EL PROBLEMA DEL TIEMPO EN LA VISUALIZACIÓN DEL CAMBIO. DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y EL LENGUAJE VARIACIONAL A TRAVÉS DE LA GRAFICACIÓN-MODELACIÓN Y APLICACIÓN DE LA TECNOLOGÍA EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Astrid Morales Soto; Constanza Ripamonti Zañartu
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Universidad Santo Tomás
ammorale@ucv.cl, mripamonti@santotomas.cl

Resumen
La necesidad de resolver problemas de variación y cambio en el tiempo ha motivado el desarrollo del cálculo dentro de la matemática. Las investigaciones en los niveles secundario y universitario muestran importantes dificultades en su enseñanza. La socioepistemología, a partir del estudio de las prácticas sociales asociadas al uso del cálculo, tales como la predicción, la modelación y la graficación, busca rediseñar el discurso escolar y desarrollar el estudio del pensamiento y el lenguaje variacional.
El tiempo, como magnitud, es considerada una variable compleja desde el punto de vista cognitivo, lo que constituiría un obstáculo en la visualización del cambio y su modelación. La investigación busca describir estas dificultades a través del estudio de las gráficas de situaciones de movimiento producidas por niños que inician el segundo ciclo de enseñanza general básica e identificar los indicadores de pensamiento variacional que aparecen en la práctica de la predicción.

Palabras clave: socioepistemología, pensamiento y lenguaje variacional, graficación, predicción.

1. Introducción

Un mundo dinámico en permanente transformación ha constituido el escenario propicio para que el ser humano se interese por la comprensión de la variación y el cambio en el transcurso de la historia. El estudio de los fenómenos de movimiento, siendo éste una propiedad intrínseca de la materia, y que existe, independientemente de nuestra conciencia, dio origen a formas gráficas que buscaban representar estos cambios, para posteriormente desarrollar un lenguaje y registros propios del álgebra para describirlos.
El desarrollo de ideas sobre lo que varía y cambia es parte de lo que hoy se conoce como cálculo y el principal objeto matemático que aparece como producto de este proceso es el de función. (Cantoral 2001).
Desde una perspectiva socioepistemológica analizaremos el caso del estudio de la variación y el cambio en el discurso matemático escolar de los niveles superiores de enseñanza básica, la epistemología y la didáctica (obstáculos) del concepto de función, así como las prácticas sociales que se relacionan con el uso intuitivo e inicial del concepto de función en esos niveles.

2. El marco socioepistemológico

Esta investigación se sitúa en el marco de la socioepistemología para el estudio y análisis de las prácticas e indicadores asociados al pensamiento variacional y al concepto intuitivo de función, en fenómenos de cambio y variación en el tiempo, en el contexto de la Matemática Escolar.

Para Cantoral (2006) el término *sociopistemología* contextualiza, sitúa al problema del saber. Se presenta como una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. (Cantoral 2006).
Según las investigaciones más recientes, la noción de práctica social es la parte medular de la perspectiva socioepistemológica. Se entiende por práctica social a aquel conglomerado de supuestos socialmente compartidos, mayoritariamente implícitos, que norman la actividad. La tesis central es sostener que son las prácticas sociales las que generan conocimiento. (Cantoral & Farfán, 1998)
El objetivo de la socioepistemología es rediseñar el discurso de la Matemática Escolar y dotarla de nuevos marcos de referencia para la construcción o resignificación del conocimiento matemático.
La noción de resignificación busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de los significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intensión; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. (Arrieta, 2003)
Es así que la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad, obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad. (Cantoral, 2006)
En el marco de esta investigación, consideramos importante la *predicción* como práctica social, porque ha mostrado ser una idea fuerza en el desarrollo de conceptos matemáticos, relacionados con la variación ya que para predecir un estado futuro correspondiente a un sistema es necesario cuantificar y analizar los cambios de sus causas y efectos y con base en esto generar modelos matemáticos que nos permitan anticipar consecuencias.
La forma elegida para *modelar* los fenómenos de variación con los que trabajarían los alumnos fue el uso de las gráficas; en el marco de la Socioepistemología ubicamos a la gráfica en un estatus diferente, no únicamente como una representación de un concepto, sino como una práctica social generadora de conocimiento matemático. Observar y estudiar el uso y desarrollo de las prácticas de graficación de los niños en un contexto social, permite visualizar una matemática funcional en oposición a la utilitaria.
A la base cognitiva de este estudio ubicaremos el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PYLV), línea de investigación desarrollada principalmente por Cantoral y Farfán para evidenciar la actividad cognitiva respecto de los fenómenos de cambio y su cuantificación.

