] Cos[t]}, {t, 0, π }]



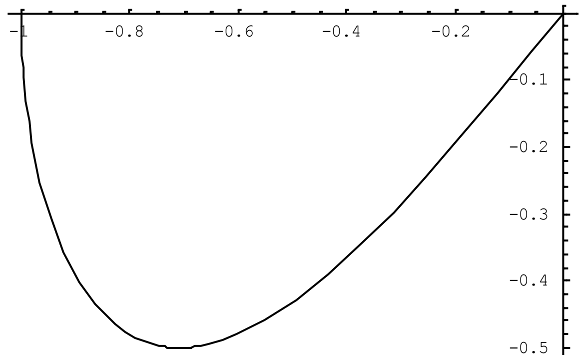
Tercer Caso: cuando t varia entre 0 y $\frac{3\pi}{2}$

ParametricPlot [{Sin[t], Sin[t] Cos[t]}, {t,0,3π/2}]



Cuarto Caso: cuando t varia entre 0 y $-\frac{\pi}{2}$

ParametricPlot[{Sin[t], Sin[t]Cos[t]},{t, 0, -π/2}]



Los tres primeros casos anteriores permiten concluir que la trayectoria seguida por un punto móvil sobre la curva es de izquierda a derecha iniciando en el origen (cuando t =0) en el primer cuadrante y continuando el recorrido por el segundo cuadrante de derecha a izquierda, pasando nuevamente por el origen (cuando $t = \pi$).

El cuarto caso nos muestra que si el parámetro t es negativo, el sentido del recorrido de la curva es contrario para cuando t positivo.

Una vez determinada la incidencia del parámetro t en el trazo de la curva aparece la inquietud de ¿cuál es la curvatura de la curva y su longitud de arco?.

Es necesario aclarar que la curvatura está directamente relacionada con la velocidad con que un punto móvil recorre la curva.

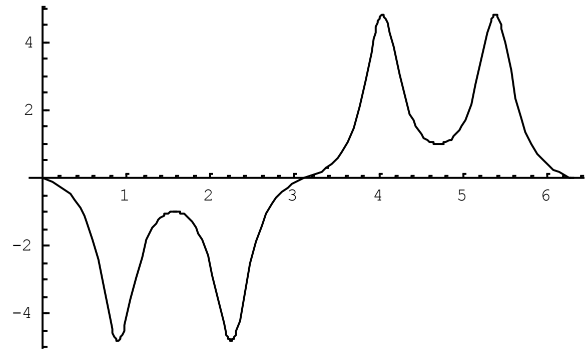
Análisis de la curvatura para el "el ocho"

Kappa2[alpha_][t_]:=D[alpha[tt],{tt,2}].J[D[alpha[tt],tt]]/Simplify[D[alpha[tt],tt].

D[alpha[tt],tt]] ^ (3/2)/. tt→t

kappa2[eight][t]

$$\frac{2\sqrt{2}\,(-4\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]-\mathrm{Sin}[t]\,(-\mathrm{Cos}[t]^2+\mathrm{Sin}[t]^2))}{(2+\mathrm{Cos}[2\,t]+\mathrm{Cos}[4\,t])^{3/2}}$$



Al observar la gráfica de la curvatura surgen las siguientes preguntas:

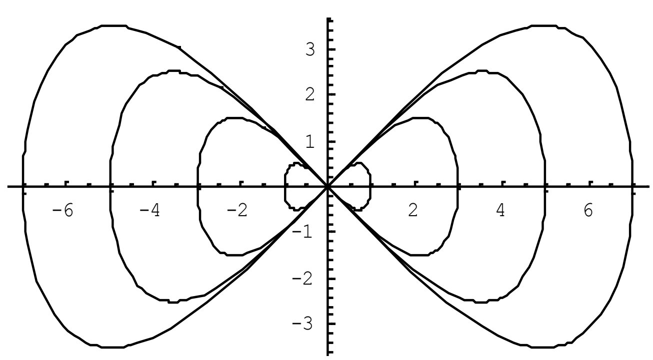
- ¿Cuáles son los puntos de la traza en que la curvatura es cero?
- ¿Para qué puntos la curvatura es máxima?. ¿Para qué valores del parámetro *t* es mínima?.
- ¿Para qué intervalo de valores de *t* es negativa la curvatura, y para qué intervalo positiva?
- ¿A que tramos de la curva corresponden las variaciones de la curvatura?

