

DISPOSITIVO DIDÁCTICO PARA EL ESTUDIO DEL TEOREMA DE ÁNGULOS INSCRIPTOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

Elisabeth Marín¹, Ana Rosa Corica^{1,2}

1. Facultad de Ciencias Exactas – UNCPBA
2. CONICET - Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología
marinelisabeth@yahoo.com.ar, acorica@exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo presentamos resultados parciales del diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (Chevallard, 2004), para la enseñanza de ángulos inscritos en una circunferencias en la escuela secundaria. Con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) se diseñó la AEI, se analizaron las producciones de los estudiantes y el rol del profesor durante el proceso de estudio. Los principales resultados indican que para los estudiantes resolver una situación es dar respuesta a la demanda del profesor. No parecen tener la necesidad de explicitar el entorno tecnológico – teórico que justifica esa manera de hacer. Esta situación requirió de un esfuerzo constante por parte del profesor para que los alumnos argumenten el trabajo realizado.

Palabras clave: estudiantes, secundaria, dispositivo didáctico, entorno tecnológico - teórico, geometría.

1. Introducción

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia en la que se propone el diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (Chevallard, 2004, 2006, 2007) para la enseñanza de ángulos inscritos en circunferencias en la escuela secundaria. La problemática de la enseñanza de la geometría ha sido considerada en los últimos años como objeto de investigación por numerosos investigadores (Báez, Iglesias, 2007; Barrantes, Blanco, 2005; Espinoza, 2007; Gamboa y Ballesteros, 2010, Gascón, 2003, Itzcovich, 2005; Roditi 2004; entre otros). En particular, se destaca que el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en los colegios como en la formación docente. De esta manera, se imposibilita a los alumnos conocer otro modo de pensar que supone la posibilidad de recurrir a propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas así como inferir y producir nuevas propiedades (Itzcovich, 2005). La geometría es considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural de las personas, tanto por su aplicación en diversos contextos (Báez e Iglesias, 2007); como por su contribución en el desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjutar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

Aquí presentamos resultados parciales del diseño y la primera implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) para el estudio de ángulos inscriptos en una circunferencia. En principio, la intención de la AEI propuesta radica en promover un análisis que permita concluir en el teorema de los ángulos inscriptos. Con el estudio de las tareas se intenta promover en los estudiantes la experiencia de la construcción, la toma de decisiones acerca del uso de tal o cual herramienta, el reconocimiento de la

unicidad o no de resultados, y preparar el terreno para la entrada de los alumnos en producciones más argumentativas.

2. Marco Teórico

En este trabajo se adopta como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2004, 2006, 2007, Ladage, Chevallard, 2010). Siguiendo las líneas recientes de investigación que propone la teoría, se plantea la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no constituyan *monumentos* que el profesor *enseña* a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Las Actividades de Estudio e Investigación (AEI) son dispositivos propuestos para enfrentar el proceso de monumentalización del saber y para hacer vivir lo que Chevallard denomina la pedagogía de la Investigación en la clase de Matemática (Ladage, Chevallard, 2010). Este dispositivo retoma la preocupación de la reconstrucción funcional de los saberes matemáticos como respuesta a ciertas cuestiones fundamentales. Así, se trata de superar la estructura binaria clásica que se caracteriza por la presentación de elementos tecnológicos – teóricos y luego tareas como *medio* para la aplicación de los primeros. Las AEI promueven una epistemología “*funcionalista*” que concibe a la matemática como un instrumento para aportar respuestas a cuestiones problemáticas que trascienden el ámbito escolar.

Toda AEI surge de una cuestión generatriz inicial que permite hacer surgir un tipo de problemas y una técnica de resolución, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender la actividad matemática que se está desarrollando (Ladage, Chevallard, 2010).

3. Metodología

En este trabajo se utilizaron técnicas metodológicas cualitativas de corte exploratorio y descriptivo, pues se propone desarrollar, implementar y evaluar un dispositivo didáctico que, basado en la pedagogía de la investigación, se aleje de la tradicional enseñanza de la geometría.

