

LA CONSTRUCCIÓN, UN MEDIO PARA PRODUCIR Y VALIDAR PROPIEDADES GEOMETRICAS

Lidia Ibarra; Blanca Formeliano; Florencia Alurralde; Graciela Méndez
ibarralidia@yahoo.com.ar

Resumen

En algunas instituciones escolares de Salta Capital la enseñanza de la geometría, específicamente las construcciones geométricas son desplazadas debido a que entre se priorizan otros contenidos.

Para revertir esta situación nuestro grupo de investigación junto con la cátedra Práctica Docente del profesorado de matemática, ha elaborado una propuesta de enseñanza que fue desarrollada en dos divisiones de séptimo grado de una escuela periférica de la zona norte de la ciudad de Salta.

Las situaciones didácticas planteadas permitieron generar una familia de problemas modificando las variables didácticas, lo cual exigía a los estudiantes la utilización de distintos conceptos geométricos y distintos procedimientos. En la clase práctica se pudieron generar condiciones bajo las cuales fue posible gestionar la enseñanza de la geometría, y al mismo tiempo lograr que la producción de los escolares se aproxime a la organización matemática de referencia.

A partir del análisis de las producciones de los alumnos pudimos validar la función que cumplen las variables didácticas en las construcciones geométricas y el sentido del contrato didáctico, identificando algunos de los factores que facilitan o dificultan la enseñanza de este contenido.

Palabras clave: construcciones geométricas, variables didácticas, tareas, técnicas contrato didáctico.

1. Introducción

En una primera etapa hemos elaborado la estructura de la organización matemática de referencia (OMR) alrededor de los problemas de construcción de triángulos, identificando las tareas, técnicas, tecnologías y teoría, para el 6° año de la escuela primaria y 7° año de la escuela secundaria. Para dar continuidad y profundización al tema, construcción de triángulos, trabajamos en la organización matemática a enseñar y la organización matemática enseñada

Proseguimos con el estudio de una secuencia didáctica implementada en una institución a efectos de analizar la producción de los estudiantes en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. Caracteriza la propuesta la identificación de las variables didácticas, lo que nos permitió secuenciar la misma y orientar el análisis acerca de la posibilidad o no de las construcciones propuestas.

Teniendo en cuenta algunos conceptos tales como contrato didáctico y variable didáctica en el marco de la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1983) y en el marco de la Teoría Antropológica de lo didáctico (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 51) elaboramos una secuencia con la finalidad de que al realizarlas los alumnos se aproximen al trabajo matemático de la Organización Matemática de Referencia.

2. Marco Teórico

Los aspectos institucionales que inciden en la propuesta áulica son, entre otros los Diseños Curriculares, libros de textos, trabajos prácticos y apuntes teóricos producidos por los docentes o por el departamento de matemática. De todas estas obras surgen indicadores a tener en cuenta en la elaboración de **la organización matemática a enseñar**.

En los documentos curriculares consultados (Contenidos Básicos Comunes, Diseños Curriculares Provinciales y Núcleos de Aprendizaje Prioritarios) para el tema construcción de triángulos sólo se explicitan los contenidos conceptuales y procedimentales en forma genérica sin especificar la profundidad de su tratamiento en cada año. Esta omisión lleva a que los proyectos áulicos sean deficientes en el planteo de secuencias para enseñar el tema.

Otro indicador importante es la unificación de los contenidos de Geometría y Medida en un solo eje, lo que da lugar a centrar las actividades en la Medida y desplazar las actividades geométricas.

En libros de 6° y 7° año en tanto, algunos contenidos geométricos aparecen en un mismo nivel, por ejemplo, la clasificación de triángulos sin la debida profundización en el estudio de las propiedades.

En cuanto a la construcción de triángulos la misma se enseña en 7° año sin tener en cuenta la propiedad triangular, siendo éste un tema de 6° año, que debería funcionar como saber enseñado.

