

SEMINARIO ONLINE DE PROBLEMAS OLÍMPICOS DE MATEMÁTICAS

Juan Miguel Ribera Puchades
Juan-miguel.ribera@unirioja.es
Universidad de La Rioja, España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Modalidad: CB.

Nivel educativo: Universidad

Palabras clave: Aprendizaje online, recursos online, Olimpiadas Matemáticas, Resolución de problemas.

Resumen

El Seminario Online de Problemas Olímpicos de Matemáticas es una guía online que recoge un conjunto de secuencias didácticas preparadas por profesores preparadores de Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de La Rioja. Siguiendo las ideas del Taller de Creatividad Matemática de la Universidad de La Rioja hemos adaptado y creado contenido para que pueda ser visualizado desde cualquier dispositivo con conexión a internet. Enumeramos los objetivos desde un punto de vista de creación de contenido y desde un punto de vista docente. En este trabajo presentamos detalladamente el proceso para la creación de la guía. Empezando por la planificación inicial de los contenidos que se van a preparar, continuando por una descripción detallada de las bases de datos consultadas para la búsqueda de problemas y enumerando los detalles a tener en cuenta para las grabaciones del contenido. Además, añadimos algunas características de la edición de los videos y del lugar donde alojaremos el contenido. Por último, presentamos algunas posibles extensiones para la guía que hemos creado.

Introducción

El Taller de Creatividad Matemática de la Universidad de La Rioja es un punto de encuentro entre profesores, alumnos de la Universidad y alumnos de ESO y Bachillerato donde se realizan actividades de estímulo y divulgación de las Matemáticas. Una de dichas actividades es el Seminario de problemas para alumnos de ESO y Bachillerato donde, desde hace más de una década, se proponen problemas matemáticos de distinta dificultad que los alumnos, deben resolver y explicar a sus compañeros y profesores. Los problemas que se realizan en el seminario sirven de preparación para los problemas que se plantean a los alumnos de Secundaria y Bachillerato en las diferentes competiciones que se realizan a lo largo del curso; por ejemplo, la Fase Local de la Olimpiada Matemática Española (OME) o el Concurso de

Primavera de Matemáticas. Debemos destacar también que, los alumnos que participan en estas competiciones en Secundaria suelen seguir interesados en las mismas una vez cursan sus estudios universitarios. En dicho caso, suelen presentarse a competiciones matemáticas universitarias que se realizan a lo largo del curso; por ejemplo, la Olimpiada Iberoamericana Matemática Universitaria o la International Mathematical Competition.

Es por ello que, un grupo de profesores que formamos parte del Taller de Creatividad Matemática de la Universidad de La Rioja, consideramos interesante la posibilidad de disponer de contenido audiovisual de preparación de Olimpiadas Matemáticas para que nuestros alumnos puedan acceder al mismo en cualquier momento de su formación tanto preuniversitaria como universitaria. Este tipo de recurso no existía, hasta la actualidad, en las bases de datos de contenido audiovisual docente.

Objetivos

Los objetivos del seminario online son varios. El principal es obtener una guía audiovisual de resolución de problemas olímpicos de matemáticas que muestre algunas de las metodologías clásicas de resolución de problemas de matemáticas acompañada de ejemplos de resolución de problemas siguiendo dicha metodología. Para ello, el grupo de trabajo creamos o adaptamos contenido de forma que pueda ser impartido en dicha plataforma virtual.

Por otro lado, estamos interesados en conocer las respuestas que realizan los estudiantes a los problemas que se dejan planteados en los diferentes videos que hemos creado. Para ello facilitamos un canal de comunicación entre los estudiantes y el grupo de trabajo que permita obtener las observaciones de los alumnos tanto de los problemas planteados a lo largo de los diferentes temas como respecto del contenido y de la forma de los videos.

Además, este seminario permitirá a los estudiantes de Secundaria conocer el Seminario de Problemas que se realiza en la Universidad de La Rioja de forma que, puedan participar tanto en sus estudios de Secundaria como una vez llegados a la Universidad. A su vez, pretendemos que la Universidad de La Rioja se inicie en la elaboración de contenido audiovisual fomentando, así, los estudios semipresenciales y no presenciales.

