ARTICULACIÓN DE CONTEXTOS Y HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS EN UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

Egle Elisabet Haye; María Elina Díaz Lozano
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Argentina.
ehaye@fiq.unl.edu.ar

Resumen
En los últimos años, muchas investigaciones en educación matemática pusieron el acento en la valoración de estrategias para el aprendizaje basadas en la coordinación y tránsito entre los diferentes contextos en los cuales los conceptos son presentados.
Las actividades didácticas que se proponen en este trabajo para el tratamiento del tema valores y vectores propios de una matriz, están destinadas a los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la UNL y tienen el propósito de favorecer fundamentalmente a través de la visualización y el uso de herramientas computacionales el estudio de la interpretación geométrica de los conceptos relacionados a valores y vectores propios, específicamente en R^2, en distintos contextos.

Palabras clave: matemática universitaria, valores y vectores propios.

1. Fundamentación de la propuesta

El Algebra Lineal es una disciplina caracterizada por la generalidad en el enfoque y la abstracción de sus objetos de estudio. Tal vez por ello, los procedimientos de enseñanza usuales en muchas áreas de la matemática, asentados sobre justificaciones algebraicas y desarrollos simbólicos, se observan con fuerza en los temas del Algebra Lineal.
Como alternativa a una forma de enseñanza tradicional basada principalmente en procedimientos analíticos, la teoría de las representaciones semióticas [3], [4] sirvió de base para la elaboración de argumentos y propuestas tendientes a apreciar los efectos positivos de la diversificación de los lenguajes en el proceso de construcción de nociones en matemática. Sustentado en ello, en este trabajo se busca la comprensión de los aspectos geométricos del tema valores y vectores propios en R^2 por medio del abordaje de diversos ejemplos y actividades. Trabajando sobre matrices reales de 2x2, se puede remitir a un espacio familiar a los estudiantes, tal como el espacio de vectores planos. Los ejemplos contextualizados en esa dimensión, posibilitarán que los alumnos adviertan con facilidad las propiedades de proporcionalidad, colinealidad, etc. y ello los ayude a comprender posteriormente los conceptos del tema extendido a espacios más generales.
Tanto para hacer matemática como para aprenderla, la consideración de ejemplos concretos sirve como fuente de inspiración para intuir propiedades generales sobre clases más amplias. La aceptación de dichas propiedades está condicionada a su demostración rigurosa.
Con la inclusión de la gradualización, siguiendo la lógica interna de la disciplina, se tratará de que el alumno comprenda las nuevas ideas haciendo un adecuado uso de los conocimientos previos relacionados con ella.

De esta forma, se espera, en primer término, que las nociones de valores y vectores propios se comprenderán mejor si el estudiante dispone de ejemplos concretos, en los cuales pueda interpretar las propiedades esenciales de los mismos.
Por otra parte, se busca que el alumno distinga, de entre las diversas propiedades de los casos particulares en estudio, aquéllas que la intuición o el conocimiento previo que posee, indican como comunes a todos y que pueden ser utilizadas para la posterior comprensión de cuestiones generales que serán, así, válidas en todas las situaciones analizadas. Para concretarlo, se aprovecha uno de los rasgos característicos del Álgebra Lineal: su vinculación con la Geometría, y ello, al facilitar la presentación de las nociones a través de dos representaciones: algebraica y geométrica, proporciona valiosos elementos para la comprensión.
En efecto, en los últimos años, muchas investigaciones en educación matemática pusieron el acento en la valoración de estrategias para el aprendizaje basadas en la coordinación y tránsito entre los diferentes contextos en los cuales los conceptos son presentados.
La representación visual de las nociones, muchas veces jerarquizada como herramienta para la construcción de significados en el proceso de aprendizaje, recibió tratamiento desde diversos enfoques en varias disciplinas, como puede analizarse en [8], [4] y [2]. En la actualidad "hay un alto consenso entre investigadores y especialistas relativo a que el desarrollo de las capacidades que caracterizan el pensamiento visual proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas." [4].
Sobre esa base, en esta propuesta se formulan ejemplos y problemas cuyo objetivo es inducir al análisis de las propiedades esenciales de los conceptos por medio de la relación de figuras geométricas con la formulación algorítmica de tales propiedades.
Con ello se propicia que los alumnos articulen los contextos en los cuales se pueden expresar los conceptos en estudio y adviertan la relación de la formulación algorítmica con la interpretación geométrica de los mismos, anticipando la comprensión de las nociones generalizadas a matrices de órdenes arbitrarios.
En lo que respecta a los instrumentos para concretar la acción didáctica, se aprovechan distintas opciones que ofrecen los provenientes de la tecnología informática [1], [5].

