EVOLUCIÓN DE UNA AEI COMO PRODUCTO DE INVESTIGACIÓN AL CABO DE SEIS IMPLEMENTACIONES CONSECUTIVAS

Viviana Carolina Llanos[1,2], *María Rita Otero*[1,2]
vcllanos@exa.unicen.edu.ar , rotero@exa.unicen.edu.ar
[1]Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As. Tandil, Argentina.
[2]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Resumen
En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al cabo de seis implementaciones del producto didáctico AEI para el estudio de las Funciones Polinómicas de grado dos, en el ámbito de la escuela secundaria argentina. En total participaron de la investigación (N=163) estudiantes de 4[to] Año de la Secundaria. La AEI se ha implementado en dos cursos paralelos durante tres años consecutivos y la práctica adquirida permite afirmar que es posible construir la OML de las Funciones Polinómicas de grado dos, analizando y construyendo las diferentes características de dicha función en los distintos marcos y sistemas de representación. En este trabajo se presentan algunos protocolos de los estudiantes que permiten describir la OM efectivamente reconstruida en el aula y se discuten algunos alcances y limitaciones del dispositivo.

Palabras clave: Actividad de Estudio e Investigación (AEI), Funciones polinómicas de segundo grado, Escuela Secundaria.

1. Introducción

Este trabajo presenta resultados de una enseñanza por AEI en el ámbito de la escuela secundaria argentina, en clases de matemática usuales. La AEI se desarrolla a partir de la cuestión generatriz ¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes? Las posibles respuestas a la cuestión Q permiten generar diferentes AEI. La cuestión generatriz, se inspira en un problema propuesto en la investigación de Régine Douady (1999, 2010, 2011) para el estudio de los signos de las funciones polinómicas, a partir del análisis de los signos del producto de dos funciones lineales $f(x)=ax+b,\ a\neq 0$, cuando solo se conocen las representaciones gráficas de las rectas. En nuestro trabajo se parte de la multiplicación de las rectas por cálculo geométrico, y se espera obtener la curva que resulta de multiplicar dos rectas cuando solo se conoce la representación gráfica y la unidad en los ejes. El análisis de los signos es una información más, entre las características que se requieren para la obtención de la curva razonable.

La implementación de este dispositivo exige modificar el contrato didáctico tradicional de la secundaria, modificación que impacta significativamente en la cronogénesis, la topogénesis y la mesogénesis.

2. Marco teórico

Las nociones de AEI y REI han sido propuestas como instrumentos para enfrentar el proceso de *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las cuestiones que se estudian en la escuela (Chevallard, 2004, 2007). Tanto en una AEI como en un REI el proceso de estudio consiste en una sucesión de pares $P=(Q_i;R_i)_{1\le i\le n}$, siendo Q_i todas las cuestiones centrales del corazón del proceso de estudio y R_i las respuestas a estas cuestiones. A partir de una Q_0 como *cuestión generatriz* del proceso, se generan las posibles cuestiones Q_i que dan lugar a diferentes AEI. La respuesta a esa cuestión denominada $R^{\heartsuit}$ se genera a partir de todas las R_i. Si bien las AEI no resuelven el problema de la *monumentalización*, son viables en nuestra escuela secundaria y permiten comenzar a enfrentar el problema de la monumentalización e instalar algunos elementos de la pedagogía de cuestionamiento del mundo.

3. Metodología

La investigación es de corte cualitativo, etnográfico y exploratorio. Se quiere describir el funcionamiento de una AEI que permite construir las propiedades fundamentales de las funciones polinómicas de grado dos. Las implementaciones fueron realizadas en seis cursos seleccionados intencionalmente por el equipo de investigación en el mismo Establecimiento Educativo. La implementación se está llevando a cabo por tercer año consecutivo, en dos cursos paralelos con un total de (N=163) estudiantes de 4to Año de la Secundaria. Todas las implementaciones fueron realizadas por los investigadores, y se han obtenido los protocolos escritos de cada uno de los estudiantes en todas las clases, se tomaron registros de audio “generales” de la clase y también se realizaron notas de campo. Los protocolos escritos de los estudiantes, se retiran clase a clase, se escanean y se devuelven a los estudiantes en la clase inmediata siguiente, para garantizar la continuidad de su trabajo y para que ellos dispongan permanentemente de sus registros.

