CB-1.132

YENDO MÁS ALLÁ DE LA LÓGICA CLÁSICA PARA ENTENDER EL RAZONAMIENTO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Francisco Vargas – Laura Martignon
fvargasmancera@gmail.com – martignon@ph-ludwigsburg.de
Ludwigsburg University of Education (Alemania) y Universidad el Bosque (Colombia)–
Ludwigsburg University of Education (Alemania)

Núcleo temático: La resolución de problemas en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: razonamiento, lógica, implicación, abducción

Resumen

La evidencia experimental acumulada en las últimas décadas en la literatura psicológica muestra que la interpretación y uso de los conectivos lógicos en distintos contextos están lejos de ser obvios. Estos resultados son a menudo interpretados sólo como una falta respecto a una única lógica tomada como normativa. Esto mismo ocurre muy frecuentemente en la literatura de Educación Matemática en donde los parámetros de análisis del razonamiento presente en los estudiantes se limitan al ámbito de los conectivos y eventualmente los cuantificadores clásicos. Es posible, sin embargo, considerar otro tipo de lógicas que puedan ayudarnos no solo a reconsiderar esta perspectiva, sino a entender mejor cómo razonamos y por qué algunos "errores" lógicos en Matemáticas son tan consistentemente frecuentes. Proponemos un examen de los resultados de investigación de distintos experimentos y de la literatura, a la luz de algunas herramientas lógicas, en particular de algunas lógicas computacionales no monotónicas.

Introducción

Durante las últimas décadas la psicología cognitiva ha producido una gran cantidad de evidencia experimental que muestra que la interpretación y el uso de los conectivos lógicos en los lenguajes naturales y en diferentes contextos, están lejos de ser obvios. Los tipos de interpretaciones que se presentan no atañen solamente a un debate de tipo filosófico y teórico sino que se presentan en diferentes situaciones comunicativas, y en particular en aquellas que se presentan en contextos educativos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Tal es el caso, por ejemplo, con respecto a los enunciados condicionales, cuyo sentido ha sido debatido ampliamente en diferentes disciplinas. Uno de los resultados que comúnmente han sido obtenidos es que este tipo de enunciados se interpretan de diferentes maneras y muy frecuentemente en desacuerdo con la semántica de la llamada implicación material.

Algunos experimentos muy conocidos de las últimas décadas del siglo pasado versan en esta dirección. Tal es el caso, por ejemplo, de la Tarea de selección de Wason (Wason, 1968, Cosmides, 1989) y de experimentos sobre el uso de esquemas deductivos del estilo *modus ponens* (como en Byrne, 1989). Estos resultados son interpretados normalmente como una falta en la competencia lógica normativa incluso a veces como mostrando nuestra falta de racionalidad. Sin embargo, como es bien sabido, son posibles otros enfoques, como el de tomar en consideración otros estándares lógicos aparte de la lógica clásica.

Estos pueden ayudarnos no sólo a reevaluar esas posiciones, Sino también a darnos una comprensión más profunda acerca de el porqué razonamos como lo hacemos (Stenning y van Lambalgen, 2008).

En el ámbito de la de la educación matemática la situación es similar. En efecto, la investigación en este campo hasta el momento ha sido dominada por la idea de que una descripción completa de los estadios de desarrollo de los estudiantes puede ser guiada por el examen de los 16 posibles conectivos proposicionales clásicos. Esta clase de análisis, inspirado por algunos de los trabajos seminales de Piaget, ha sido complementado en algunos casos por consideraciones acerca de la interacción de estos conectivos con los cuantificadores usuales (por ejemplo en Durand-Guerrier 2003). A pesar de esto, incluso en estos casos, la semántica tarskiana para lógica de primer orden ha sido la única considerada entre las muchas posibles. Estudios y presentaciones recientes ampliamente influyentes como Hoyles et al. 2002 y Durand-Guerrier et al. 2011, dan cuenta de esta situación.

Un fenómeno acerca de la interpretación de enunciados condicionales es el de atribuirles un significado similar al de los enunciados bicondicionales correspondientes, tal como ha sido documentado en los distintos niveles educativos. Es significativo desde nuestro punto de vista, que haya sido visto como la manifestación de una “lógica infantil” (“child logic”) contrapuesta a la “lógica matemática” (“math logic”; véase O’Brien et al., 1968). Esta caracterización muestra que este tipo de fenómeno es interpretado usualmente tan solo como una falta o carencia, y no como una manifestación que puede ser en sí misma caracterizada,

ISBN 978-84-945722-3-4

explicada e incluso justificada. Proponemos el uso de algunas de las características salientes de Programación Lógica (Logic Programming). Algunas de estas han sido ya usadas en análisis psicológicos de la cognición humana (por ejemplo en Stenning y van Lambalgen, 2008).