2. Descripción de la propuesta

La asignatura Álgebra Lineal se dicta en el segundo cuatrimestre del primer año para todas las carreras de ingeniería pertenecientes a la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la UNL y su dictado se distribuye en una clase teórica y otra clase práctica, ambas semanales en aula, y cuatro clases de práctica en laboratorio informático que se distribuyen en todo el cuatrimestre. El tema "Valores y vectores propios de una matriz" forma parte de la última unidad del programa de Álgebra Lineal y los contenidos ya dados previamente son: espacios vectoriales, independencia lineal, espacio generado, base y dimensión, espacios con producto interno, espacios de una matriz y transformaciones lineales.
El conjunto de actividades que proponemos está orientado a la integración de las tres instancias de aprendizaje (teoría, práctica en el aula y práctica en laboratorio), con el propósito de conducir al alumno a interpretar y afianzar los conceptos desde el punto de vista geométrico y a la reflexión, exploración y obtención de resultados y conclusiones a partir de diferentes representaciones visuales.
La primera instancia se desarrolla en una clase de teoría donde el docente, mediante una presentación que, como recurso didáctico facilite el uso de esquemas visuales y la

interacción con los alumnos, introduzca y explique los contenidos teóricos básicos del tema y sus aspectos geométricos. La presentación se basa en el desarrollo de distintos ejemplos junto a los cuales se irán intercalando representaciones visuales que permitirán la observación, discusión y motivación en la obtención de conclusiones acerca de la interpretación geométrica de los valores y vectores propios, siempre tratados específicamente en el plano.
Para mayor comprensión, a continuación se muestra la secuencia de los puntos más importantes que el docente abordará en esta clase, suponiendo que las definiciones de valor propio y vector propio de una matriz de n x n fueron dadas previamente.

2.1 Ejemplo 1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *¿Son u y v vectores propios de A? En ese caso, ¿cuáles son los valores propios correspondientes?*
El objetivo aquí es que los alumnos adviertan en la representación geométrica de los vectores dados y sus imágenes, la relación entre las respectivas direcciones cuando el vector es un vector propio. En la Figura 1 mostramos el esquema de análisis que el docente realizaría junto con los alumnos.

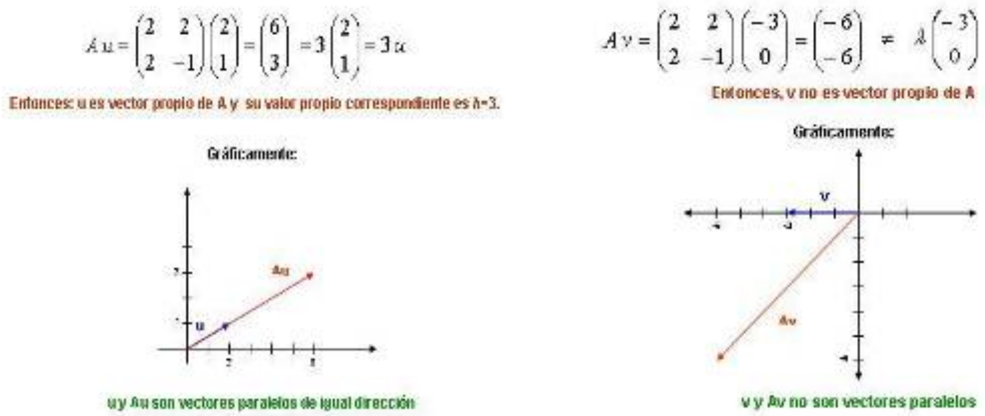

Figura 1. Interpretación geométrica del Ejemplo 1

El siguiente ejemplo persigue la búsqueda del conjunto de todos los vectores propios asociado a un valor propio conocido con el fin de conducir al alumno al surgimiento de otros conceptos como: ecuación característica, espacio propio de un valor propio y multiplicidades algebraica y geométrica.

