

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA POR CRIANÇAS DO PRÉ-ESCOLAR

Florbela Soutinho – Ema Mamede
southoflorbela@gmail.com - emamede@ie.uminho.pt
AE Viseu Norte, Portugal - CIEC – UMinho, Portugal

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas.

Modalidad: CB

Nível educativo: Nível educativo inicial (3 a 5 años)

Palabras clave: Resolução de problemas; raciocínio multiplicativo; pré-escolar

Resumo

Durante muito tempo pensou-se que as crianças só conseguiriam resolver problemas de estrutura multiplicativa depois de dominarem estruturas aditivas, o que faria supor a existência de uma fase aditiva preditiva do raciocínio multiplicativo. Contudo, novas investigações evidenciam que o raciocínio multiplicativo parece estar ao alcance das crianças tão novas quanto as de 6 anos.

Esta comunicação descreve um estudo que procura perceber como raciocinam as crianças dos 4 aos 6 anos ($N=90$), a frequentar a educação pré-escolar, quando resolvem alguns problemas de estrutura multiplicativa. O estudo procura responder às questões: que desempenhos apresentam na sua resolução? Que argumentos usam para justificar as suas respostas? Os participantes resolveram 12 problemas, 8 de Isomorfismo de Medidas e 4 de Produto de Medidas (Vergnaud, 1983). A análise quantitativa sugere que, apesar dos problemas de Produto de Medidas se afigurarem como mais difíceis de resolver do que os de Isomorfismo de Medidas, é possível a sua resolução por crianças do pré-escolar. Elas conseguem refletir sobre a sua ação e apresentam argumentos válidos para justificar as resoluções corretas.

Introdução

Durante muito tempo a multiplicação parecia só poder ser entendida depois de dominada a adição e subtração. Mais recentemente, a investigação tem sugerido que não será tanto assim (Vergnaud, 1983; Thompson, 1994; Nunes, Bryant, & Watson, 2009). Desde já há indicadores que sugerem que também os problemas de estrutura multiplicativa estão igualmente ao alcance das crianças mais novas.

Sobre o raciocínio multiplicativo

O raciocínio multiplicativo, entendido como a base da compreensão sobre relações proporcionais (Wright, 2011) envolve as situações de correspondência de um-para-muitos e situações de relações entre variáveis, no qual as variáveis envolvidas estão ligadas por uma relação que se mantém constante entre si. Estas situações podem ser analisadas como problemas de proporção simples ou múltiplas, nos quais normalmente é necessário multiplicar ou dividir (Nunes et al., 2009; Thompson, 1994). A relação conceptual entre a multiplicação e a divisão remete para uma interpretação dos problemas baseada na sua estrutura, o que leva à distinção entre problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa.

A compreensão que as crianças têm das estruturas multiplicativas inicia-se informalmente, antes de entrarem na escola, em situações do dia-a-dia e com base nos esquemas de ação de correspondência um-para-muitos e distribuição. As crianças compreendem algumas situações simples de raciocínio proporcional, conseguindo construir conjuntos equivalentes com base na relação fixa que se estabelece entre duas quantidades de natureza distinta.

Estudos sobre a compreensão da proporcionalidade indicam que a dificuldade que as crianças registam sobre o raciocínio proporcional se deve à falta de compreensão sobre o raciocínio multiplicativo (Vergnaud, 1983). A dificuldade inerente ao raciocínio multiplicativo conduziu a diferentes perspectivas sobre quando é que as crianças começam a dominar as operações de pensamento necessárias à resolução de problemas de multiplicação e divisão.

A partir de finais dos anos 80, observam-se estudos envolvendo crianças mais novas, centrados na compreensão de problemas de divisão (ver Frydman & Bryant, 1988; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Kornilaki & Nunes, 2005) e nas estratégias de resolução de problemas de divisão e multiplicação (ver Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993), excluindo problemas de Produto de Medidas ou mesmo problemas de Quarto Proporcional, que Vergnaud (1983) inclui nos problemas de Isomorfismo de Medidas. Ainda assim, a maior parte dos estudos desenvolvidos sobre problemas de estrutura multiplicativa envolvem crianças que já frequentam a escolaridade básica, tendo algum contacto com a instrução formal sobre operações aritméticas (ver Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Park & Nunes, 2001).

Dos estudos já desenvolvidos, parece haver problemas mais difíceis de resolver do que outros. Nunes e seus colaboradores (2009) argumentam que esta dificuldade deriva da

interpretação que as crianças fazem das ações e relações descritas nos problemas, e das operações de pensamento necessárias à sua interpretação e resolução. Os problemas de Isomorfismo de Medidas, nas suas formas de Multiplicação, Divisão Partitiva e Divisão por Quotas parecem ser os mais fáceis, e os mais difíceis os problemas de Produto de Medidas e Proporções Múltiplas (Vergnaud, 1983).