Según el referencial teórico asumido, como actividad previa al diseño de las AEI es necesario elaborar un modelo epistemológico de referencia (MER). El MER es una herramienta para el análisis de procesos didácticos concretos. Es decir, el diseño tuvo en cuenta que la AEI se encontraba orientada a estudiantes de tercer año de la escuela secundaria argentina. Al definir el MER es necesario proponer una cuestión generatriz elemental que dé lugar a la construcción de Organizaciones Matemáticas (OM) articuladas e integradas. Dicha cuestión es la siguiente: *¿Cuáles son las propiedades de los cuadriláteros cíclicos?*. Esta permite el trazado de un *mapa* que es formulado en términos de posibles ramificaciones de la cuestión generatriz en cuestiones cruciales y de las respectivas respuestas intermedias o provisionales. El estudio sobre cuadriláteros cíclicos aborda las nociones de ángulo, circunferencia, ángulos inscritos en una circunferencia y cuadriláteros, los cuales permiten fortalecer, conocer y ampliar el desarrollo disciplinar de la geometría. Por razones de espacio, aquí no se desarrollará el MER.

A partir del MER, se propuso la AEI para el estudio de ángulos inscriptos en una circunferencia. Una vez descrita la sucesión de OM que emergen como respuesta a las cuestiones generatrices de la AEI, cuya cuestión inicial es *¿Cuáles son las relaciones que se establecen entre los ángulos inscriptos en un arco de circunferencia y elementos*

de la misma?, se pasó a describir el nivel de ingeniería didáctica. Si el estudio de una cuestión Q requiere la construcción o reconstrucción de OMs, este proceso de reconstrucción requiere al menos de una organización didáctica (OD). A su vez, estas se completan con la descripción de la dinámica del proceso de estudio que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) en términos de momentos de estudio: Momento del primer encuentro, momento de la exploración, momento de la constitución del entorno tecnológico – teórico, momento del trabajo de la técnica, momento de la institucionalización y momento de la evaluación.

Es necesario destacar que en la escuela la pedagogía de la investigación (Chevallard, 2007, 2009) funcional al dispositivo AEI, requiere de cambios rotundos en cuanto a la mesogénesis, topogénesis y cronogénesis. La génesis del medio constituye una dimensión central, y resulta de vital importancia el trabajo conjunto del profesor y sus alumnos. Se requiere propiciar un ámbito de estudio particular, donde los alumnos puedan pensar con otros, intercambiar y exponer sus ideas, consensuar el saber reconstruido sin temor a equivocarse.

El diseño e implementación de la AEI implicó nueve encuentros. La implementación de la AEI se desarrolló en un curso de tercer año de la Escuela Secundaria Básica de la Escuela Normal, “Bernardino Rivadavia” de la ciudad de Azul, en Argentina. El grupo estaba constituido por 24 alumnos. Según el profesor titular del curso, el rendimiento de los estudiantes en el área de matemática fue bueno, y contaban con los conocimientos previos suficientes para poder realizar la AEI.

La implementación de la secuencia fue realizada por una de las investigadoras, mientras que el profesor titular del curso permaneció como observador no participante.

Las clases de matemáticas se desarrollaban en tres encuentros semanales: dos encuentros de 60 minutos de duración y uno de 120 minutos.

La AEI implementada implicó el estudio de tareas que derivó a la institucionalización de las siguientes propiedades:

- *Todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es la mitad del ángulo central correspondiente o, reciprocamente, Todo ángulo central es el doble del ángulo inscripto correspondiente al mismo arco de circunferencia.*
- *Los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia tienen la misma amplitud.*
- *Todos los ángulos inscriptos que abarcan una semicircunferencia tienen una amplitud de 90°.*

En este trabajo sólo presentamos resultados, en relación a las producciones de los estudiantes, que permitieron concluir en el teorema de ángulos inscriptos en una circunferencia. El estudio de este teorema permitió posteriormente analizar nuevas relaciones de los ángulos inscriptos con otros elementos de la circunferencia, así como también el estudio de propiedades de los cuadriláteros cílicos.