3. Análisis socioepistemológico

Apoyándonos en el trabajo de Ruiz Higueras (1998) y Sierpinska (1992) presentamos un resumen del desarrollo epistemológico del concepto de función a partir de las diferentes concepciones de cada momento histórico:

Interpretación del concepto *función*	**Descripción**	**Análisis de los obstáculos epistemológicos**
Función como **"variación"**	Matemáticos y astrónomos babilónicos, profundizaron en métodos cuantitativos tabulando datos, interpolando y extrapolando, en busca de regularidades. Establecieron que los fenómenos sujetos al cambio, pueden poseer distintos grados de intensidad y cambiar continuamente entre ciertos límites dados.	Esta concepción que busca medir los cambios y cuantificar su variación aparece como un "instinto de función" o intuición de la función.
Función como **"proporción"**	En el pensamiento griego, se consideraba al cambio y al movimiento como algo externo a la matemática. Los entes matemáticos se consideran como algo estático y se expresan en términos de inecuaciones y proporciones más que en términos de variables. La búsqueda de proporcionalidad es la relación privilegiada entre magnitudes variables. Dado el significado geométrico que tenían para los griegos las magnitudes variables, solo establecían en forma homogénea sus proporciones: comparaban longitudes con longitudes, áreas con áreas, etc.	En este período predomina una concepción *estática* del concepto de función, considerándola como *proporción.*Esta homogeneidad pudo ser un ***obstáculo*** (Sierpinska 1992) al desarrollo de la noción de función, puesto que impedía encontrar dependencias entre variables de diferentes magnitudes, concepto fundamental en toda relación funcional.
Función como **"gráfica"**	Durante la Edad Media se dio el acercamiento entre la matemática y las ciencias de la naturaleza. Nicolás Oresme, en el S. XIV utiliza gráficas para representar los cambios y así describirlos y compararlos. Estas gráficas representan las relaciones desde lo cualitativo más que desde lo cuantitativo, pues los gráficos se consideraban como modelos geométricos de las relaciones y no necesitaban representar fielmente dichas relaciones.	La dependencia se representaba globalmente por toda la figura, predominando entonces la concepción de *función* como *gráfica* (visión sintética).
Función como **"curva"**	A principios del S. XVII, Fermat y Descartes descubren el mundo de la representación analítica al conectar los problemas de dos ramas de la matemática: la Geometría y el Álgebra. Comienza a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas. Se sostiene por primera vez la idea de que una ecuación en "x" e "y" es un medio para introducir la	La concepción dominante, la función como curva, hace que surja un nuevo ***obstáculo*** (Sierpinska 1989) en la evolución de la noción de función, cuando se asocia la gráfica con la trayectoria de puntos en movimiento y no con conjuntos de puntos que satisfacen condiciones en una

	dependencia entre dos cantidades variables.	relación funcional.
Función como **"expresión analítica"**	Esta concepción nace en el S. XVII y continúa con Euler y Lagrange en el S. XVIII. Se pensaba que las únicas funciones dignas de estudio eran las que podían ser descritas por expresiones algebraicas. Se intentó resolver problemas de la Física. Permanecía aún la idea de asignar la variación a las "cantidades". Aparece la idea de *función no-continua*. En la definición propuesta por Euler del concepto de función, reemplaza el término cantidad utilizado hasta ese momento por el de expresión analítica. Posteriormente, Lagrange amplia la noción de función a toda expresión de cálculo.	Esta concepción se constituye en ***obstáculo*** (Sierpinska 1992) para la evolución de la noción de función en relación con sus ideas de dependencia y variabilidad. Predominó el aspecto puramente formal más que el de relación entre variables; se entiende que una función es una combinación de operaciones dada por una expresión analítica.
Función como **"correspondencia arbitraria"**	Esta concepción aparece en los últimos trabajos de Euler sobre "funciones arbitrarias" en el S. XVIII, continuando en el S. XIX con los de Fourier sobre series trigonométricas y los de Cauchy, Dedekind y otros sobre números reales. Surge la noción de correspondencia general: se dice que "*una cantidad es función de otra u otras"*, aunque no se conozca por qué operaciones se debe atravesar para llegar de una a la otra. El término función se corresponde con la expresión f(x). Continúa el uso de los ejes cartesianos y aparece una nueva representación: los diagramas de Venn. La función como **"terna"**: a fines del S. XIX y principios del S. XX se llama función a la terna f= (A, B, G) en donde A, B y G son conjuntos con las siguientes condiciones $\mathbf{G \subset A \times B,\ x \in A,\ y \in B}$ tal que $\mathbf{(x,y) \in G}$. Las representaciones utilizadas son las de la teoría conjuntista y se concibe que: *una relación funcional está formada por pares de elementos así como un conjunto está formado por elementos individuales.*	Considerada como un ***obstáculo*** (Sierpinska 1992) ya que, con la intención de lograr precisión y rigor matemático, se pone de relieve una concepción estática. Se oculta el carácter dinámico de la asignación entre variables. En esta descripción clara, precisa y estática ya no hay la menor sugerencia a las cantidades que fluyen engendrando magnitudes variables, ni la menor referencia a puntos moviéndose sobre curvas, ni aparece la idea de variabilidad.