Planificación de las sesiones.

En la primera fase del proyecto establecemos los contenidos que queremos tratar en las grabaciones que realizamos los integrantes del proyecto repartiéndonos las diferentes temáticas que se pueden encontrar entre los problemas clásicos de olimpiadas matemáticas. De esta forma pretendemos recubrir gran parte de la casuística de problemas matemáticos que se pueden encontrar los alumnos en las competiciones en las que pretenden participar. Los temas que hemos trabajado y que estamos interesados en preparar en un futuro se pueden encontrar en el Anexo I.

Una vez repartimos la temática que cada uno de los profesores del seminario pretendemos plantear, aprovechamos para establecer la cantidad y la duración de las sesiones audiovisuales que queremos elaborar. En general, pretendemos que los profesores elaboren contenido docente de aproximadamente 20-25 minutos en total en el que se presenten problemas matemáticos y contenidos teóricos necesarios para la realización de problemas olímpicos en matemáticas. Este contenido lo dividiremos en (al menos) 4 videos con las siguientes características:

- Un primer video de introducción/motivación. En el mundo de las competiciones matemáticas existen algunos problemas clásicos que permiten introducir conceptos matemáticos que se usan en la resolución de problemas de mayor dificultad. Otras veces, existen situaciones de la vida cotidiana que se pueden modelizar mediante la resolución de un problema. En este primer video pretendemos incluir dichas situaciones de forma que nos permita introducir el tema que trataremos en los siguientes videos.
- Un segundo video de contenido más teórico. En esta sesión pretendemos introducir los conceptos teóricos que pueden servir de gran utilidad para la resolución de problemas. Aprovecharemos para relacionarlos con los contenidos del primer video y mostrar la relación existente entre algunos resultados/teoremas clásicos y la resolución de problemas olímpicos en matemáticas. En este mismo video incluiremos algún ejemplo/ejercicio de aplicación directa del contenido teórico para presentarlo de forma divulgativa.
- Un tercer video de aplicación práctica del contenido teórico. En esta sesión queremos incluir ejemplos variados de problemas de matemáticas que utilicen los conceptos

teóricos presentados en la sesión anterior. Como ocurre en algunos casos, existen aplicaciones muy variadas y en diferentes áreas de la matemática de dichos conceptos teóricos que pretendemos recoger en este video. En otros temas, es necesario el uso de la tercera sesión para incluir una mayor cantidad de conceptos teóricos, haciendo que el número de sesiones totales sea mayor.

- Un cuarto, y posiblemente último, vídeo de aplicación del concepto teórico en la resolución de problemas de mayor dificultad. En este vídeo estamos interesados en aportar la resolución detallada de un problema perteneciente a alguna competición matemática usando el concepto teórico estudiado a lo largo de las sesiones. Además, aprovecharemos los últimos instantes de la secuencia docente para aportar algún problema abierto de forma que los alumnos puedan aprovechar los conocimientos adquiridos en los diferentes videos para intentar resolverlo. Esto nos servirá también a los profesores para obtener retroalimentación por parte de los alumnos que hayan visualizado las sesiones.

Bases de datos de Olimpiadas Matemáticas.

Para obtener la secuencia didáctica anteriormente planteada necesitamos realizar una búsqueda previa tanto de problemas de Olimpiadas Matemáticas como de contenido teórico de preparación de Olimpiadas Matemáticas.

Algunos libros como los de Engel (1998) y Lehoczky y Rusczyk (1994, 1994) profundizan en numerosos conceptos teóricos presentes en la resolución de problemas teóricos presentando algunas aplicaciones directas de los mismos. Por otro lado, Andreescu y Gelca (2008) y Larson (2012) se centran más en la variedad de problemas matemáticos clasificándolos en diferentes áreas pero centrándose menos en los contenidos teóricos que intervienen.

