IMPLEMENTACIÓN DE UNA AEI RELATIVA AL CAMPO CONCEPTUAL DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS EN LA ESCUELA SECUNDARIA: PERSPECTIVA DIDÁCTICA Y COGNITIVA.

Viviana Carolina Llanos[1,2]; *María Paz Bilbao*[1]; *María Rita Otero*[1,2]
[1]Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As. Paraje Arroyo Seco s/n , Tandil, Argentina.
[2]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina
vcllanos@exa.unicen.edu.ar, mpbilbao@yahoo.com.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar

Resumen
En este trabajo se presentan las características del diseño y los resultados de la implementación de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI) para estudiar las Funciones Polinómicas con alumnos de 5[to] Año de la Escuela Secundaria. Se adoptan como referenciales teóricos la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999, 2004), la Teoría de los Juegos de Cuadros de Régine Douady (1986) y la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Gérard Vergnaud (1990). Se presentan algunos resultados que permiten describir la OM efectivamente reconstruida en el aula y se discuten los alcances y limitaciones de este dispositivo.

Palabras clave: Actividades de Estudio y de Investigación (AEI); Funciones Polinómicas; Escuela Secundaria.

1. Introducción

Entre los problemas más frecuentes en la Educación Matemática actual se sitúa la pérdida de sentido de la matemática escolar. Chevallard (2006) considera que la *epistemología escolar* dominante se caracteriza por eliminar las "razones de ser" de las Organizaciones Matemáticas (OM) que se proponen estudiar en la escuela. Este fenómeno denominado *monumentalización del saber* (Chevallard, 2004) presenta a las OM como obras terminadas, valiosas per se, reduciendo así la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a la *"visita de obras cristalizadas y en cierto sentido, muertas"* (Chevallard 2004, 2005).

Se pone todo el énfasis en la búsqueda de una nueva vía, que sitúe en primer plano las cuestiones matemáticas que permitan la emergencia de OM significativas para los estudiantes. El dispositivo que propone Chevallard (2004) denominado Actividades de Estudio y de Investigación (AEI) introduce la *razón de ser* de la Organización Matemática Local (OML) que se quiere construir a partir del estudio de una "situación del mundo" a la que se tiene que dar respuesta. Toda AEI surge de una cuestión generatriz Q_0 que permite hacer surgir un tipo de problemas y una técnica de resolución, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se está desarrollando. Esta investigación se propone: diseñar, implementar y evaluar una AEI relativa a las funciones polinómicas en 5[to] Año de la Escuela Secundaria y describir la OM que efectivamente se reconstruye en el aula a partir del diseño propuesto.

2. Marco Teórico

El trabajo adopta los aportes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999). Se propone superar los fenómenos didácticos, denominados por Chevallard (2004, 2005) *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las cuestiones que se estudian en la escuela. Se adoptan como dispositivo para enfrentar dicho problema, las *Actividades de Estudio e Investigación* (*AEI*) (Chevallard 2004, 2005, 2006, 2007). Partiendo de la complementariedad entre referenciales teóricos, nuestro trabajo también utiliza la Teoría de Juegos de Marcos de Régine Douady (1986, 1999, 2011) tanto para el diseño como para el análisis del significado de un mismo concepto en diferentes marcos, y la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Gérard Vergnaud (1990, 2009) porque nos interesa analizar el aprendizaje de los estudiantes, la *actividad* y la *conceptualización*; aunque dichos resultados no se describan en este trabajo.

3. Preguntas de la Investigación:

- ¿Qué restricciones se producen cuando se implementa una Actividad de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria? ¿Qué modificaciones son necesarias?
- ¿Qué Organizaciones Matemáticas se reconstruyen en el aula a partir de la implementación de la AEI diseñada para estudiar las Funciones Polinómicas?

4. Metodología

La investigación es de corte cualitativo, etnográfico y exploratorio. Se busca describir y examinar cómo funciona este dispositivo alternativo a una enseñanza tradicional, ya que aun hay pocas investigaciones relativas a las AEI como dispositivos que retoman la preocupación de la reconstrucción funcional de la matemática dando respuesta a ciertos tipos de situaciones problemáticas y sitúan las cuestiones en primera línea, como punto de partida del saber matemático que se construye en el aula.
La AEI se implementó en dos cursos del mismo Establecimiento Educativo intencionalmente seleccionados por el investigador. Los alumnos que participaron de la investigación son (N=59) estudiantes de 5to Año de la Secundaria, organizados en grupos de no más de cuatro alumnos, cuya conformación fue decidida por ellos mismos. Las clases estuvieron a cargo de los investigadores. Se obtuvieron los protocolos escritos de los estudiantes, se tomaron registros de audio de la clase y también se registraron notas de campo. Para analizar los resultados, se generaron categorías de análisis que permiten describir las respuestas que efectivamente los estudiantes construyen en el aula.