Las tareas propuestas sobre construcción de triángulos no tienen en cuenta la función de las variables didácticas, lo cual permitiría generar situaciones de análisis a cerca de la posibilidad de la construcción de un triángulo. Por ejemplo el hecho de variar los lados y ángulos produce nuevos procedimientos que permiten la profundización y complejizarían las tareas a realizar.

En muchos casos, cuando se enseña geometría el docente elige las actividades geométricas en función del libro de texto disponible en la institución, lo cual hemos constatado a través del análisis de Proyectos institucionales y áulicos.

Respecto a las carpetas de los alumnos se observa el mismo fenómeno descrito para los libros de textos y en algunos casos además las actividades geométricas son reemplazadas por las actividades algebraicas.

El trabajo en el aula

Transcribimos a continuación como aparece el tema objeto de conocimiento del presente trabajo en la Planificación Áulica, es decir analizamos la Organización matemática Enseñada.

Tema: Transporte de segmentos y Angulo. Construcción de triángulos.

Los objetivos seleccionados para la implementación de la experiencia, previstos también en el Proyecto Áulico de la Institución donde se realizó la experiencia son:

- *Transportar ángulos y segmentos utilizando regla no graduada y compás.*
- *Construir triángulos utilizando regla no graduada y compás a partir de diferentes informaciones.*
- *Reconocer propiedades del triángulo*
- *Justificar los procedimientos utilizados.*

Teniendo en cuenta la planificación del docente, se elaboró una propuesta que valorizando el uso de variables didácticas y una vez en el aula se establecieron acuerdos de trabajo, condiciones y obligaciones recíprocas entre alumnos y docentes.

Para transponer el estudio de las tareas, técnicas, tecnología y teoría al ámbito del aula, fue necesario que el docente reorganizara la propuesta. El estudio y selección de los problemas incluidos fue un trabajo colectivo, entre los integrantes del Proyecto de Investigación N° 1795, los docentes y alumnos de la cátedra Práctica Docente, que tuvo como base la organización matemática de referencia elaborada en trabajos anteriores.

El trabajo de elaboración de la propuesta didáctica consistió entonces en buscar las tareas (T_i), los procedimientos o maneras de hacer estas tareas llamadas técnicas (τ_i), donde cada procedimiento se justifica con una tecnología (Θ_i) y a su vez esta con una teoría.

Por otro lado, la ventaja de pensar en la actividad matemática como una actividad de modelización recae en poder demostrar que a través de una tarea, por ejemplo:

T₃: Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos

aparecen nuevas condiciones que no están explicitadas, dando lugar a nuevas tareas, a nuevos elementos tecnológicos y teóricos. Por otro lado la importancia del dibujo con sus diferentes representaciones, complementa el estudio de la tarea de modelización.

Los períodos de observación y de trabajo en el aula fueron de sesenta horas cátedras con 40 alumnos de las dos divisiones de 7° año.

Durante la experiencia se desarrollaron cinco fichas, la propuesta didáctica consistía en la presentación de actividades secuenciadas con el objetivo de explorar cuestiones alrededor del transporte de ángulos y de segmentos para la construcción de triángulos.

A modo de ejemplo desarrollaremos sólo la Ficha N° 2, comentando que la actividad de reproducción propuesta en la Ficha N° 1 tuvo como objetivo iniciar con el trabajo argumentativo sobre la utilización de las diferentes técnicas de transporte de ángulos y de segmentos.

Para que los estudiantes logren realizar las construcciones con regla no graduada (o tira de bordes paralelos) y compás es necesario que posean conocimientos como intersección de circunferencia y recta; transporte de segmentos; transporte de ángulos; distancia entre dos puntos y elementos del triángulo.

Para la propuesta en el aula, en el caso de la construcción del triángulo dado *un lado y dos ángulos*, es necesario tener en cuenta la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Para el transporte de segmentos y ángulos los mismos se justifican por los Axiomas de Congruencia:

- Transporte de segmentos
 - Transporte de ángulos
 - Transporte global con papel transparente
- Y las operaciones geométricas elementales que se realizan con el uso del compás
- Trazar una circunferencia de centro y radio dados,
 - Intersección de dos circunferencias, intersección de una recta y una circunferencia,

Análisis a priori versus producción de los alumnos al realizar la Ficha N° 2.