4. La AEI:

La AEI diseñada para estudiar las funciones polinómicas de grado dos, permite construir geométricamente la parábola, justificar la simetría de esta curva y la ubicación del mínimo o máximo en el punto medio del segmento que une los ceros. También se pueden analizar en el marco geométrico los casos de raíces de orden par e impar. Luego, se pasa al marco algebraico-grafico para obtener la expresión algebraica de la función partiendo de una expresión factorizada, y luego las expresiones algebraicas en las formas polinómica y canónica. Dentro de este marco se pueden reinterpretar los ceros, sus propiedades, el máximo o mínimo y los signos de las funciones polinómicas. En el marco algebraico-funcional se considera el caso de las raíces imaginarias reingresando en el marco geométrico-funcional, cuando se analiza cómo la traslación de vector $\vec{v}$ de una cierta gráfica puede generar otras. Este método es generalizable a otras funciones polinómicas de grado mayor a dos. La AEI está conformada por 10 situaciones, una actividad de síntesis, tres instancias de familiarización correspondientes a las tareas, 2 síntesis parciales, una síntesis al final de la AEI y dos evaluaciones escolares.

Se parte del cálculo geométrico del producto de rectas. Las tres primeras situaciones permiten construir una gráfica razonable para la curva h que resulta de multiplicar dos rectas, y las variantes entre estas situaciones se dan en las diferentes rectas. En todos los casos $h = f \cdot g$ y en estas situaciones *se* obtiene la curva *razonable* para las funciones polinómicas de grado dos. La curva de h resulta de la identificación de lo que los estudiantes denominan *puntos seguros*: ceros, unos, en algunos casos también el menos uno o múltiplos de la unidad y los signos de h (C^+ y C^-). En esta AEI se destaca el proceso según el cual se prueba la simetría de la curva. Se desarrolla también, una técnica que permite aumentar la cantidad de puntos seguros construyendo triángulos semejantes apropiadamente seleccionados, utilizando como información la unidad. Esta técnica está basada en la tecnología del Teorema de Tales y la proporcionalidad de segmentos.

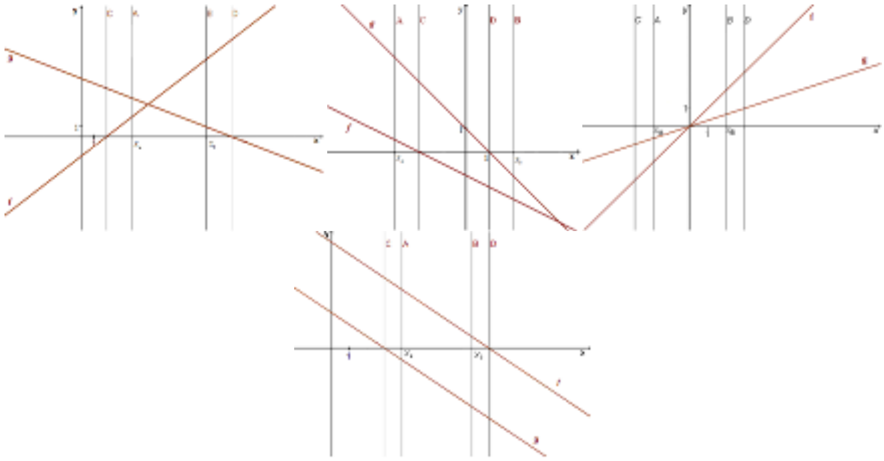

Figura 1: Gráficas correspondientes a las situaciones 1 a 3, de la AEI₁

Las cuestiones planteadas a los estudiantes son: *¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para h? ¿Qué características de la gráfica de h podrías justificar?* Para avanza en la prueba por la simetría de la curva se plantea: *Para todo* x_a *y* x_b *equidistantes de los ceros de cada función*, $\overline{CA} = \overline{BD}$. *¿Es verdad que* $h(x_a) = h(x_b)$ *? ¿Podrías justificar?* Las situaciones que siguen se formulan en el marco algebraico-grafico para que los estudiantes obtengan ahora, la expresión algebraica de *h* a partir de las coordenadas de algunos puntos de *f* y *g*. Para obtener la expresión algebraica de *h* primero obtienen la de *f* y *g* y luego realizan el producto $h = f \cdot g$.