5. Características de la AEI y análisis de los datos

Este trabajo continúa y profundiza la investigación que viene siendo desarrollada por Otero y Llanos (2011) que genera un REI integrado por un conjunto de AEI en torno a la cuestión generatriz Q_0 ¿Cómo multiplicar o dividir dos curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes? Las posibles respuestas involucran la tecnología del cálculo geométrico y permiten generar diferentes AEI. La AEI_1 permite reconstruir la Organización Matemática Local (OML_{FPD}) relativa a la función polinómica de segundo grado, partiendo de la multiplicación de dos rectas, la AEI_2 permite reconstruir la OML_{FP} de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales, en principio multiplicando tres rectas, o parábolas con rectas y por último, si se trata de la división de rectas, o de rectas y parábolas, o entre parábolas, se construye una AEI_3, que permitiría construir la OML_{FQ} de las funciones racionales. En este trabajo, se describen los resultados de dos implementaciones correspondientes a la AEI_2 que permite reconstruir la OML_{FP} de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales. (Bilbao 2011, Otero, Llanos, 2011).

Nos inspiramos en el trabajo de Régine Douady (1986, 1999, 2010) para el estudio de los signos de las funciones polinómicas. La situación diseñada por Douady (1999) propone analizar los signos del producto de dos funciones lineales, teniendo como datos únicamente sus representaciones gráficas. En las investigaciones AEI_1 y AEI_2 se parte de la multiplicación geométrica de dos curvas, teniendo solamente como dato la representación gráfica de las curvas, y la unidad en los ejes. El problema requiere obtener una gráfica razonable de la curva que resulta de la multiplicación de otras curvas del mismo tipo, de grado menor. En estas AEI, el análisis de los signos es una información más, entre las características que se requieren para la obtención de la curva razonable.

AEI_2: nociones relativas a las Funciones Polinómicas

Toda la AEI_2 está conformada por un conjunto de 8 situaciones, seguidas estas por una síntesis y ejercicios y problemas que permiten mejorar la técnica construida, y por último, la evaluación escolar (Llanos, Otero, 2010). El diseño de las situaciones que conforman la AEI_2 parte desde el marco geométrico. En principio, y al igual que la AEI que le precede (AEI_1) parte de la construcción geométrica de la curva que resulta de la multiplicación de otras funciones del mismo tipo de grado menor. En esta AEI_2 las tres primeras situaciones son variantes del mismo problema: en la situación 1 la gráfica para *p* resulta de la multiplicación geométrica de tres rectas, mientras que en la 2 y 3 de la multiplicación entre una parábola y una recta, diferenciadas estas por la cantidad de ceros que tiene la parábola que se multiplica, generando en todos los casos la curva de las funciones polinómicas de grado tres. Las variantes de estas situaciones, se presentan en la Figura 1.

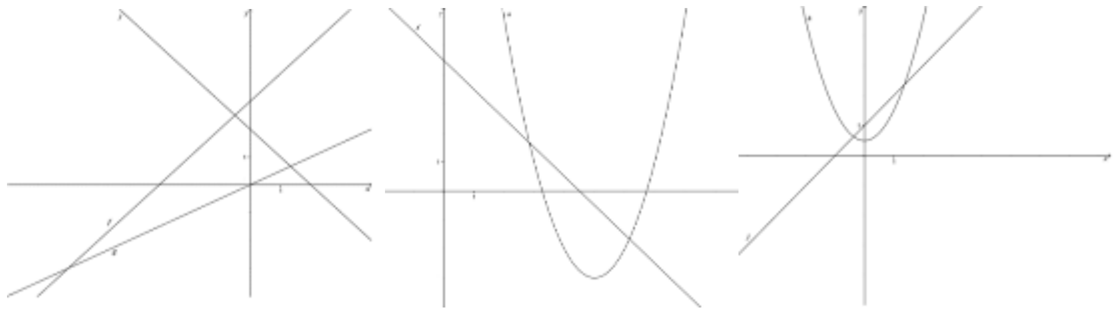

Figura 1: Gráficas correspondientes a las situaciones 1 a 3

Las cuestiones que permiten a los estudiantes obtener la construcción geométrica de la curva son: ¿Cuáles son los puntos seguros y los signos de *p*? ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para *p*? ¿Qué características de la gráfica de *p* podrías justificar? La obtención de la curva de *p* resulta de la identificación de los puntos seguros (signos C^+ y C^-, ceros, unos y en algunos casos también el menos uno) y la construcción de triángulos semejantes, utilizando como información la unidad en el eje x -construcciones generadas en la AEI_1-. Las estrategias de cálculo geométrico generadas en la AEI_1 son recuperadas por los estudiantes sin inconvenientes para la obtención de las respuestas en la AEI_2.