2.2 Ejemplo 2. *Muestra que λ= -2 es también un valor propio de* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *y determina <u>todos</u> sus vectores propios correspondientes.*
Utilizando este ejemplo, el docente desarrollará las justificaciones que lleven al alumno a comprender que para conseguir el espacio propio del valor -2 se debe calcular el espacio nulo de A + 2I. Una vez obtenido dicho espacio y también el del valor propio 3, se muestra a los alumnos una visualización de ellos, como aparece en la Figura 2.

Figura 2. Interpretación geométrica de espacios propios

De los dos ejemplos dados, se espera que los alumnos hayan interpretado que:

- Si A es una matriz real 2 x 2 con valores propios reales, la ecuación $Ax = \lambda x$ indica que los vectores x y Ax son proporcionales, esto es, vectores paralelos con igual dirección si $\lambda > 0$ o con dirección opuesta cuando $\lambda < 0$. Así, x y Ax geométricamente están ubicados en una misma recta que pasa por el origen.
- Como cualquier múltiplo escalar de un vector propio es también vector propio asociado al mismo valor propio λ, el espacio generado por λ es la recta que pasa por el origen cuya dirección es la de cualquier vector propio de dicho espacio.

2.3 Ejemplo 3. Otra manera de pensar geométricamente acerca de los vectores propios (y visualmente interesante) es dibujar x y Ax uno tras otro, o dicho de otra manera, “cabeza con cola”, como se sugiere en [6] para el caso de matrices reales de 2 x 2.

El estudiante pudo aprender que si x es un vector propio asociado al valor propio λ, también lo será cualquier múltiplo no nulo de x. Así, si queremos buscar vectores propios de manera geométrica, solamente necesitamos considerar el efecto de A sobre vectores unitarios. Este tipo de figuras en donde simultáneamente se grafica un vector unitario u cualquiera con punto inicial en el origen y, unido a él, Au desde el punto terminal de u (Figura 3), se expone en [7] y son llamados *eigenpictures*.

¿Cómo se pueden encontrar visualmente en un eigenpicture los vectores propios reales de una matriz real de 2 x 2? Esta pregunta es la que el docente plantearía a los alumnos al mostrarles un eigenpicture muy sencillo (Figura 4) asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

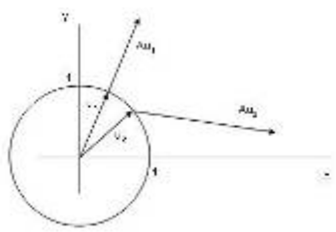

Figura 3. Vectores “cabeza con cola” (eigenpicture)

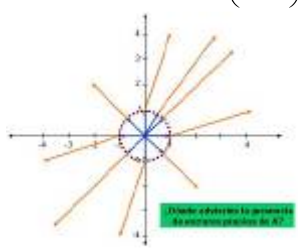

Figura 4. Localización de vectores propios

La respuesta: sólo aquellos vectores u que están alineados con Au serán los vectores propios de la matriz. En la Figura 3 se puede ver que u_1 es vector propio pero u_2 no lo es y en la Figura 4 se aprecian dos vectores propios, uno en el primer cuadrante $\left(1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}\right)$ y el otro en el segundo cuadrante $\left(-1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}\right)$. Este tipo de representación visual tendrá un papel muy importante para la comprensión de valores y vectores propios en las actividades propuestas para el alumno en laboratorio, como se podrá ver más adelante.

La segunda instancia de aprendizaje de desarrolla en las clases prácticas en donde los alumnos resuelven ejercicios típicos del tema con lápiz y papel, dándosele en esta instancia más importancia a la comprensión de los conceptos teóricos y a la adquisición de habilidades y técnicas de resolución de ejercicios convencionales del tema.
Finalmente, en los gabinetes de informática se realizará la última instancia con una actividad cuyo propósito es integrar, articular y visualizar los conceptos aprendidos con el empleo de herramientas tecnológicas.