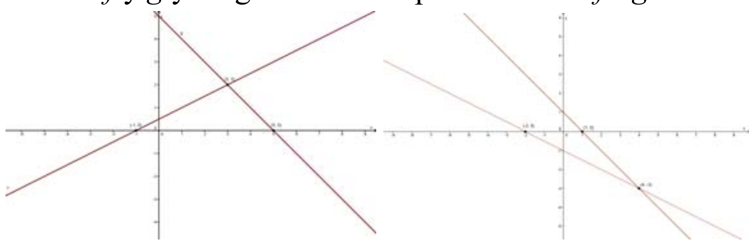

Figura 2: Gráficas correspondientes a las situaciones 4 y 5, de la AEI₁

En ambas situaciones, los estudiantes parten de la multiplicación de las rectas obteniendo así la expresión algebraica de *h* primero en la forma factorizada y luego la polinómica. Se reinterpretan todas las características construidas dentro del marco geométrico-gráfico en el marco algebraico-funcional. Dentro del mismo marco se proponen otras situaciones que son variantes del problema de obtener la expresión algebraica para *h*, pero partiendo de la expresión en la forma polinómica para obtener las formas canónica y factorizada, por la técnica de completar cuadrados. También dentro del marco algebraico-funcional se considera el caso de las raíces imaginarias reingresando en el marco geométrico-funcional. En esta situación se plantea el problema de que no necesariamente todas las parábolas resultan de la multiplicación de dos rectas. En estos casos se analiza cómo la traslación de vector $\vec{v}$ de una cierta gráfica puede generar otras parábolas. Si bien esta es una manera muy diferente de introducir las funciones polinómicas de segundo grado en la escuela tradicional, la generalidad de la cuestión inicial, planteada en el dominio geométrico-funcional, da sentido no solo a la expresión algebraica de la función polinómica de segundo grado, sino también a la posterior construcción de las curvas de todas las funciones polinómicas y las racionales.

Para responder al problema de la "multiplicación geométrica" de las rectas, en todos los casos los estudiantes comienzan por la identificación de los puntos seguros: los ceros y los unos; y analizan también el signo que puede tomar la función h dependiendo de los signos de las rectas f y g que se multiplican. En ninguna de las seis implementaciones la identificación de estas características ha presentado grandes dificultades, aunque las respuestas requieren de un tiempo de maduración, de avances y retrocesos, de discusiones, de acuerdos. Otra cuestión crucial, aunque más compleja, es relativa a la prueba de la simetría de la curva. En todas las implementaciones ha sido posible obtener la respuesta, enfrentando la misma dificultad: identificar sobre qué puntos construir los triángulos semejantes para probar la simetría de la curva por medio del Teorema de Tales. Esto ha permitido obtener otros puntos seguros: los puntos simétricos.

Partiendo de las mismas preguntas, y con estudiantes en condiciones similares, las implementaciones difieren en que "mejoran" las características de las respuestas antes descritas. Así en las implementaciones 1 y 2, de la que participaron (N=51) estudiantes, sólo se pudieron identificar para la gráfica de h los puntos seguros ceros, unos; y los signos de h (C^+ y C^-). Además el hecho de analizar la simetría permite identificar al eje de simetría en el punto medio entre los ceros y aumentar la cantidad de puntos simétricos. La Figura 3 muestra que los estudiantes alcanzan un gráfica razonable para h, pero desconocen el punto donde h interseca al eje de simetría. Si bien esto genera *gráficas razonables* para h, los estudiantes se cuestionaban por el comportamiento de h en el eje de simetría. Esto motivó que la construcción geométrica del producto en esa abscisa, fuera introducida por el profesor, quien no consideró a los alumnos *"capaces"* de llegar a ella.