A partir de este análisis epistemológico y de las creencias o preconceptos de las personas se desprenden según Sierpinska (1992) otros obstáculos epistemológicos inherentes al desarrollo del concepto de función, relacionados con las representaciones, la concepción de variabilidad y las magnitudes como objetos cualitativamente diferentes de los números. Estos obstáculos aparecen en la enseñanza y se pueden observar

también los diferentes momentos del desarrollo del concepto en las concepciones de los alumnos.
Junto con los significados y formas que encierra el concepto de función y los obstáculos que se pueden definir a partir de ellos aparece el problema de la medición y las magnitudes como un aspecto importante en la comprensión y en la modelación como consecuencia esperable, Dolores, (2000) señala:
"El problema de la medición jugó un papel importante en el desarrollo de la matemática, pues propició la interconexión entre la aritmética y la geometría, entre lo discreto y lo continuo, entre el número y la magnitud. Las magnitudes son caracterizadas, como "las abstracciones representadas geométricamente de las cosas medibles continuas". El número, por otro lado, está asociado a la cantidad de veces que cabe la unidad de medida en lo que se mide, aquí se entrecruzan dos de los elementos contrastantes abstraídos de la realidad: lo discreto y lo continuo."
Desde el punto de vista de la construcción de conceptos científicos en los niños y el desarrollo del pensamiento matemático, Chamorro (2005) destaca las dificultades de comprensión propias de la magnitud tiempo, señaladas también en las investigaciones de Piaget y Fraise (con propuestas controversiales) en las cuales aparece el fenómeno del tiempo como una magnitud compleja en su génesis y relación con otros elementos fundamentales como el espacio.
Cuando se estudian procesos de variación, no sólo interesan los cambios por sí mismos, interesan por ejemplo su dirección y sentido cuando se trata de magnitudes vectoriales, interesan su rapidez o la velocidad con que se comportan.
Para entender la importancia de los problemas de variación en la enseñanza de las funciones es importante precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Los primeros indican cómo cambia una función y los segundos indican cuánto cambian.
Para observar la presencia en el discurso escolar de problemas y temáticas asociadas a la variación y el cambio se revisaron y analizaron los contenidos del Marco Curricular chileno aprobado en 2009[91] con los ajustes propuestos para la próxima década en los sectores de Naturaleza, Sociedad y Matemática de 1º a 8º año de Educación General Básica.
Para establecer el estado de las prácticas de graficación y predicción en el currículum chileno, así como la presencia de situaciones de variación que prepararan o aportaran al desarrollo del concepto de función, revisamos los textos de 1º a 8º básico entregados a los colegios municipales y subvencionados por el MINEDUC[92].
La revisión de los programas de estudio nos muestra que en estos niveles sí aparecen en estudio fenómenos de variación, pero solamente en los programas de ciencias.
En los textos de matemática revisados la evidencia muestra que para los niveles señalados las actividades presentadas que requieren graficación, o modelos gráficos son escasas, remitiéndose a gráficas de barras en la mayoría de los casos. Solamente en los niveles 7º y 8º se observa la presencia de gráficas de variación proporcional directa e indirecta y algunos problemas que requieren intervenir o producir gráficas a partir de datos organizados como variables. Las actividades de predicción están ausentes de las propuestas didácticas de los textos estudiados.
A partir de este estudio se establecen nuevas interrogantes respecto a la necesidad de herramientas matemáticas en el desarrollo de conceptos y problemáticas propias de las

[91] 2009 MINEDUC, Marco Curricular Para la Enseñanza Básica y Media. Chile.
[92] El Ministerio de Educación Chileno licita y distribuye gratuitamente los textos escolares cada 2 años.

ciencias así cómo se pueden utilizar en el tratamiento de los conceptos y procedimientos matemáticos los problemas de la ciencia que les dieron origen.