Nuestro estudio

Presentaremos algunos de los resultados preliminares de un estudio en curso realizado hasta ahora con estudiantes universitarios en Colombia y Alemania a partir de cuestionarios. Nos focalizaremos en lo que sigue en dos ejemplos de las tareas desarrolladas.

El Teorema de Pitágoras

¿Quién no conoce el Teorema de Pitágoras después de haber superado la educación primaria y secundaria? Sin embargo, incluso cuando su enunciado es dado explícitamente y no dejando espacio a la ambigüedad de sus distintas formulaciones posibles, el significado atribuido parece ir mucho más allá de lo que explícitamente afirma. Esto es lo que parecen indicar las respuestas a algunas de las preguntas en los cuestionarios aplicados. Consideremos, por ejemplo, la siguiente de selección multiple:

"El Teorema de Pitágoras dice: Para todo triángulo rectángulo con hipotenusa a y catetos b y c, se tiene la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$. Como una aplicación inmediata de este enunciado podemos concluir que (señale la o las opciones que considera correctas):

- el triángulo rectángulo con b=1 y c=2 tiene que tener $a = \sqrt{5}$
- el triángulo con a=4, b=3 y c=3 no es rectángulo
- el triángulo con a=5, b=4 y c=3 es rectángulo
- si un triángulo con b=1y c=2 no es rectángulo, entonces $a \neq \sqrt{5}$"

Sin entrar en los detalles relativos al uso de variables, cuantificadores, y la aplicación de reglas como la particularización universal, las distintas opciones corresponden, respectivamente, a la aplicación de los cuatro esquemas de inferencia modus ponens, modus

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

tollens, afirmación del consecuente y negación del antecedente (MP, MT, AC y DA por sus siglas en Inglés), de los cuáles sólo los dos primeros son válidos clásicamente.

Los patrones de respuesta son indicadores de que en matemáticas también se presentan fenómenos bien conocidos como la asimetría entre los niveles de afirmación de MP y MT. Similarmente, se presenta en la escogencia de AC un tipo de razonamiento de tipo abductivo que a partir de las consecuencias de un teorema pasa a concluir sus hipótesis. Esto se manifiesta en el hecho que, dado un teorema en modo condicional, se pasa a concluir la validez de su converso. En este caso el converso resulta ser cierto, pero no es un resultado abordado usualmente en las matemáticas escolares (ni superiores) y ninguno de nuestros participantes pudo dar un argumento válido matemáticamente para respaldar dicho teorema converso, ni siquiera de manera aproximada. De hecho, la argumentación más frecuente para concluir que el teorema converso es cierto, fue, simplemente, que el teorema directo lo es.

Veremos manifestarse el mismo fenómeno más adelante en la tarea sobre el Teorema de Lagrange en donde, a diferencia del caso que nos ocupa, el converso de Teorema es de hecho falso.

Consideremos ahora esta otra pregunta:

“Para todo triángulo rectángulo con hipotenusa a y catetos b y c se tiene lo siguiente (seleccione una única opción):

- la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construídos sobre los lados b y c es igual al área del triángulo equilátero construído sobre a.
- la suma de las áreas de las los semicírculos cuyos diámetros son b y c es igual al área del semicírculo con diámetro a.
- la suma de las mitades de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados b y c es igual a la mitad del área del cuadrado construido sobre a.
- la suma de las áreas de los pentágonos regulares construídos sobre los lados b y c es igual al área del pentágono regular construído sobre a.
- Todas las anteriores
- Ninguna de las anteriores

Justifique brevemente su respuesta”

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Como esperábamos, las respuestas más frecuentes fueron la tercera (algunos pocos alumnos dieron incluso un argumento correcto de su validez) y la última. En este caso se presenta a nuestro modo de ver, una forma de “Razonamiento de Mundo Cerrado”. Tal como explicaremos en la última sección, esencialmente, aquello de lo que no se tiene una fuente de información afirmativa explícita es asumido como falso.

En resumen, un enunciado aparentemente simple y conocido como el Teorema de Pitágoras, conlleva en su interpretación toda una red semántica que no está necesariamente regida por las leyes de la lógica tradicional.

El Teorema de Lagrange

Nuestro ejemplo del Teorema de Lagrange nos muestra cómo en situaciones corrientes de la enseñanza-aprendizaje los condicionales son revertidos, incluso en situaciones en que los estudiantes ya poseen un cierto grado de madurez y sofisticación matemática (en este caso un curso de álgebra abstracta para futuros docentes). También nos muestra cómo, este tipo de fenómenos con los condicionales se presenta también en casos en que los estudiantes no tienen aún intuiciones bien establecidas (a diferencia del ejemplo anterior de Geometría elemental) precisamente por tratarse de un tema abstracto y nuevo para ellos.