4. Resultados y discusión

A continuación, presentamos una síntesis de los principales resultados de la implementación de una parte de la AEI. Este estudio se realizó en 4 clases y permitió la institucionalización del teorema de ángulos inscriptos en una circunferencia.

La primera clase se desarrolló en un encuentro de 120 minutos de duración. La situación 1 consistió en trazar ángulos inscriptos y ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia. Aquí el momento prioritario fue el momento exploratorio. Pues, los alumnos recuperaron las OM construidas en años anteriores y elaboraron una técnica que les permitió trazar el ángulo central correspondiente a los ángulos inscriptos

dibujados, y los ángulos inscriptos correspondientes a los ángulos centrales presentados en la situación.

Aquí se inició un análisis del trabajo de construcciones geométricas, partiendo de la premisa de que, bajo ciertas condiciones, las construcciones con los instrumentos clásicos de la geometría permiten explorar, identificar, conjutar y validar propiedades de las figuras.

Con esta primera situación los alumnos analizaron las características de los ángulos inscriptos y ángulos centrales en un arco de circunferencia, lo que constituyeron herramientas necesarias para ser utilizadas en las próximas tareas. Los alumnos tomaron decisiones acerca de la unicidad o no de las construcciones de ángulos inscriptos y de ángulos centrales, lo que involucra un razonamiento con tintes deductivos. También reflexionaron sobre ciertas condiciones que deben cumplir los ángulos trazados.

En el trabajo de los estudiantes se observó una falta de necesidad de justificar las realizaciones. Las producciones se presentan sin un entorno tecnológico explícito.

La segunda clase correspondió a una sesión de 60 minutos y se propuso el estudio de la siguiente situación:

Trazar una circunferencia de centro O y radio r. Ubicar tres puntos (A, B y C) en la circunferencia de tal manera que el ángulo ABC sea de 30° y el lado AB pase por el centro de la misma. Sin utilizar el transportador, responde las siguientes preguntas:

(a) ¿Es posible determinar la amplitud del ángulo central AOC? ¿Por qué?

El objetivo de la situación es que los alumnos establezcan la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central en un mismo arco de circunferencia.

En el hacer de la situación tuvo lugar como momento prioritario el momento exploratorio. Los alumnos debieron utilizar propiedades estudiadas años anteriores y recuperar lo realizado en la clase anterior para poder resolver.

La principal dificultad a la que se enfrentaron los estudiantes al resolver, estuvo relacionada con realizar la construcción, en particular para determinar los puntos A, B y

C de tal manera que el ángulo \hat{ABC} sea de 30° y el lado \overline{AB} pase por el centro de la circunferencia. Ante esta situación el profesor realizó algunas preguntas para orientar la realización de las construcciones.

Al intentar responder la pregunta a) se observó que algunos grupos midieron con el transportador para lograr tener una aproximación del valor del ángulo. Otros estudiantes justificaron sus resoluciones identificando el triángulo isósceles determinado en el interior de la circunferencia, por petición del profesor de hacer explícito los razonamientos empleados. A partir de esto, establecieron las relaciones y propiedades entre los diferentes objetos geométricos.

La tercera clase correspondió a una sesión de 60 minutos. El profesor indicó trabajar sobre la situación que se presenta a continuación, y que es continuación de la situación propuesta en la clase anterior:

(b) Determina un punto D, en el arco AB que no contiene al punto C, de tal manera que el ángulo DOC sea recto. ¿Es posible conocer el valor del ángulo inscripto DBC? Justifica.

En el hacer de esta situación la principal dificultad que detectó el profesor estuvo vinculada a construir y justificar las producciones realizadas. Esto requirió que el profesor interviniere para orientar la actividad de los estudiantes.