4. Metodología

En la investigación se incluyen algunos elementos de una ingeniería didáctica de carácter exploratorio: análisis a priori, análisis a posteriori y confrontación. Se consideraron los aspectos epistemológicos, didácticos y sociales involucrados en el desarrollo del Pensamiento y lenguaje variacional en los niños, para el diseño y aplicación de una secuencia de situaciones que permitiera visualizar los indicadores de uso, conocimiento y resignificación a partir de las prácticas de graficación y predicción frente a fenómenos de cambio y variación en el tiempo.
En la secuencia de situaciones de predicción- graficación diseñada se incluyó el uso de tecnología de sensores e interfaces junto a un software graficador. Se esperaba evidenciar indicadores de pensamiento variacional en los niños al resolver problemas que involucren fenómenos de cambio en el tiempo.
Basándonos en el diseño de Briceño (2010), esta secuencia se plantea en tres momentos:

• Momento 1	» Fenómeno de movimiento » Graficación - argumentación
• Momento 2	» Actividad con sensor de movimiento » Visualización de la gráfica (programa graficador) » Discusión y preguntas
• Momento 3	» Graficación –predicción » Confrontación con el modelo del graficador » Exploración- argumentación

La actividad se aplica con 4 grupos de 20 niños (niños y niñas) de 5º año básico (11 años) de un colegio particular de la ciudad de Santiago, Chile, en sesiones de 90 minutos. La actividad es filmada para registrar las interacciones entre los niños durante el trabajo grupal.
El análisis a priori permite tener presentes los indicadores que se esperan observar, consideramos para esto los resultados obtenidos por Carrasco (2006) y Briceño (2010) en contextos no escolares, las evidencias de estos trabajos presentan variados registros gráficos para indicar sentido, intensidad y dirección del movimiento principalmente a través del dibujo. Se espera, en el segundo momento, que los niños se desconcierten con la gráfica que presenta el programa graficador del sensor e intenten responder a la forma de la gráfica con los diferentes momentos del movimiento realizado. Se espera que el desequilibrio cognitivo haga preguntarse a los niños sobre la inclinación de la curva, la recta paralela al eje x, o, qué es lo que hace que la curva suba o baje. En el tercer momento se espera que los alumnos predigan el movimiento que genera determinada gráfica y viceversa: la gráfica que representa determinado movimiento. Posteriormente se espera la argumentación de la velocidad, el tiempo y la distancia en relación a la gráfica.

5. Conclusiones

En la investigación desarrollada se consideraron los aspectos epistemológicos, didácticos y sociales involucrados en el desarrollo del Pensamiento y lenguaje variacional en los niños para diseñar una situación de variación que permitiera visualizar los indicadores de conocimiento y resignificación resultantes del desarrollo de las prácticas de graficación y predicción frente a fenómenos de cambio y variación en el tiempo.

Al analizar las gráficas, interacciones y argumentaciones de los niños pudimos observar que:

- Las situaciones que propician prácticas sociales de graficación, argumentación y predicción potencian el desarrollo de pensamiento y lenguaje variacional.
- Las gráficas son un argumento para la construcción de conocimiento matemático sobre el cambio y la variación.
- La tecnología aporta con la motivación y la inmediatez en el desarrollo de situaciones de variación –graficación, pero el fundamento de la construcción de conocimiento está en las practicas sociales y en el desarrollo de situaciones que las propicien.
- Es necesario construir marcos de referencia que permitan incluir los fenómenos de variación y cambio y las prácticas de graficación y predicción en el discurso matemático escolar.

Referencias

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad. México: Iberoamérica.

Cantoral, Molina y Sánchez (2006). Socioepistemología de la Predicción. Cinvestav IPN, Cicata IPN. México

Cantoral, R., Farfán, R. (1998) Pensamiento y Lenguaje Variacional en la introducción al análisis. Epsilon 42, 353-369

Chamorro, M. (2005) Didáctica de las matemáticas. Pearson, España

Dolores, C. (2000). Revista Academia. Volumen 2 No. 20, Universidad Autónoma de Sinaloa. pp. 9-17

Ruiz Higueras, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. España; Universidad de Jaén.

Sierpinska, A. (1992). Understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp 25-58) USA: Mathematical Association of America.