Es necesario hacer notar que Mathematica permite presentar varias gráficas de una misma curva en un solo plano cartesiano, para nuestro caso del ocho fue necesario incluir un parámetro **a,** el cual permite variar el "Tamaño" del ocho.

ocho[a_][t_]:= {a Sin[t], a Sin[t]Cos[t]}

ParametricPlot[Table[ocho[a][t],{a,1,8,2}]

//Evaluate,{t,0,2π}, AspectRatio→Automatic]

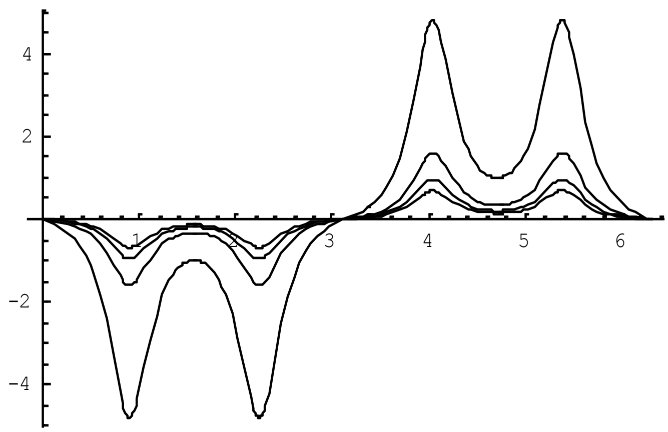


Presentamos la gráfica de las curvaturas asociadas a los ochos.

Plot [Table [kappa2[ocho[a]][t],{a,1, 8, 2}] //Evaluate, {t,0,2π}]

kappa2[ocho[a]][t]

$$\frac{2\sqrt{2}\,(-4a^2\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]-a\,\mathrm{Sin}[t]\,(-a\,\mathrm{Cos}[t]^2+a\,\mathrm{Sin}[t]^2))}{(a^2\,(2+\mathrm{Cos}[2t]+\mathrm{Cos}[4t]))^{3/2}}$$



GEOMETRÍA DIFERENCIAL CON CABRI GEOMETRY

A este primer nivel de acercamiento al empleo de Mathematica en un curso de Geometría Diferencial, consideramos que un recurso de ambiente dinámico relativamente de fácil empleo y que permitiera "visualizar" la forma en que algunas curvas especiales se generan es el programa Cabri – Geometry. No queremos decir con esto que Mathematica no permita hacer lo mismo, si no que nuestro dominio del programa no permite tener una respuesta acertada a esta inquietud.

A continuación presentamos el empleo de Cabri en la construcción del *Astroide*.

Muchas funciones pueden ser investigadas con Cabri Geometry II, ya sea en la versión para PC o en su versión para las calculadoras TI-92.

Actividad 2. Construcción del astroide (con Cabry Geometry)

El astroide es el lugar geométrico de un punto en una circunferencia que rueda dentro de otra circunferencia.