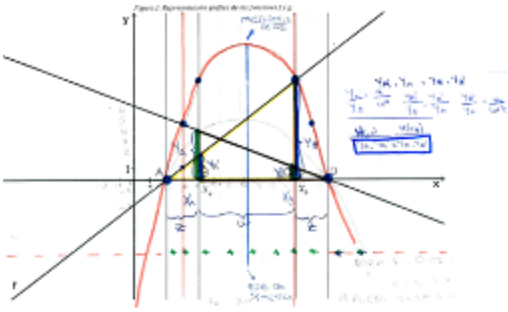

Figura 3: Imagen tomada del alumno A11, correspondiente a la implementación 1.

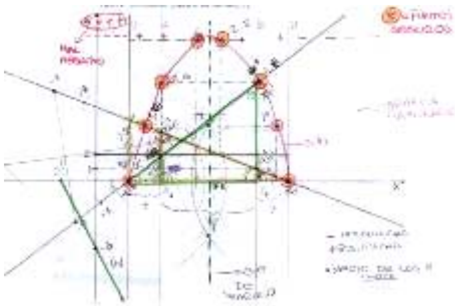

Figura 4: Imagen tomada del alumno A69, correspondiente a la implementación 3.

En las implementaciones 3 y 4, con (N=57) estudiantes, ellos incrementan considerablemente la cantidad de *puntos seguros*. Para esto se valen de los ceros y unos, los menos uno y también múltiplos de la unidad. Estas técnicas no requieren de la construcción de triángulos, que queda reservada a la prueba de la simetría. Sin embargo, los estudiantes realizan algunas inferencias, tales como, que el valor en el eje tiene que ser único y además "el mayor" o "el menor" según el caso, pero no consiguen obtener el valor de h en el eje de simetría. El protocolo A69 permite explicar la diferencia entre la cantidad de puntos a la que se hace referencia, cuando en realidad no cambia el problema a resolver.

En las implementaciones 3 y 4, los estudiantes manifiestan la necesidad de obtener alguna construcción que les permita obtener el geométricamente la ordenada del vértice.

Aquí, la técnica es ingresada al medio por el profesor, y en la segunda parte de la situación uno, los estudiantes obtienen el vértice. El protocolo de A56, muestra lo que se ha mencionado anteriormente: la identificación de los puntos seguros, el análisis de los signos, la construcción para probar la simetría y la construcción para multiplicar geométricamente las rectas en el eje de simetría. Estos resultados, obtenidos en las implementaciones 3 y 4, muestran la relevancia de esta técnica para los estudiantes, pues sus discusiones pasaban por conocer el comportamiento de la función en el eje de simetría, como garantía de la obtención de una "buena" gráfica. Así, durante la síntesis que se solicita en la AEI, un grupo de estudiantes señaló la importancia de esta construcción, y destacó que habían obtenido una especie de "calculadora gráfica" porque la misma construcción podría repetirse en cualquier punto, y que así como se multiplican rectas, se puede hacerlo con cualquier función; pues en realidad, se están multiplicando segmentos.

El resultado anterior, tuvo un impacto grande en términos de mesogénesis y de topogénesis. En las implementaciones 5 y 6 con (N=55) estudiantes, la técnica de la multiplicación geométrica en el eje de simetría ya no ingresa al medio desde el profesor. La situación se modificó, agregándose las preguntas: *¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre f y g en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?* Para que los estudiantes pudieran responder, se les ayudó a identificar los segmentos que se multiplican en el eje de simetría, y a partir allí, la clase discutió qué construcciones se ajustaban más a la respuesta del problema.