Con las situaciones 4 y 5 diseñadas desde el marco algebraico-funcional se "ingresa" en las expresiones algebraicas de las funciones polinómicas, siempre en principio como la multiplicación de las funciones representadas gráficamente y luego se obtiene la expresión general. Para la obtención de la expresión algebraica de *p*, tienen como información las representaciones gráficas de las curvas y algunos puntos a partir de los cuales obtienen las expresiones algebraicas de las funciones que se multiplican. La Figura 2 corresponde a las representaciones gráficas de las funciones que se multiplican y los puntos seguros indicados para cada caso, correspondientes a dichas situaciones.

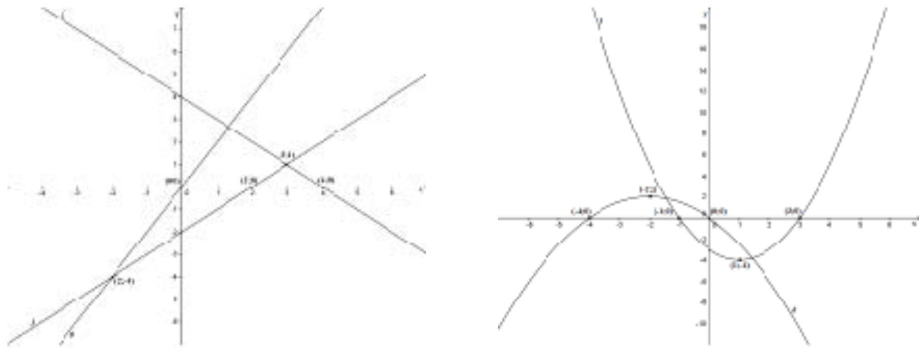

Figura 2: Gráficas correspondientes a las situaciones 4 y 5

En estas situaciones se solicita: obtener las fórmulas para *p* en forma factorizada y polinómica. Graficar *p* e indicar las características de la gráfica que se pueden justificar. A partir de los puntos que se indican en las representaciones gráficas, los estudiantes obtienen las expresiones algebraicas de las funciones representadas gráficamente, después expresan al producto de esas funciones en la forma factorizada y por último, la expresión general de la función polinómica -por medio de la propiedad distributiva entre dichas expresiones- , y no como una imposición no justificada. Estos casos se analizaron para la AEI_1 relativa a las funciones polinómicas de grado dos, y por lo tanto la obtención de las respuestas tampoco presentó grandes dificultades para los estudiantes en el sentido que esta AEI_2 corresponde a una ampliación y generalización de la anterior.
Una vez obtenida la expresión algebraica de la función en las formas polinómica y factorizada, se continúa con la situación 6 en la cual se solicita a los estudiantes propongan ejemplos de distintas funciones polinómicas, cuyos grado varíen de uno a cuatro, permitiendo construir las propiedades de los ceros, en particular analizar su multiplicidad en las funciones de grado par e impar. Los ejemplos que se solicitan tienen que ser relativos a: (a) una función de grado uno que no tenga ceros reales y una que tenga sólo un cero real; (b) una función de grado dos que no tenga ceros reales, una que tenga sólo un cero real y otra que tenga los dos ceros reales; (c) una función de grado tres que no tenga ceros reales, una que tenga sólo uno, otra que tenga sólo dos y otra que tenga los tres ceros reales; (d) una función de grado cuatro que no tenga ceros reales, una que tenga sólo un cero real, una que tenga sólo dos ceros reales, otra que tenga sólo tres ceros reales y otra que tenga los cuatro ceros reales.
De esta forma se "invita" a los alumnos a proponer ejemplos y analizar las propiedades de los ceros y las diferencias para las funciones de grado par e impar, discusión que derivó en las cuestiones ¿Cuántos ceros tiene una función de grado par? ¿Y una de grado impar?

Hasta esta situación, los estudiantes construyen geométricamente la curva de la función polinómica que resulta de la multiplicación de otras del tipo de grado menor, se avanza en la obtención de las expresiones algebraicas de las funciones, en principio en la forma factorizada, y después polinómica y en la última de las situaciones se analizan las propiedades de los ceros diferenciando las mismas entre las funciones de grado par e impar.