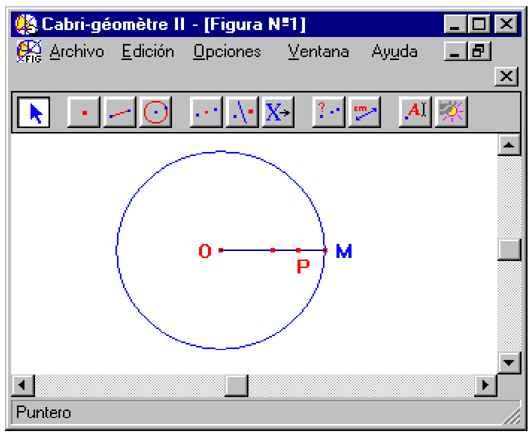
El diámetro de la circunferencia rodante determina el número de cúspides. Si el radio de la circunferencia fija es Z, la ecuación atribuida a Leibniz en 1715, es:

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = Z^{\frac{2}{3}}$$

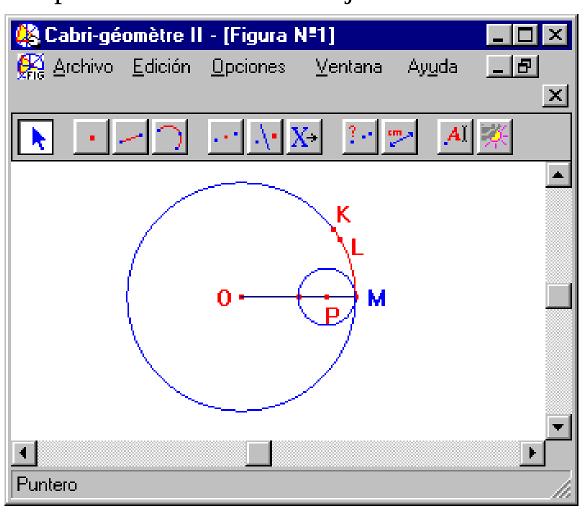
Al astroide también se le conoce como la hipocicloide de cuatro vértices.

Construcción:

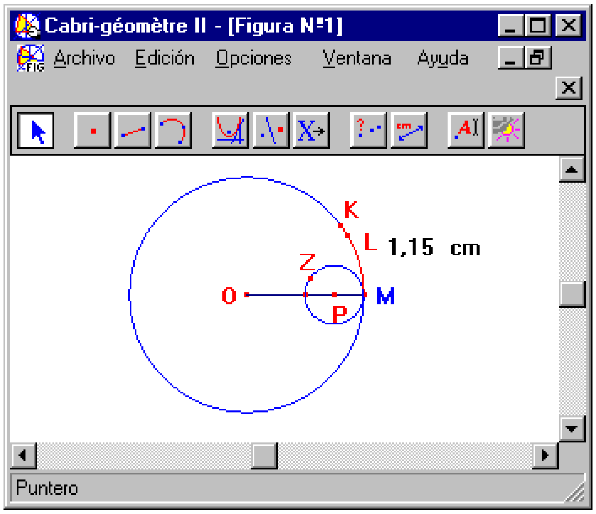
1. Construya una circunferencia de centro O y radio arbitrario.
2. Construya un segmento $\overline{OM}$, donde M es un punto de la circunferencia.
3. Usando la herramienta *punto medio* encuentre el punto medio de $\overline{OM}$ y el punto medio entre el punto medio de $\overline{OM}$ y M, llámelo P



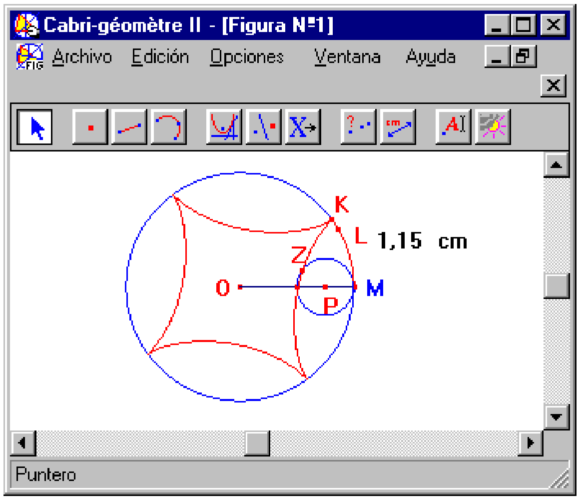
4. Construya una circunferencia con centro en P y radio el segmento $\overline{PM}$, M debe pertenecer a esta circunferencia. Esta será nuestra circunferencia rodante
5. Construya un arco KLM sobre la circunferencia fija, donde K debe estar muy cerca de L. Es necesario minimizar la distancia entre K y L para que la longitud del arco aumente monótonamente por la circunferencia fija