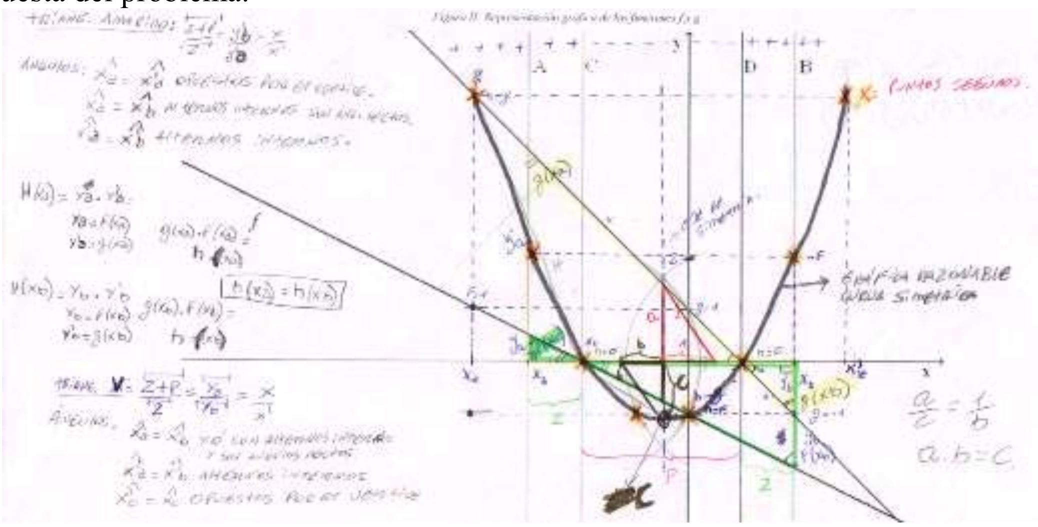

Figura 5: Imagen tomada del alumno A56, correspondiente a la implementación 3.

Retomar las construcciones posibles, permitió explicitar la técnica que permite calcular la multiplicación entre dos segmentos. A su vez, en estas dos últimas dos implementaciones los estudiantes han decidido realizar la construcción en otros puntos, aumentando aún más la cantidad de puntos seguros y su certidumbre de obtener la gráfica más razonable para *h*.

5. Algunas reflexiones finales sobre los resultados obtenidos

La AEI se ha implementado en dos cursos paralelos durante tres años consecutivos. La vastedad de datos y la experiencia acumulada permiten afirmar que es posible construir la OML de las Funciones Polinómicas de grado dos, analizando y construyendo las diferentes características de dicha función en los distintos marcos y sistemas de representación.

- Un aspecto muy importante es la justificación del vértice y la simetría de la parábola, que en la forma tradicional de enseñanza "cae del cielo" y el papel que adquieren los puntos notables, cuando sólo se dispone de la unidad en los ejes.
- Tampoco "caen del cielo" ahora, las posibles formas de representar algebraicamente la función, pues la forma factorizada ingresa al medio como la consecuencia del planteo del producto. Es destacable el trabajo que hacen los estudiantes para mostrar que infinitas rectas con los mismos ceros pueden generar la misma parábola. Es decir, no puede reducirse la función a su expresión algebraica. La llamada forma polinomica es el resultado natural de realizar el producto.
- El hecho de que el vértice está sobre la mediatriz del segmento que une los ceros, que ha sido al principio un resultado en acto, va explicitándose progresivamente, en los distintos marcos.
- También se aborda el problema de las funciones que no pueden provenir del producto de dos rectas, porque no tienen ceros, y se amplía la OM para dar cabida a esta cuestión.
- Otro resultado de gran interés, es el análisis de signos, tarea que los estudiantes realizan en acto desde el inicio, pues necesitan hipotetizar una curva, y en este análisis, la relación entre los ceros y el cambio o no de signo. Esta cuestión es fundamental en las AEI que continúan, relativas a las funciones polinómicas y racionales.
- Es también importante que recuperando nociones geométricas, se arribe al marco funcional y analítico-funcional, los protocolos son muy elocuentes respecto a la interrogación que los estudiantes deben hacer al gráfico para pensar en la curva razonable, cuando sólo disponen de la unidad en los ejes. También es digno de ver cómo los estudiantes despliegan la notación propia del marco funcional, ante la ausencia del recurso numérico.
- La ejecución de las implementaciones no ha sido una tarea sencilla, sobre todo al principio. Un obstáculo importante para el profesor (aparte del diseño) es resistir la incertidumbre de la clase, cuando no "aparece" una posible vía de solución. Es duro vencer la tentación de "tomar la tiza" e invadir el topos del alumno. Este problema se intensifica pues la AEI plantea un retorno a la geometría, que ha sido difícil de recuperar, por su desaparición de hecho en la enseñanza secundaria.
- Vinculado a lo anterior, la cronogénesis en una enseñanza por AEI, dilata el tiempo didáctico, no permitiendo "cumplir el programa", aunque la potencialidad de los conceptos y de los instrumentos adquiridos, con sentido, permite recuperar el tiempo después y desarrollar un recorrido que recubre varios puntos del programa de 4to año y de 5to año.
- La modificación de contrato que se introduce altera fuertemente el proceso de topogénesis. Los estudiantes asumen un compromiso, si aceptan que son responsables de encontrar solución y que pueden