Recordemos el enunciado del teorema: “Dado un grupo G y dado H, un subgrupo de G, el orden de H divide el orden de G”. Lo que documentamos es que en situaciones argumentativas en que los estudiantes deben aplicar el teorema, lo que hacen frecuentemente es aplicar su converso, es decir, que si G es un grupo y n divide al orden de G, entonces tiene que haber un subgrupo de G de orden n.

En uno de nuestros grupos, como parte de su examen final, los estudiantes fueron puestos ante la tarea de determinar si es verdadero o falso que todo grupo de orden 10 posee un elemento de orden 5. En tal caso debían dar un argumento justificando su respuesta. El ejercicio había sido desarrollado en clase y se había enfatizado, con contraejemplos, el hecho de que el converso del teorema es falso. Sin embargo, de 19 estudiantes, 7 respondieron que es verdadero dando el argumento (erróneo) de que “por el Teorema de Lagrange”, el grupo

ISBN 978-84-945722-3-4

de orden 10 debe poseer un subgrupo de orden 5 por dividir 5 a 10. Esta fue la argumentación modal en el grupo estudiado.

Programación lógica y abducción

Para dar una explicación de las tendencias comunes evidenciadas por distintos experimentos, entre ellos los aquí discutidos, usamos algunas de las características de Programación Lógica, una serie de sistemas lógicos surgidos al interior de la Inteligencia Artificial (véase Doets, 1994 o Kowalski, 2011), en particular la variante llamada Programación Lógica Abductiva. Entre estas características consideramos en particular el razonamiento de mundo cerrado ("closed world reasoning"), la semántica de compleción ("completion semantics") y el uso de coacciones de integridad ("integrity constraints").

La primera característica se manifiesta mediante el hecho de que dado un enunciado cuya validez no es afirmada explícitamente, se concluye que su negación es cierta. Podemos ver esta "negación como falla" ("negation as failure") en la segunda pregunta del Teorema de Pitágoras: la elección de "ninguna de las anteriores" indica que por no conocerse ninguna de las variantes del Teorema de Pitágoras dadas en las demás opciones, estas son asumidas (erróneamente en este caso) como falsas. Esto se puede ver, en efecto, en algunas de las justificaciones ofrecidas:

"Se deben formar cuadrados sobre b y c para que la suma de sus áreas sea igual al cuadrado en a." Otro alumno expresa: "no aplica ninguna respuesta ya que habla [sic] de otras figuras geométricas"

La semántica de compleción y las coacciones de integridad juegan, por otra parte, un papel en la formalización de los esquemas de inferencia MP, MT, AC y DA, ya sean estos válidos o no clásicamente. Por otra parte, representan una manera de formalizar lógicamente el razonamiento de tipo abductivo que se presenta en algunos de estos esquemas, o que podemos ver en uso en la interpretación del teorema de Lagrange descrita anteriormente.

Este tipo de herramientas técnicas dan una formalización de tipo algorítmico de los posibles procesos que llevan a las respuestas predominantemente observadas en los ejemplos descritos. Este tipo de descripción va más allá de los estándares tenidos tradicionalmente como únicos o canónicos en la descripción de los procesos en acción, (en este caso la Lógica Clásica). Esta última se nos muestra, aquí como en tantos otros contextos, como el resultado

ISBN 978-84-945722-3-4

excepcional de un entrenamiento y una educación, y no como nuestra manera espontánea y "natural" de razonar en todos. El estudio de las situaciones que faciliten el paso de un tipo de lógica usada espontáneamente (en este caso la Programación Lógica) a otra que normativamente es requerida en un contexto matemático (la Lógica Clásica), se convierte así en algo necesario para superar un verdadero obstáculo epistemológico.

Referencias bibliográficas

Byrne, R.M.J. (1989). Suppressing valid inferences with conditionals. Cognition, 31, 61–83.

Cosmides, L. (1989). The logic of social exchange: Has natural selection shaped how humans reason? Studies with the Wason selection task. Cognition, 31, 187–276.

Doets K. (1994) *From Logic to Logic Programming*. Cambridge, MA, MIT Press.

Durand-Guerrier V. (2003) Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. Educational Studies in Mathematics 53, 5-34.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., y Tanguay, D. (2011). Examining the role of logic in teaching proof. En *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). Springer Netherlands.

Hoyles, C. y Küchemann D. (2002). Students' understanding of logical implication. Educational Studies in Mathematics, 51, 193-223

Kowalski, R. (2011) *Computational Logic and Human Thinking: How to be Artificially Intelligent.* Cambridge University Press.

O'Brien, T.C., Shapiro, B.J. y Reali, N.C. (1971), Logical thinking – language and context, Educational Studies in Mathematics, 4, 201–219.

Stenning, K., y van Lambalgen, M. (2008). Human Reasoning and Cognitive Science. Cambridge, MA: MIT Press.

Wason, P.C. (1968). Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 20, 273–281.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4