6. Usando la herramienta *Distancia y longitud*, seleccione el arco a medir y esta le dará la longitud. Usando ahora la herramienta *Transferencia de medida*, seleccione en orden, la medida de la longitud de arco, la circunferencia rodante y el punto *M*, aparecerá sobre la circunferencia rodante un nuevo punto, llámelo *Z*.



7. Construya el lugar geométrico generado por *Z* cuando *M* se mueve alrededor de la circunferencia fija. Usando la herramienta *Lugar geométrico*, seleccione *Z* y luego *M*

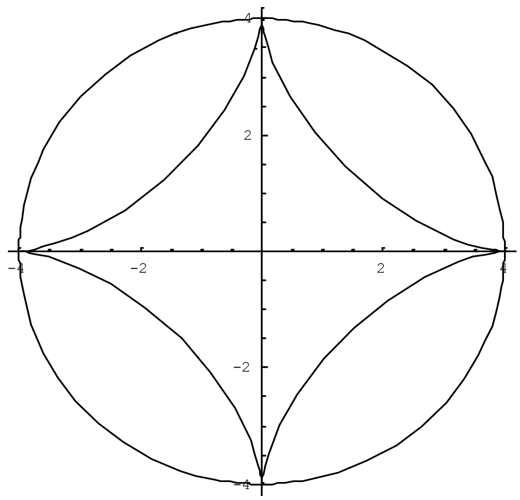


En Mathematica:

astroide [n_, a_, b_] [t_]: = {a Cos[t]^n, b Sin [t]^n }

circunferencia [a_] [t_] : = {a Cos [t}, a Sin [t]}

ParametricPlot [{ astroide [3, 4, 4] [t], circunferencia [4] [t] } // Evaluate, {t, 0, 2π }, AspectRatio → Automatic]



CONCLUSIONES

Al término del seminario, entre las conclusiones podemos mencionar:

- El programa Mathematica si permite realizar análisis más ágiles del comportamiento de ciertos conceptos, gracias a su rapidez en la obtención de resultados.
- El aprovechamiento esta ligado al surgimiento y exploración de los interrogantes que el aprendiz o investigador se plantee.
- La posibilidad de ver gráficamente las representaciones de los conceptos si potencia el entendimiento y comprensión de los mismos, además de poder establecer mas fácilmente las interrelaciones entre los mismos.
- Una de las debilidades iniciales para su implementacion en el ambiente escolar es la falta de familiaridad en el manejo, y que si amerita unas sesiones previas de desarrollo de destreza en su uso.
- En los niveles iniciales de uso del programa no se halla una forma dinámica de la presentación del trazado de curvas, razón por la cual se recomienda el uso de Cabri Geometry.

BIBLIOGRAFÍA

[1] *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*. Cordero,Luis A., Fernandez,Marisa; Gray, Alfred. Addison-Wesley Iberoamericana. 1995

[2]*An Introduction toDifferntial Geometry*. Pfahler, Luther. Princeton University Press. 1947.

[3]*Differential Geometry of Curves and Superfaces*. P. De Carmo, Manfredo. Prentice-Hall. Inc. Englewood Cliff. 1976.

[4] *Educación Matemática Vol. 9 No.2* GEI, Agosto 1997

[5] *Calculus Vol.2*. Apostol, Tom. Segunda Edición. Editorial Reverté

Direcciones electrónicas de interés:

http://www.wolfram.com

http://www.tiris.com/calc/docs/actcabgeom.htm

http://www.forum.swarthmore.edu/dynamic.html

http://www2.gunmanet.or.jp/mow/math/cabri/index_e.htm

http://www.aamt.edu.au/prodsoft.html