Con las últimas situaciones, 7 y 8, se propone construir, explicar y justificar una técnica para realizar las operaciones con polinomios, no sólo de forma algebraica sino también gráfica. En la situación 7 los estudiantes tienen que responder a la tema de cómo obtener una técnica para sumar, restar y multiplicar polinomios, mediante las cuestiones ¿Cómo se realizan las operaciones suma, resta y multiplicación de polinomios? ¿Qué técnicas proponen para hacerlo? Como la multiplicación está presente desde el origen de la AEI, esta operación no presentó grandes problemas. Para atender las dificultades detectadas en las operaciones suma y resta, como por ejemplo, el hecho de que los estudiantes no concebían la suma o resta de polinomios si estos no eran homogéneos; se propone la situación 8. Se solicita que los alumnos establezcan relaciones entre los polinomios propuestos en la situación, y analizar además el comportamiento de las mismas en la representación gráfica.

Es decir, en esta última situación se solicitó a los estudiantes que dados cuatro polinomios: *P(x)*, *Q(x)*, *T(x)* y *M(x)* tal que: $P(x)=x^3-x+3$; $Q(x)=x^2-2$; $T(x)=x^3+x^2-x+1$ *y* $M(x)=x^3-x^2-x+5$, respondan a la cuestión ¿Cuál es la relación entre los polinomios *P(x)*, *Q(x)* y *T(x)*? ¿Y entre *P(x)*, *Q(x)* y *M(x)*? Para ello, se presenta en la Figura 3 la representación gráfica de las curvas y la tabla. Ambas permiten el espacio para que los alumnos puedan verificar el comportamiento entre las funciones mencionadas en algunos puntos importantes, que ellos proponen para resolver dicha cuestión.

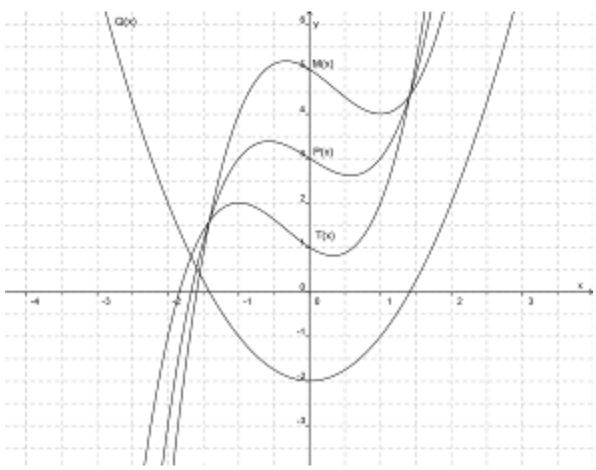

Figura 3: Representación gráfica de *P(x)*, *Q(x)*, *T(x)* y *M(x)*

Puedes utilizar la siguiente tabla para comprobar algunos puntos:

x	$P(x)=x^3-x+3$	$Q(x)=x^2-2$	$T(x)=x^3+x^2-x+1$	$M(x)=x^3-x^2-x+5$

Con esta situación, los estudiantes construyen las técnicas para sumar y restar polinomios, y pueden analizar el comportamiento de estos resultados también gráficamente.
La *síntesis* y los *ejercicios y problemas* (Otero, 2011) que se propone a los estudiantes están orientados a confirmar y examinar lo construido, además de completar la AEI para el estudio de las funciones polinómicas. La síntesis está integrada por las siguientes nociones matemáticas: función polinómica (polinomios, polinomios iguales, polinomio nulo), ceros de la función polinómica. Operaciones con polinomios (suma, resta y multiplicación de polinomios). División de polinomios. Técnicas para factorizar polinomios. Divisibilidad de polinomios, el método de Gauss, los casos de raíces múltiples, conjuntos de positividad y negatividad. Representación de la gráfica de la función polinómica. A partir de esta síntesis, se recupera todo lo construido en las situaciones 1 a 8 anteriores, y además se analiza la operación división que no recibió el mismo tratamiento que las demás operaciones, cuestión que va a ser superada en las implementaciones que siguen.
La evaluación escolar está conformada por tres situaciones que permiten recuperar los aspectos más importantes de las ocho que conforman la AEI, y también algunos aspectos estudiados en la síntesis. La primera situación permite recuperar la construcción geométrica de la función polinómica, la segunda consiste en recuperar la obtención de la expresión algebraica, dada la representación gráfica y algunos puntos, en las formas factorizada y polinómica. La última de las situaciones retoma las cuatro operaciones estudiadas: suma, resta, multiplicación y división de polinomios.