Fuson (2004) argumenta que as situações de correspondência de um-para-muitos parecem estar ao alcance das crianças de 5 e 6 anos, desde que a linguagem envolvida seja simples, os números sejam pequenos e as crianças tenham acesso a material para manipular as situações. Elas conseguem encontrar estratégias que refletem os esquemas de correspondência um-para-muitos e de distribuição que lhes permitem resolver alguns problemas de estrutura multiplicativa. No entanto, Becker (1993) alerta para o facto de que, dentro destas situações, a correspondência 3:1 parecer suscitar mais dúvidas do que a correspondência 2:1. Os problemas que envolvem “Produtos Cartesianos” ou “Medidas de Conversão” são considerados mais difíceis de resolver (Mulligan, 1992; Fuson, 2004), mesmo para as crianças do 1.º e 2.º ano da escolaridade básica (Vergnaud, 1983), sendo de difícil compreensão que cada elemento de um conjunto deve ser cruzado com cada elemento do outro conjunto.







Em suma, a investigação tem mostrado que as crianças conseguem resolver problemas de raciocínio multiplicativo antes de estar completamente desenvolvido o raciocínio aditivo, e antes mesmo de lhes ser formalmente ensinado as operações de multiplicação e divisão. Contudo, parecem permanecer excluídos os problemas de Produto de Medidas e Quarto Proporcional. Assim, faz sentido perceber como é que as crianças portuguesas, a frequentar a educação pré-escolar, resolvem problemas que envolvem o raciocínio multiplicativo. Desenvolveu-se um estudo que procurou dar resposta às questões: 1) Que desempenhos apresentam as crianças quando resolvem problemas de estrutura multiplicativa? 2) Que argumentos apresentam na resolução desses problemas?

Metodologia

Foram conduzidas entrevistas individuais a 90 crianças do pré-escolar, dos 4 aos 6 anos (n=30), de Viseu e Aveiro, Portugal. As crianças foram desafiadas a resolver 12 problemas de estrutura multiplicativa: 8 de Isomorfismo de Medidas e 4 de Produto de medidas

(Vergnaud, 1983). Os problemas apresentados foram adaptados de Vergnaud (1983) e de Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005). A Tabela 1 mostra exemplos dos problemas apresentados às crianças.

Tabela 1 - Exemplos de Problemas de Estrutura Multiplicativa.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA			
TIPO DE PROBLEMA	EXEMPLO	MATERIAIS	
Isomorfismo de Medidas	Multiplicação	Nesta rua há 3 casinhas. Em cada casinha moram 2 coelhinhos. Quantos coelhinhos moram, ao todo, nas 3 casinhas?	
	Divisão Partitiva	Tens estes grãos de milho (12) para dar a 3 pintainhos. Todos têm que comer a mesma quantidade. Quantos grãos de milho é que vai comer cada pintainho?	
	Divisão por Quotas	O Pedro tem estes balões (15) para dar aos amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?	
	Quarto Proporcional	Quando faço sopa para mim (1 pessoa) coloco 2 batatas. Se eu quiser fazer sopa para 3 pessoas, quantas batatas tenho que colocar?	
Produto de Medidas	Multiplicação	Três meninos e 2 meninas estão num baile. Todos os meninos querem dançar com todas as meninas. Quantos pares se conseguem fazer?	
	Divisão	A Rosa consegue vestir 6 roupas diferentes com 3 saias e algumas camisolas. De quantas camisolas ela precisa?	

A ordem das questões foi pré-estabelecida e igual para todas as crianças. A entrevista foi aplicada com recurso a histórias e materiais. As crianças não tiveram feedback sobre as suas resoluções e no final de cada resolução era-lhes pedido para justificarem a resposta dada. Para cada criança foram contabilizadas as resoluções certas e erradas nos problemas de Isomorfismo de Medidas e nos problemas de Produto de Medidas, tendo sido atribuído o valor de 1 a cada resposta certa e 0 a cada resposta errada. Os dados foram recolhidos com recurso à videografia e notas da investigadora.

Resultados

Foram analisados os resultados das crianças, bem como a justificação das respostas corretas. A Tabela 2 resume a média das proporções dos desempenhos das crianças na resolução dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.

Tabela 2 - Média das proporções (desvio padrão) das respostas certas das crianças na resolução de problemas de estrutura multiplicativa.