Otras fuentes de problemas de Olimpiadas Matemáticas se pueden encontrar en Internet. Por ejemplo, [NRICH enriching mathematics](#) dispone de una gran variedad de problemas de niveles desde primaria a secundaria en los cuales profundiza con todo detalle permitiendo una comprensión mayor de los conceptos; en algunos casos también incluye extensión de los problemas o algunos problemas relacionados. Por otro lado, [Art of Problem Solving](#) incluye un foro en el que se discuten problemas de todos los niveles donde los participantes del foro

aportan varias soluciones a los problemas que se plantean en el mismo. La página web [Brilliant](#) dispone de una gran cantidad de problemas de matemáticas y otras ciencias donde los interesados pueden resolver problemas y además conocer algunos conceptos teóricos que intervienen en la resolución de los mismos; en esta página se solicita registro y además dispone de zonas premium previo pago. La revista [Crux Mathematicorum](#) dispone de una gran cantidad de números en los que se plantean problemas de nivel medio-alto con soluciones aportadas por los lectores.

Grabación del contenido

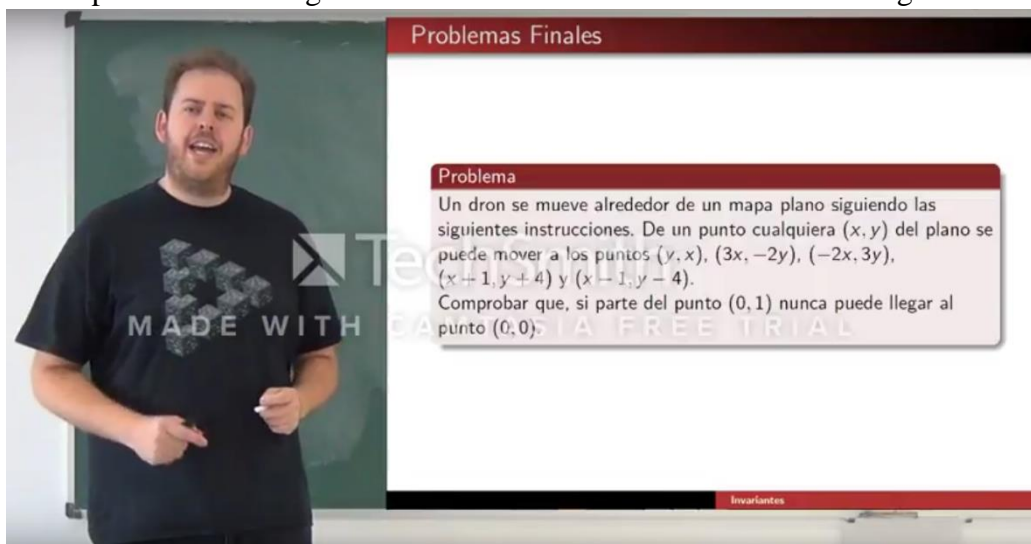
Una vez planificadas las sesiones procedemos a la grabación de las secuencias docentes planificadas por los profesores siguiendo los criterios anteriormente mencionados. Planteamos dos métodos diferentes de grabación para los contenidos dependiendo del contenido.

Los temas relacionados con las transformaciones visuales, como puede ser Geometría, necesitan de un método que permita a los alumnos ver, de la forma más clara posible, dichas transformaciones. Para ello, el software matemático Geogebra permite la creación de contenido teniendo en cuenta la secuencia de operaciones y transformaciones realizadas. En estos casos, la grabación se ha realizado usando software de captura de pantalla de ordenador, permitiendo incluir explicaciones grabadas con micrófono a la vez que se visualizan las transformaciones en la pantalla del Geogebra. Las ventajas de este software han permitido ir un paso más delante del material que ofrece [Geogebra Tube](#) y permitir incluir explicaciones de los procedimientos utilizados.

Aunque el formato de grabación de contenido más utilizado ha sido el uso de cámaras de grabación. En concreto, para la grabación de las sesiones, hemos usado dos cámaras de alta resolución y un micrófono para disponer de varios planos que permitieran prestar atención tanto al profesor como al contenido que pretende explicar. Además, también hemos dispuesto de una pizarra sobre la que realizar explicaciones detalladas y de presentaciones de diapositivas que posteriormente se incluyen en la edición de los videos. Estas presentaciones han permitido dotar de una mayor claridad a las explicaciones a la vez que una mayor velocidad en la exposición de los contenidos, no teniendo que permanecer a la espera que el profesor escribiese en la pizarra algunos conceptos.