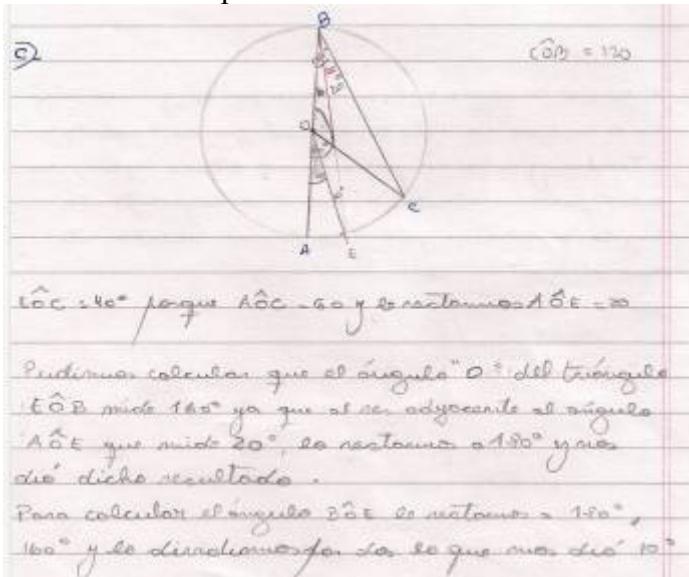
A medida que los estudiantes fueron trabajando se pudo observar la explicación de los resultados obtenidos.

Luego de una discusión de las producciones de los estudiantes, el profesor propuso responder la pregunta (c).

(c) Determina en el arco AC que no contiene al punto B, un punto E de tal manera que el ángulo AOE tenga una amplitud de 20° . ¿Es posible determinar la amplitud del ángulo inscripto EBC? ¿y del ángulo central EOC? Justifica.

Los alumnos trabajaron aproximadamente 15 minutos en forma grupal. Para determinar la amplitud de los ángulos indicados los alumnos recurrieron a propiedad de ángulos adyacentes, propiedades de triángulo isósceles y propiedad de la suma de ángulos interiores de un triángulo.

Una vez terminado el trabajo de cada grupo, el profesor propuso una puesta en común. De los 7 grupos conformados para esta clase, sólo el grupo 1 fue el que propuso un medio tecnológico explícito para fundamentar las amplitudes de los ángulos. El registro de la carpeta de los estudiantes se presenta a continuación:



Grupo 1

Al finalizar la discusión, el profesor solicitó a los alumnos intentar resolver la siguiente situación para el próximo encuentro:

Teniendo en cuenta los esquemas realizados, completar la siguiente tabla. Luego intenten responder las preguntas (d) y (e) correspondientes al problema 2.

Arco de circunferencia	Angulo Inscripto	Angulo central
AC		
CD		
AE		
Otros...		

- d) ¿Qué relación se establece entre cada ángulo inscripto determinado en los ítems anteriores y el ángulo central correspondiente a cada uno de ellos?
 e) ¿Podrías afirmar que dicha relación es válida para todo ángulo inscripto? Justifica.

En la cuarta clase, los diferentes grupos comentaron las resoluciones propuestas a la situación solicitada por el profesor en la clase anterior. Los estudiantes indicaron haber encontrado la misma relación entre los ángulos inscriptos y los ángulos centrales correspondientes al mismo arco de circunferencia.

El profesor dibujó un esquema y la tabla en el pizarrón. Cuatro alumnos pasaron al pizarrón a identificar los ángulos determinados en un mismo arco de circunferencia y a completar la tabla. En el hacer de los estudiantes, se observó que se recuperaron elementos tecnológicos que emergen del hacer de la situación 1. Reconocieron el ángulo inscripto y el ángulo central correspondiente al mismo arco de circunferencia y observaron la amplitud de ambos.

A continuación se puede observar en la resolución del grupo 5:

arco de circunf.	áng. inscripto	áng. central
\widehat{AC}	30°	60°
\widehat{CB}	45°	90°
\widehat{AE}	10°	20°
\widehat{AD}	15°	30°

• todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es la mitad del ángulo central correspondiente al mismo arco de circunferencia.
 • todo ángulo central es el doble del ángulo inscripto correspondiente al mismo arco de circunferencia.