2.4 Herramientas informáticas para la visualización. El software que se utiliza para la implementación de las actividades es el Matlab, ya que se trata de una poderosa herramienta computacional fundamentalmente para tareas que requieran de cálculos matriciales. Como parte de esta propuesta, la cátedra diseñó en Matlab un algoritmo (de tipo función) que genera un eigenpicture para que el alumno pueda implementarlo en clase. Esta función recibe como argumento una matriz real A cualquiera de 2 x 2 y devuelve la gráfica del eigenpicture de dicha matriz. Internamente la función genera y dibuja, además de la circunferencia unitaria, una sucesión de vectores unitarios x con punto inicial en el origen (de color azul) de la forma $x = [\cos\theta, \operatorname{sen}\theta]$ con θ medido en radianes y luego dibuja a partir de la terminación de cada x el vector Ax correspondiente (de color rojo) como un segmento dirigido con punto inicial en x y punto final en x + Ax. En la Figura 5 se muestra el eigenpicture de la matriz $A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ con valores propios reales distintos. Sobre los rayos que indican las flechas se encuentran los vectores propios unitarios en color azul. Se observa que la matriz A tiene dos valores propios positivos y que en el primer cuadrante, el largo de Ax es aproximadamente el doble de x mientras que en el cuarto cuadrante es aproximadamente la mitad: los valores propios son $\lambda_1=2$ y $\lambda_2=1/2$.

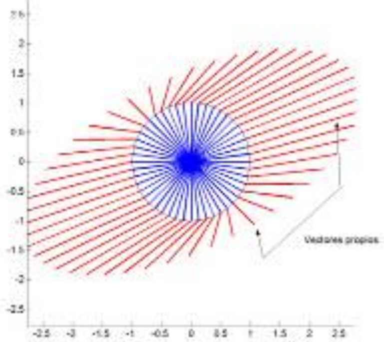

Figura 5. Eigenpicture de una matriz con valores propios reales distintos positivos

Otro programa gráfico conocido para ilustrar valores y vectores propios de una matriz real de 2 x 2 e incorporado en Matlab es el de las "agujas del reloj", que permite, con la experimentación gráfica, la exploración y el descubrimiento de ciertos patrones. Para una matriz real de 2 x 2, el programa grafica simultáneamente un vector normalizado $x = [\cos\theta, \operatorname{sen}\theta]$ con su respectiva imagen Ax, pero a diferencia de un eigenpicture, ambos desde el origen. Por otro lado, este programa permite de manera dinámica que al variar θ de 0 a 2π los vectores x se muevan describiendo un círculo unitario mientras que Ax lo hace simultáneamente describiendo una elipse. En Matlab, simplemente tecleando *eigshow* se realiza esta demostración gráfica para un conjunto de matrices que por default tiene incorporada, o bien, tecleando *eigshow(A)* se ejecuta para la matriz A especificada. Inicialmente, eigshow grafica el vector unitario x = [0,1] además de Ax y

el usuario con el mouse puede hacer que x se desplace alrededor del círculo unitario (en color verde). Al mover x, al mismo tiempo la pantalla muestra a Ax también en movimiento (en color azul).
Cuando en la gráfica se ve que x y Ax están alineados es porque en ese momento Ax $=\lambda x$ y en consecuencia, x es vector propio de A asociado al valor propio λ. Dado que x es unitario, la longitud de Ax es $|\lambda|$ y el signo de λ dependerá de la relación entre las direcciones de los vectores x y Ax.
Para A = $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ se muestran en la Figura 6 las trayectorias de x y Ax en eigshow (izquierda) y su eigenpicture correspondiente (derecha). En ambos tipos de gráficos se observa que los valores propios de A difieren en signo. En las dos gráficas de la izquierda vemos que el primer λ es positivo porque x y Ax apuntan en la misma dirección y que está en el primer cuadrante mientras que el segundo λ es negativo porque x y Ax tienen direcciones opuestas y está en el cuarto cuadrante. Lo mismo podemos ver en la gráfica de la derecha, además de estimar las longitudes de los valores propios de A: λ=5/4 y λ= -1/2.

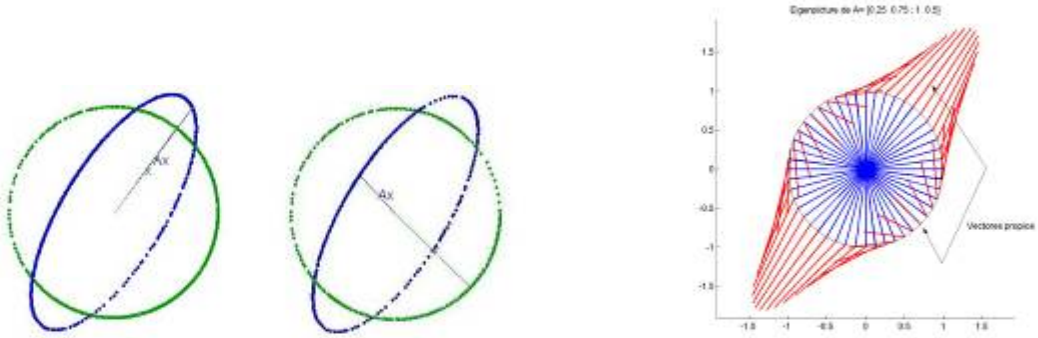

Figura 6. Eigshow y eigenpicture de una misma matriz con dos valores propios de distinto signo