Edición del contenido

Una vez disponemos de las grabaciones de las sesiones necesitamos una gran cantidad de



tiempo de edición del contenido digital.

La grabación del contenido la realizamos en diferentes clips que deben ser separados o unidos dependiendo de la duración de los mismos, facilitando la obtención de videos de aproximadamente 5 minutos.

Además, unificamos el estilo de las presentaciones utilizadas en las sesiones, así como la introducción a cada uno de los vídeos. Estos y otros detalles de estilo y de enumeración facilitan la organización de los videos de las sesiones.

Para la realización de estos detalles es necesario el uso de un software de edición de vídeo. En nuestro caso hemos utilizado el programa de pago [Camtasia](#) dado que no existía ningún software libre de suficiente calidad para la edición del contenido. Este programa permite

elegir entre diferentes fuentes de video y de audio, así como la posibilidad de incluir presentaciones a lo largo de los videos de las sesiones.

Como resultado de la edición obtenemos una guía completa y estructurada.

Distribución del seminario

Uno de los problemas que ha aparecido para la distribución del seminario es la búsqueda de una ubicación online del contenido.

Entre las características que debemos tener en cuenta en la búsqueda de la ubicación se encuentran la posibilidad de que el contenido esté disponible para todo el mundo o bajo registro. Otro detalle a observar es la extensión de los archivos de vídeo que obtenemos después de la edición, dado que no todos los repositorios de videos online permiten videos de extensión mayor a 1GB.

La solución que elegimos, al final, es la posibilidad de ubicar el contenido en la plataforma [Youtube](#), la cual permite mantener privado los videos que deseamos de forma que el contenido solo sea accesible para aquellos que dispongan del enlace. Aunque esta decisión hace que disminuya el número de visualizaciones de los vídeos, disponemos de un control mayor de la distribución del contenido. Aun así hemos habilitado el siguiente enlace público como ejemplo: <https://youtu.be/dDg2wYZYqoY>. Asimismo hemos habilitado una cuenta de correo electrónico de Gmail (olimpiadasmaticasunirioja@gmail.com) para recibir las soluciones a los problemas planteados y otras sugerencias que nos pueden hacer los alumnos que visualicen el contenido.

Trabajo futuro

Aunque hemos realizado una completa guía de las principales temáticas que aparecen en las competiciones matemáticas, aún quedan muchos conceptos teóricos y temas por tratar. Algunos de ellos se pueden encontrar en el Anexo I.

Por otro lado, estamos interesados también en extender con un mayor número de videos cada una de las secuencias didácticas que hemos planteado para los distintos temas.

Además, algunos compañeros de preparación de olimpiadas matemáticas de otros países nos hacen solicitado la posibilidad de realizar la grabación de contenido, siguiendo la misma estructura, también en inglés.

Agradecimientos

Agradecer a los profesores de la Universidad de La Rioja: Luciano Abadías Ullod, José Luis Arregui Casaus, María del Pilar Benito Clavijo, José Manuel Gutiérrez Jiménez, Víctor Lanchares Barrasa, Judit Mínguez Ceniceros y Jesús Murillo Ramón por la participación en la creación de la guía y a José Manuel Sota Eguizábal por las constantes indicaciones realizadas tanto para la elaboración, edición y distribución del contenido. Este trabajo pertenece al proyecto de Innovación Docente de la convocatoria 2016/2017 de la Universidad de La Rioja.

Referencias bibliográficas

Andreescu, T., & Gelca, R. (2008) *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser Basel Springer Science & Business Media.

Art of Problem Solving. Recuperado de: <https://artofproblemsolving.com/>

Brilliant. Recuperado de: <https://brilliant.org/>

Camtasia. Recuperado de: <https://www.techsmith.com/camtasia.html>

Crux Mathematicorum. Recuperado de: <https://cms.math.ca/crux/>

Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*. Springer.

GeogebraTube. Recuperado de: <https://www.geogebra.org/materials/?lang=es>

Larson, L. (2012) *Problem-Solving Through Problems*. Springer Science & Business Media.

Lehoczky, S., & Rusczyk, R. (1994) *The Art of Problem Solving, Vol. 1: The Basics*. AoPS Incorporated. Alpine (California), Estados Unidos.