Grupo 5

En general, los grupos pudieron determinar la relación establecida entre los ángulos inscriptos y los ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia.

A continuación el profesor preguntó a los grupos acerca de la pregunta (e). Los alumnos recuperaron elementos tecnológicos que emergen del hacer del problema 1 y observaron que la relación es válida para las tres posiciones del centro de la circunferencia respecto al ángulo inscripto. De esta manera, quedó institucionalizada la siguiente relación:

"Todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es la mitad del ángulo central correspondiente" o, recíprocamente, "Todo ángulo central es el doble del ángulo inscripto correspondiente al mismo arco de circunferencia".

5. Conclusiones

Con fundamento en los últimos desarrollos de la TAD, se diseñó una AEI para la enseñanza de ángulos inscritos en la circunferencia. Durante el desarrollo de las clases se trató de llevar a cabo un proceso de estudio involucrando a los estudiantes en un

nuevo tipo de trabajo, alejado de la enseñanza habitual. Los estudiantes resolvieron situaciones que permitieron desplegar razonamientos propios del trabajo geométrico y que les permitió institucionalizar el Teorema de ángulos inscriptos en una circunferencia. Dedujeron a partir de los datos y utilizando propiedades y relaciones que no se encontraban explícitas y llegaron a establecer el carácter necesario de los resultados independientemente de la experimentación.

De esta primera implementación, se destacan las dificultades para desarrollar un dispositivo didáctico con las características de un AEI, pues se percibe que para los estudiantes resolver una situación es dar respuesta a la demanda del profesor. Y además este tipo de respuestas se caracterizan por la ausencia de un entorno tecnológico – teórico explícito. Esta dinámica de estudio conduzco a la imposibilidad de que los estudiantes planteen nuevas preguntas a partir de las resoluciones obtenidas, lo que requirió de constantes intervenciones del profesor para proseguir en el proceso de estudio.

Nuestro trabajo continúa en la modificación del dispositivo didáctico implementado y en la elaboración de un nuevo diseño con el empleo de herramientas informáticas, que permitan superar las dificultades detectadas. La realización de situaciones, con el uso de software, facilita el estudio de nuevas relaciones entre los elementos de la circunferencia, que resultan más complejas de ser realizadas con lápiz y papel. Además, este nuevo diseño debe contemplar mayor tiempo de realización con los estudiantes, pues la implementación de un dispositivo con las características de un AEI implica cambios radicales en la dinámica de estudio de los alumnos. Se requiere de mayor acompañamiento sostenido en el tiempo para poder lograr cambios radicales en el proceso de estudio.

6. Referencias

- Báez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática*, Vols. 12 al 16, Número extraordinario, 67-87.
- Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números*, 62, 33-44.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19/2, pp. 221-266.
- Gamboa, R.; Ballesteros, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educaré*. 14 (2), 125-142.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr>
- Chevallard, Y. (2007). *Pasado y presente de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr>
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr>
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. RUIZ-HIGUERAS, A. ESTEPA, y F. JAVIER GARCIA (Ed.). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica*, (pp. 705-746.). Universidad de Jaén.

- Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/>.
- Espinoza, L.; Barbé, J.; Dinko, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la Educación General Básica chilena y una propuesta para su enseñanza en aula. Actas del II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm.
- Gascón, J. (2003). Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*. 44, 25-34.
- Itzcovich, H. (2005), Iniciación al estudio didáctico de la Geometría, Zorzal.
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice* (pp. 121-139). London: RoutledgeFalmer.
- Ladage, C.; Chevallard, Y. (2010). *La pédagogie de l'enquête dans l'éducation au développement durable*. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Roditi, E. (2004). Le Théorème de l'angle inscrit au collège analyse d'une séance d'introduction. *Petit x*. 66, 18 – 48.