2.6 Actividad propuesta en laboratorio. A continuación, como finalización de esta propuesta didáctica, se presenta una actividad para que el alumno realice en laboratorio informático usando Matlab y las dos funciones comentadas en el punto anterior. Las conjeturas formuladas por los estudiantes sobre la base de sus observaciones, podrán ser contrastadas con los cálculos utilizando los comandos del Matlab, con lo cual, una vez corroborados sus resultados, habrán tenido nuevamente oportunidad de asociar registros en dos contextos diferentes, esta vez por medio de su participación activa en la construcción y consolidación de las nociones.
Actividad para los alumnos:
Para la exploración geométrica de valores y vectores propios deberás implementar en Matlab básicamente dos funciones: *eigshow* (función propia del Matlab) y *eigenpicture* (función creada por la cátedra).
a) Teclea *eigshow* y experimenta con las siguientes matrices, analizando las órbitas descriptas por cada una

$$\begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

i) Identifica vectores propios. En función de esto, determina si la matriz tiene valores propios reales distintos, reales iguales o complejos y sus multiplicidades.
ii) Da una estimación de los valores propios y vectores propios basándote en la gráfica.

iii) Usa Matlab para calcular los valores y vectores propios de cada matriz y compara estos resultados con los valores y vectores propios que estimaste gráficamente.
iv) ¿Qué se observa cuando la matriz es no invertible? ¿Y cuando la matriz es simétrica?
b) Tipea eigenpicture(A), donde A es cualquier matriz de la lista dada en el item (a). Analiza cada eigenpicture obtenido y a través de esta gráfica responde las mismas preguntas del item (a). Realiza un informe por escrito, en el que analices la coherencia entre estos dos tipos de representaciones visuales y los conceptos teóricos relacionados.

3. Consideraciones finales y perspectivas de trabajo futuro

La propuesta didáctica del presente trabajo, que será implementada en el curso del presente año, surge de la búsqueda permanente de modos de enseñanza que permitan mejores resultados en los aprendizajes de los estudiantes, principalmente en aquéllos que cursan el primer año de su carrera. A partir de la implementación de esta propuesta, se tratarán de establecer indicadores que relacionen los resultados de aprendizaje con la utilización de los diversos contextos en el que se realiza el proceso de construcción de las nociones del tema valores y vectores propios. Sobre la base de la información procesada, se espera derivar pautas para el diseño e implementación de nuevas propuestas didácticas que busquen minimizar el efecto de aquellos factores negativos que pueden ser modificados desde nuestra institución universitaria.

4. Referencias

[1] Álvarez, I. y Guasch, T. (2006) Diseño de estrategias interactivas para la construcción de conocimiento profesional en entornos virtuales de enseñanza aprendizaje. *RED Revista de Educación a Distancia (*14). España.
[2] Buteler, L. y Gangoso, Z. (2001). Diferentes enunciados del mismo problema: Problemas diferentes? *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias*, (6), Nº 1. Porto Alegre, Brasil.
[3] Dubal, R. (1999). L'Apprendimento in matematica richiede un funzionamiento cognitivo specifico? *La Matematica e la sua Didattica*, (1), 17-42.
[4] Dubal, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basics issues for learning. *Actas del PME 23*, 3-26
[5] García Barneto, A. y Gil Martín, M. (2006). Entornos constructivistas de aprendizajebasados en simulaciones informáticas. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*. (5), Núm. 2.
[6] Poole, D. (2004) *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. Editorial Internacional Thomson. México.
[7] Schonefeld, S. (1996) Eigenpictures: Picturing the Eigenvector Problem. *The College Mathematics Journal* (26), 316- 319.
[8] Villagra, M. Imagen y enseñanza: Una relación conflictiva. http://www.uned.es/ntedu/ espanol/master/primero/modulos/teoria-de-la-representacion/leccolab.htm