NRICH enriching mathematics. Recuperado de: <http://rich.maths.org/>

Rusczyk, R., & Lehoczky, S. (1994) *The Art of Problem Solving, Vol. 2: And Beyond*. AoPS Incorporated. Alpine (California), Estados Unidos.

ANEXO I

Los temas confeccionados en el seminario online hasta el momento:

- Invariantes.
- Principio del palomar.
- Inducción.
- Polinomios.

- Recurrencias.
- Ecuaciones Funcionales.
- Geometría en el plano.


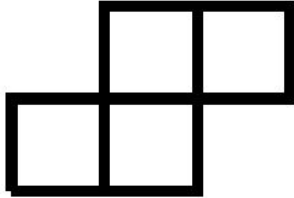
Los temas pendientes de confeccionar en futuras ediciones del seminario son los siguientes:

- Combinatoria.
- Teoría de números.
- Desigualdades.
- Convexidad.
- Geometría espacial.
- Probabilidad.
- Números complejos.
- Geometría analítica.

ANEXO II

Enumeramos los problemas que aparecen en la secuencia didáctica de Invariantes perteneciente a la guía creada.

Sesión 1.

1. Consideramos un tablero de ajedrez usual de $8 \times 8 = 64$ casillas al que le hemos quitado dos casillas de las esquinas diametralmente opuestas. Demostrar que no se puede recubrir con piezas como la de la imagen.
 
2. Tenemos un tablero de $9 \times 9 = 81$ casillas cuadradas. ¿Cuál es el valor máximo de casillas de este tablero que podemos cubrir con piezas como las de la figura siguiente (estas fichas son reversibles, y cada cuadrado de la pieza ocupa exactamente una casilla del tablero, pero no se pueden superponer)?
 
3. En el siguiente juego, empezando con un número natural, podemos efectuar cualquiera de las tres operaciones siguientes:
 - a. Sumar algunos de sus dígitos consecutivos y substituirlos por su resultado.

- b. Descomponer cualquier sección en suma de otros números y substituir la sección por la concatenación de dichos números.
- c. Permutar los dígitos.

El juego que os proponemos es, dado dos números, realizar una sucesión de operaciones que pasen de uno a otro. ¿Se puede pasar de 2459 a 100? ¿Podéis caracterizar los pares de números que se pueden conectar mediante las sucesiones de operaciones de este tipo?

4. Tres personas, A, B y C juegan una serie de partidas de un juego. Cuando empiezan, A tiene 10€, B tiene 20€ y C tiene 30€. En cada ronda, el ganador recibe 1€ de cada uno de los otros dos jugadores. ¿Puede ser que en algún momento los tres jugadores tengan 15€ cada uno?

Sesión 2.

Dedicada a incluir el contenido teórico.

Diferenciamos entre Invariantes y Monovariantes.

Explicamos diferentes situaciones donde encontrar los invariantes y monovariantes en:

- Coloraciones.
- Ejes y esquinas.
- Simetrías.
- Expresiones algebraicas.
- Inversiones.
- Enteros y racionales.

Sesión 3.

1. Los números del 1 al 50 se escriben en la pizarra. En cada paso podemos elegir dos números a , b y escribimos en su lugar $|a-b|$. ¿Si repetimos la operación hasta que nos quede un único número, como sería el valor que obtendremos?
2. Distribuimos 2017 personas en las 100 habitaciones de un hotel. A cada minuto, y mientras no están todas las personas en la misma habitación, una persona cualquiera va de una habitación a otra donde haya, como mínimo, el mismo número de personas que en la suya. Demostrar que, tarde o temprano, todas las personas estarán en la misma habitación.

Sesión 4.

1. Un dron se mueve alrededor de un mapa plano siguiendo las siguientes instrucciones. De un punto cualquiera (x, y) del plano se puede mover a los puntos (y, x) , $(3x, 2y)$, $(2x, 3y)$, $(x + 1, y + 4)$ y $(x - 1, y - 4)$. Comprobar que, si parte del punto $(0, 1)$ nunca puede llegar al punto $(0, 0)$.
2. ¿Se puede elegir una sucesión de enteros no negativos distintos menores que 100000 tales que no haya, en la sucesión, tres en progresión aritmética?