6. Algunos resultados
En lo que respecta a la OM efectivamente reconstruida, la AEI diseñada para estudiar las funciones polinómicas permitió:

- Obtener la gráfica de *p* por cálculo geométrico, y justificar las características de la gráfica, desde el marco geométrico-gráfico. En este marco, desde la situación 1, se introduce el problema del análisis de la paridad de los ceros analizando los casos de las funciones polinómicas de grado tres con un cero y tres ceros reales.
- Obtener con relación al marco algebraico- funcional, las expresiones para *p* por cálculo algebraico del producto de curvas. Esto, no presentó problemas a los estudiantes ya que obtienen la expresión polinómica sin grandes dificultades, partiendo de la expresión algebraica de las funciones que se multiplican y realizando la propiedad distributiva entre las mismas. El hecho de que los alumnos comiencen con el estudio de la función polinómica a través de la multiplicación de distintas curvas les permitió, por un lado, obtener la expresión de la función en forma factorizada sin dificultades; y por otro, cuando se realizo el estudio de las operaciones con polinomios, los alumnos no tuvieron dificultades en construir, explicar y justificar una técnica para realizar la multiplicación entre polinomios aunque les resulto más "complicado" proponer una técnica para la suma y la resta. Esta dificultad podría solucionarse buscando una mayor integración entre los marcos geométrico, gráfico - funcional y algebraico, que permita a los estudiantes dar sentido geométrico a la suma y a la resta de polinomios.
- Abordar el problema de la multiplicidad de los ceros desde el marco algebraico, funcional y geométrico; tanto en la situación 5 donde se estudia el

producto de dos funciones que no tienen ceros reales, hasta la situación 6 donde se generalizan las propiedades de los ceros para las funciones de grado par e impar. Los resultados de esta situación son muy interesantes, pues los alumnos la resuelven sin inconvenientes y esto se debe a que para ellos es natural, espontáneo, debido a la cuestión generatriz de la AEI, preguntarse por las posibles formas de descomposición de una función polinómica.

La AEI implementada permitió obtener resultados auspiciosos que a su vez señalan la necesidad de algunas modificaciones y su ampliación para futuras implementaciones. Entre otras cosas se espera poder analizar el papel de los ceros y su multiplicidad con relación al signo de una función polinómica, en el análisis de las funciones pares e impares; y avanzar también hacia la división de polinomios por la técnica del cálculo geométrico.

7. Referencias

Bilbao, M. P. (2011) *Actividades de Estudio e Investigación (AEI) para la Enseñanza de nociones relativas a las Funciones Polinómicas en la Escuela Secundaria,* Tesis de Licenciatura en Educación Matemática, fecha de defensa 17 de Junio de 2011, UNCPBA

Chevallard, Y. (2004) *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2005) *La didactique dans la cité avec les autres sciences*. Symposium de Didactique Comparée, Montpellier 15-16.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Conferencia plenaria de apertura del 4º congreso de la *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, 17-21 de Febrero de 2005. Publicado en los *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Universitat Ramon Llull, Barcelona, 2006, 21-30.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5- 32

Douady, R. (1999) *Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16)*. European Research in Mathematics Education I: Group 1. pp. 113-124

Douady, R. (2010) Communication personnel avec Maria Rita Otero.

Douady, R. (2011) Géométrie, graphiques, fonctions au college. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). Año 6 nº1, pp 1-7. ISSN 1850 - 6666 / NIECYT. Argentina. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/. Indexada en LATINDEX, DIALNET, DOAJ, RedALyC, SciELO

Llanos, V. C., Otero, .M. R. (2010). *Ecología de las AEI, Actividad y conceptualización en el aula de matemática*. Tesis de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias. En desarrollo.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2011) Evaluar y calificar: algunas reflexiones en torno a las actividades de estudio e investigación (AEI). Actas II Congreso Internacional de Didácticas Específicas: Poder, disciplinamiento y evaluación de saberes. Universidad Nacional de San Martín. Buenos Aires, Argentina. 30 de Septiembre al 2 de Octubre de 2010. En prensa

Vergnaud. G. (1990). *La théorie des champs conceptuels.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.

Vergnaud, G; et. Al (2009). *A aprendizagen MATEMÁTICA na perspectiva da Teoría dos Campos Conceituais.* Editora CRV, 2009. ISBN 978-85-62480-28-7.