Se elige la Ficha N° 2 como ejemplo por que genera la diversificación de las variables didácticas sirve para generar sub-tareas de las cuales se desprenden otras fichas.

Ficha N° 2: **T₃: Construir un triángulo dado un lado y dos ángulos.**

Cuando se trabaja sólo con un segmento y dos ángulos las variables didácticas permiten pensar sub-tareas para que el alumno resuelva la situación con los

conocimientos previos que posee, al variar los datos, los estudiantes recurren a nuevos procedimientos para afrontar la construcción del triángulo.

En el análisis a priori surgen las siguientes sub-tareas:

T₃₁: Construir un triángulo dado un lado y dos ángulos (uno recto y el otro agudo)

T₃₂: Construir un triángulo dado un lado y dos ángulos agudos iguales.

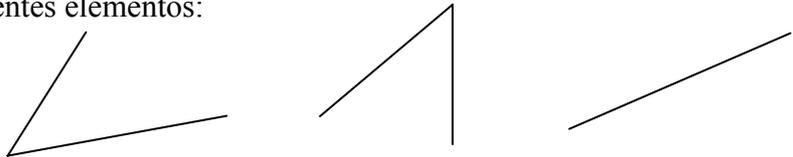
T₃₃: Construir un triángulo dado un lado y dos ángulos agudos distintos.

T₃₄: Construir un triángulo dado un lado y un ángulo agudo y otro obtuso.

Las sub-tareas mencionadas son trabajadas en las Fichas 3,4 y 5, en la última se presenta una tarea que no tiene solución, ya que la suma de los dos ángulos dados supera un ángulo llano.

Para descubrir la condición de la suma de los ángulos interiores igual a dos rectos, los estudiantes transportan ángulos dados, sobre un ángulo llano y observan si lo superan. Entonces concluyen que no podrán efectuar dicha construcción. En cambio si la suma no supera al ángulo llano, se podrá realizar la construcción. Cuando la suma es igual a un ángulo llano concluyen que tampoco se podrá realizar la construcción.

Ficha N° 2: Construir utilizando regla y compás un triángulo con los siguientes elementos:



Escribir el procedimiento que utilizaste para la construcción

En la ficha no se asigna nombre a los ángulos ni segmentos para facilitar las diferentes representaciones que puedan utilizar (o no) los estudiantes. En el momento de institucionalización el docente hará referencia a la conveniencia o no del uso de letras para nombrarlos.

Los alumnos se aproximan a la propuesta según nuestro análisis a priori.

| Análisis a priori de la Ficha N° 2 | Propuesta de los alumnos de la Ficha N° 2 |
|---|--|
| <p>Procedimiento: con tira de bordes paralelos o regla no graduada y compás. Se transporta el lado qr sobre una recta t. Sobre el lado qr se transporta el ángulo rqs (se puede marcar el ángulo para arriba o para abajo del segmento). Sobre el lado qr se transporta el ángulo srq (se puede marcar el ángulo para arriba o para abajo del segmento). Luego el punto donde se cortan las semirrectas de ambos ángulos (que no se encuentran sobre la recta t que contiene al segmento qr) será el punto s.</p> | <p>Procedimiento Alumno 1: Transporta el lado dado sobre una recta. Traza una circunferencia de centro uno de los extremos del segmento ya transportados y radio el segmento dado. Traza otra circunferencia de centro el otro extremo del segmento ya transportados y radio el segmento dado. La intersección dará el vértice del triángulo buscado.</p> <p>Procedimiento Alumno 2: Transporto el lado xy con la regla sobre la recta s. Sobre el lado xy transporto el ángulo yxz con el compás, pinchando en x. Luego sobre el lado xy transporto el ángulo xyz. El punto donde se cortan las semirrectas de ambos ángulos (que no se encuentra la recta s) es el tercer vértice.</p> |

| | |
|--|--|
| | <p>La comprobación que el ángulo obtenido es el mismo que el de la ficha lo realizo usando papel de calcar.</p> <p>Procedimiento 3: Transporto el lado y los ángulos con la regla y el papel de calcar.</p> |
|--|--|

Se observa que por medio de las tres técnicas utilizadas, los estudiantes llegan a construir el triángulo pedido, sin embargo en el caso 3 no utiliza compás y se limita a la técnica de calcar, lo que impide que surjan las posibles variaciones de las variables.