		MÉDIA (desvio padrão)		
		4 anos (n=30)	5 anos (n=30)	6 anos (n=30)
Isomorfismo de Medidas	Multiplicação	.28 (.31)	.45 (.38)	.78 (.34)
	Divisão Partitiva	.28 (.34)	.45 (.44)	.72 (.34)
	Divisão por Quotas	.30 (.41)	.60 (.42)	.75 (.41)
	Quarto Proporcional	.02 (.09)	.11 (.29)	.25 (.39)
Produto de Medidas	Multiplicação	.04 (.10)	-	.06 (.31)
	Divisão	.17 (.38)	-	.10 (.31)

Os resultados mostram que os problemas não são resolvidos com igual sucesso por todas as crianças. Crianças mais velhas têm melhores desempenhos do que as crianças mais novas. Percebe-se também que os problemas que obtêm melhores resultados são os problemas de Isomorfismo de Medidas, e que os problemas de Produto de Medidas se afiguram como muito difíceis para todas as crianças.

Nos problemas de Isomorfismo de Medidas, os problemas de Multiplicação parecem ser de mais fácil resolução do que os restantes, seguido dos problemas de Divisão por Quotas, com níveis de sucesso superiores aos problemas de Divisão Partitiva. Os problemas de Quarto Proporcional, os de maior dificuldade. Contudo, é de salientar o sucesso alcançado nestes problemas, que se situa acima dos 33% em crianças de 6 anos e nos 20% em crianças de 5 anos.

Os problemas de Produto de Medidas assumem-se como mais difíceis, o que teve expressão nos níveis de sucesso apresentados. Também nestes se observam melhores desempenhos nas crianças de 6 anos, no entanto, salienta-se que houve problemas que foram resolvidos corretamente por crianças de 4 anos enquanto que as de 5 anos não o conseguiram. Os problemas que parecem ter sido mais fáceis foram os de Divisão, ao contrário dos problemas de Multiplicação.

De forma a perceber em que medida as crianças eram capazes de explicar o seu raciocínio, foram também analisadas as suas justificações. A argumentação foi analisada considerando as categorias de argumentos “Válidos”, “Parcialmente Válidos”, “Inválidos” e “Sem Argumentos”. Os argumentos “Válidos” consideram os casos em que a explicação dada pela criança atende a todas as quantidades envolvidas no problema (quando, no problema “A Rita vai arrumar 15 livros em 3 prateleiras. Quantos livros ficam em cada prateleira?”, a criança responde “5 em cada prateleira” e argumenta “porque em cada grupo estão 5, e nas prateleiras tinha que dividir e não sobrar nenhum, então estão 5”). Os argumentos “Parcialmente Válidos” consideram os casos em que a criança atende a uma parte do problema e a sua explicação não é completa (quando, depois de responder “3” ao problema “A Mara tem 12 livros num baú para emprestar às suas amigas. Cada amiga vai receber 4 livros. A quantas amigas a Mara vai emprestar livros?”, a criança justifica de forma incompleta “porque são 4”). Os argumentos “Inválidos” foram atribuídos aos casos em que a justificação é inconclusiva e descontextualizada não servindo como justificação para a resposta correta do problema (quando a criança responde acertadamente “5” ao problema “O Pedro tem 15 balões para dar a alguns amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?”, e argumenta “porque são muitos”). A categoria “Sem Argumento” foi considerada nos casos em que a criança, tendo dado uma resposta correta, perante a necessidade de justificar a sua resposta, não consegue verbalizar a sua explicação, ficando calada ou respondendo “não sei”. A Tabela 3 apresenta a percentagem de argumentos dados nas resoluções corretas.

Tabela 3 - Argumentos registados nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.

ARGUMENTOS	TIPO DE PROBLEMAS					
	Isomorfismo de Medidas			Produto de Medidas		
	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)	4 anos (%)	5 anos (%)	6 anos (%)
Válido	41.5	54.1	63.4	60	-	28.6
Parcialmente válido	3.8	4.1	3.3	-	-	-
Sem argumento	18.9	12.2	8	20	-	71.4
Inválido	35.8	29.6	25.3	20	-	-