hacerlo! El papel del profesor está ahora más centrado en el proceso de ingeniería didáctica y por supuesto, en las mediaciones que conlleva el diseño de las situaciones y la gestión de la clase. El proceso de toma de responsabilidades del alumno es progresivo y lento; ha requerido el diseño de un conjunto de dispositivos para liberar a los alumnos del “peso” de acertar, de estar en lo correcto, que produce la enseñanza tradicional y del tipo de reforzadores positivos que la enseñanza tradicional utiliza. Un obstáculo importante a sortear es que para los estudiantes el profesor ya no explica!, lo cual para ellos es al principio, un indicador de que “no sabe”. Y si el profesor no sabe, o parece no saber, hay al principio una cierta incertidumbre. Pues, la duda por períodos prologados parece no formar parte del conjunto de recursos cognitivos con que también deben contar los alumnos.

- La evolución que se ha pretendido mostrar entre las tres implementaciones, evidencia que como profesores y responsables de la gestión de la clase, hemos subestimado a los alumnos en varias ocasiones. Es razonable! Este es un teorema en acto muy utilizado en el esquema de ser profesor. Así, en la primera implementación no creíamos posible que los estudiantes acabarían por realizar la construcción geométrica por sí mismos, y en consecuencia, no generamos el espacio para que eso sucediera. Luego, cuando vimos las producciones de los estudiantes y la cantidad de inferencias y acciones que realizaban a partir de los pocos datos disponibles y de la técnica de la construcción geométrica -ingresada al medio por el profesor- decidimos modificar la situación, lo que a su vez generó una mejor adaptación de los alumnos a otras situaciones. Finalmente, en las últimas implementaciones los estudiantes han tomado un papel protagónico en ese y en otros aspectos.

Aunque nuestros resultados son alentadores, aun nos encontramos en una etapa experimental. Consideramos que con sus limitaciones, el dispositivo AEI viabiliza la instalación escolar de algunos elementos de la *pedagogía de la investigación,* siempre que se disponga de una infraestructura escolar mínima. Por otro lado, la generatividad de la cuestión planteada ha permitido la emergencia de otros dos dispositivos AEI_2 y AEI_3 que recuperando estrategias de resolución similares, permiten el encuentro con las OML relativas al estudio de las Funciones Polinómicas y de las funciones Racionales.

6. Referencias

Chevallard, Y. (2004) *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5- 32

Douady, R. (1999) *Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16)*. European Research in Mathematics Education I: Group 1. pp. 113-124

Douady, R. (2010) Communication personnel avec Maria Rita Otero.

Douady, R. (2011) Géométrie, graphiques, fonctions au college. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). Año 6 nº1, pp 1-7. ISSN 1850 - 6666 / NIECYT. Argentina. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.

Llanos, V. C., Otero, .M. R. (2010). *Ecología de las AEI, Actividad y conceptualización en el aula de matemática*. Tesis de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias. En desarrollo.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2011) Evaluar y calificar: algunas reflexiones en torno a las actividades de estudio e investigación (AEI). Actas II Congreso Internacional de Didácticas Específicas. UNSAM. Buenos Aires, Argentina. En prensa.