Los Procedimientos 1 y 2 se asemejan al Procedimiento planteado a priori. El segundo hace uso de las letras para nombrar segmento y ángulos, lo que facilita el poder explicar su técnica y además verifica su trabajo utilizando el papel de calcar.

En ningún caso se transportó el ángulo hacia abajo, lo que podría haber generado otro procedimiento.

Conclusiones

El trabajo en el aula demuestra la complejidad de cada uno de los temas lo que lleva a estudiar un campo de problemas con características semejantes y a la vez diferentes en cada una de las cuestiones y mediante el análisis de las posibles construcciones.

Las situaciones planteadas en la sala de clase permitieron generar una familia de problemas dado que al modificar las variables didácticas, los estudiantes generaban otros conceptos geométricos, tales como arco y distancia, otros procedimientos de validación de la construcción a través de la utilización del papel de calcar, formulando en forma satisfactoria que dados dos ángulos rectos o dos obtusos no es posible la construcción de un triángulo.

A través de la puesta en práctica se pudo determinar que bajo ciertas condiciones, como la secuencia presentada y el compromiso de los estudiantes, es posible gestionar la enseñanza de la geometría e identificar cómo la producción de los escolares se aproxima a la organización matemática de referencia.

En relación a la variación de los datos es viable organizar otras situaciones por ejemplo, al dar como datos un lado y dos ángulos surgen las posibles combinaciones de estos: uno recto y otro agudo, dos ángulos agudos iguales, dos ángulos agudos distintos, un ángulo agudo y otro obtuso.

Los estudiantes han realizado y formulado en forma satisfactoria la conclusión de que dados dos ángulos rectos o dos obtusos no es posible la construcción, emergiendo la propiedad “La suma de dos ángulos interiores de un triángulo no puede superar un llano”

Este hecho de situaciones nos llevan a legalizar la función que cumplen las variables didácticas en las actividades de construcción de triángulos y el sentido de los acuerdos para explicar los procedimientos, validar los mismos y respetar el momento de la institucionalización del conocimientos.

En cuanto a las condiciones que dificultaron la tarea de enseñanza fueron entre otras, la no experiencia del docente y de los alumnos en el desarrollo de un momento de socialización del conocimiento. Además falencias de orden epistemológico, es decir, pocos conocimientos de geometría seleccionados para ser enseñados en los proyectos áulicos en los años anteriores y saberes previos endebles.

Referencias

- Alía, D. (2004). *Geometría Plana y Espacial*. Salta, Argentina: Ed. UNSa.
- Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques I* (1), 11-59.
- Beppo Levi (1947) "*Leyendo a Euclides*". Editorial El Zorzal.
- Bosch, M, Fonseca, C. y Gascón J. (2003) *Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares*. Nº 40 /2003. Prepublicaciones de la Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Coxeter, J. (1993) *Fundamentos de la Geometría*. Ed. Trillas.
- Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. ICE.-Horsori, Barcelona.
- Ferrari, C. (1996). *Construcciones con regla y compás*. Revista de Educación Matemática. Volumen 11. Nº 3. Córdoba, Argentina.
- Gascón, J. (2001). *Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático*. Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales. Universidad Nacional de educación a Distancia. España.
- Ibarra y otros (2006) *Fragmentación y desarticulación entre ciclos y niveles en la Educación General Básica y el tercer ciclo de la EGB de la ciudad de Salta, capital*. (Hipótesis emergente de los proyectos de investigación del CIUNSa Nº 898 y 1171), Salta, Argentina
- Itzcovich, H (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Cap. De las construcciones a las demostraciones. Ed. Zorzal.