Era espectável que crianças pequenas, de 4, 5 e 6 anos, manifestassem alguma dificuldade em expressar de forma válida o seu raciocínio na resolução dos problemas propostos. No entanto, o que se verifica são percentagens consideráveis de argumentos “Válidos”, em ambos os tipos de problemas, e mesmo em crianças de 4 anos, chegando a 60% nos problemas de Produto de Medidas. As crianças de 6 anos não apresentaram argumentos “Parcialmente Válidos” neste tipo de problemas, o que poderá querer indicar que, tratando-se de problemas considerados como muito difíceis para crianças em pré-escolar, elas preferissem ficar caladas do que dar uma justificação que não fosse coerente com a sua resolução correta. A argumentação válida que se regista remete para a consciência com que as crianças resolvem os problemas propostos. Quando uma criança de 6 anos justifica a resposta correta que dá ao problema de Quarto Proporcional (em que se pretende saber quantas colheres de açúcar levam 4 pudins, sabendo que 2 pudins levam 3 colheres de açúcar) da seguinte forma: “então, aqui estão 2 pudins, esta colher é para este [coloca debaixo da figura do pudim uma colher], esta é para este [coloca debaixo do 2.º pudim outra colher] e esta colher é meia para este e para este [coloca a 3.ª colher por baixo mas no meio dos dois pudins], agora mais 2 são 4 [pudins]. São 6 colheres, um para este [coloca uma colher debaixo do 3.º pudim], outra para os 2, meia [coloca outra colher por baixo entre o 3.º e o 4.º pudim, balançando o dedo para um e para outro quando refere a “meia”] e outro para este [coloca a 6.ª colher debaixo do 4.º pudim] 6. Porque 3 se nós fizermos 2 [pudins], mas agora mais 3 para cada um [pretende referir conjunto de 2 pudins]”, não se pode afirmar que esta criança não reflete sobre a ação que realizou, ou sobre a elaboração do seu pensamento. Este foi um exemplo dos vários argumentos válidos observados neste estudo. Reveste-se de notável importância atendendo à dificuldade que caracteriza o problema, em que as relações estabelecidas não são de fácil compreensão, dada a compreensão de 2 pudins como 1 conjunto e a correspondência 3:1, 3 colheres para 1 conjunto.

Conclusões

De uma forma geral, as crianças de 4, 5 e 6 anos conseguem resolver alguns problemas de estrutura multiplicativa, sobretudo problemas de Isomorfismo de Medidas, ainda que o seu desempenho seja influenciado pela idade. A diferença que não se regista significativa entre

as crianças de 4 e 5 anos leva a supor que é a partir dos 6 anos que elas se tornam mais competentes para resolver a maioria destes problemas.

Ainda que a taxa de sucesso observada neste estudo nos problemas de Produto de Medidas se situe abaixo dos 20%, pode-se considerar que é possível, a crianças dos 4 aos 6 anos, resolverem estes problemas com apoio de materiais.

Pode-se também depreender que as crianças estão cientes do que fazem ao resolver as tarefas propostas, o que é comprovado pela argumentação que usam para justificar as suas respostas. Era compreensível que crianças desta idade tivessem dificuldade em se expressar e demonstrar a forma como raciocinaram para resolver os problemas que lhes foram propostos, devido à sua ainda pouca maturidade de expressão. Contudo, é interessante verificar a percentagem de argumentos “Válidos” em todas as idades. Neste estudo verifica-se que muitas crianças de 6 anos e algumas de 5 e 4 anos revelam uma capacidade de introspeção relativa ao seu procedimento e têm consciência das relações elaboradas pelo seu pensamento para encontrar o resultado correto, comprovado pela percentagem de argumentos “Válidos”. Assim, e ainda que os problemas de Isomorfismo de Medidas tenham obtido, neste estudo, melhores resultados do que os problemas de Produto de Medidas, sustenta-se a possibilidade de estes últimos serem também resolvidos por crianças de 4 e 6 anos. Ora, tal como também defendem Hurst e Hurrell (2016), o desenvolvimento de situações exploratórias da compreensão do raciocínio multiplicativo, com exploração simultânea de situações de multiplicação e divisão, permite às crianças uma maior proficiência no seu raciocínio e também na resolução de problemas.

Referências bibliográficas

- Becker, J. (1993). Young children's numerical use of number words: Counting in many-to-one situations. *Developmental Psychology, 19*, 458-465.
- Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematical Education, 24*, 428-441.
- Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology, 90*, 321-329.
- Frydman, O. & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development, 3*, 323-339.

- Fuson, K. (2004). Pre-K to grade 2 goals and standards: achieving 21st century mastery for all. In J. S. D. Clements, *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 105-148). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hurst, C. & Hurrell, D. (2016). Investigating children's multiplicative thinking: implications for teaching. *European Journal of STEM Education* 1(3), 1-10.
- Kornilaki, E. & Nunes, T. (2005). Generalizing principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, 20, 388-406.
- Kouba, V. (1989). Children's solution strategies for equivalents set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematical Education*, 20, 147-158.
- Mulligan, J.(1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, Vol 4 (1), 24-41.
- Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning*. Nuffield Foundation.
- Nunes, T., Campos, T., Magina, S. & Bryant, P. (2005). *Educação matemática – Números e operações numéricas*. São Paulo: Cortez Editora.
- Park, J. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, 16, 1-11.
- Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationships to concepts of rate. In G. Harel, & J. C. (Eds.), *The development of multiplication reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-236). Albany, N.Y.: State University.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Resh, & M. L. (Orgs.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.
- Wright, V. (2011). *The development of multiplicative thinking and proportional reasoning: models of conceptual learning and transfer : models of conceptual learning and transfer*. (Tese de Doutorado). University of Waikato, Waikato. Recuperada de <https://researchcommons.waikato.ac.nz/handle/10289/5984>, consultado em 13/04/2017.