ENSEÑANZA DEL LÍMITE FUNCIONAL CON GEOGEBRA

María Paz Gazzola[1,2]*, Ana Rosa Corica*[1,2,3]*, Inés Elichiribehety*[1,2]
1. Facultad de Ciencias Exactas – UNCPBA
2. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología
3. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
mpgazzola@gmail.com, acorica@exa.unicen.edu.ar, ielichi@exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presentan resultados parciales del diseño e implementación de una secuencia de clase para la enseñanza de límite de funciones, con el empleo por primera vez por parte de los alumnos de herramientas informáticas. El estudio se desarrolló en el último año de una escuela secundaria pública. Se adopta como base teórica la Teoría Antropológica de los Didáctico (Chevallard, 1999; 2004, 2006, 2007). Se analizaron las producciones de los estudiantes y se discuten los resultados preliminares.

Palabras clave: Límite de funciones. Estudiantes. Secundaria. GeoGebra®.

1. Introducción

En este trabajo se presentan resultados parciales del diseño e implementación de una secuencia de clase para el estudio del límite funcional en el último año de la Escuela Secundaria Argentina. De acuerdo con la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999; 2004, 2006, 2007), se plantea la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no constituyan *monumentos* que el profesor *enseña* a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas.

Entre las dificultades, se encuentra que la enseñanza tradicional de cálculo se reduce a desarrollos algebraicos. Esta situación ha sido abordada por distintos trabajos en los que se muestran desde argumentaciones teóricas hasta propuestas para mejorar la calidad del aprendizaje, las cuales incluyen tanto los conocimientos previos que necesita tener un estudiante para tener éxito en el estudio del cálculo, como la elaboración de materiales didácticos (Blázquez y Ortega, 2002; Contreras, 2001; Corica, 2010; Corica y Otero, 2009).

En este trabajo se presentan resultados parciales, de un estudio realizado con alumnos del último año de una escuela secundaria pública argentina, en el ámbito del cálculo. El objetivo fue estudiar sus producciones en el estudio del límite funcional, con la implementación de netbooks utilizando el software GeoGebra®. La utilización de este tipo de herramientas como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, entre otros aspectos, permite acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones y posibilita a los estudiantes a trabajar individualmente, comprobando sus ideas y sus resultados en la resolución de problemas.

2. Marco teórico

Desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se parte del supuesto que el saber matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas surgiendo como el producto de un proceso de estudio. Aunque hacer matemática no consiste sólo en resolver problemas, se puede observar una dualidad entre tipos de problemas y el saber matemático. Bajo esta concepción del conocimiento matemático se propone como modelo básico para su descripción la noción de praxeología matemática o simplemente organización matemática.

Las praxeologías u organización matemática (OM), surgen como respuestas a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas que se denominan *cuestiones generatrices*. Las praxeologías constan de dos niveles:

- El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que engloba un cierto *tipo de tareas* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas* para resolverlas.
- El nivel del *logos* o del *saber*, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, los que reciben el nombre de *tecnología*. Dentro del *saber* se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel *tecnología de la tecnología*) que se denomina *teoría*.

Junto a las tareas de concepción y organización de mecanismos de estudio, así como la gestión del medio ambiente (*Organizaciones Matemáticas*), se distinguen las tareas de ayuda al estudio, particularmente la dirección de estudio y enseñanza, cuyo cumplimiento es debido a la puesta en ejecución de técnicas didácticas determinadas (*Organizaciones Didácticas*).

3. Metodología

En este trabajo se utilizaron técnicas metodológicas cualitativas de corte exploratorio. Se propone desarrollar un dispositivo didáctico basado en la pedagogía de la investigación en la clase de Matemática (Ladage, Chevallard, 2010).

El curso seleccionado para la implementación se componía de N= 25 estudiantes. Antes de realizar la implementación, una de las investigadoras realizó un mes de observación no participante en el curso, con el propósito de conocer la dinámica de estudio del grupo. Esto generó realizar modificaciones en la secuencia propuesta originalmente, debido a que los estudiantes no habían utilizado nunca el software de GeoGebra y el investigador debió explicar como utilizarlo antes de comenzar con la secuencia. En los meses sucesivos se llevó a cabo la implementación y se recogieron los datos de esta primera implementación. En la siguiente sección se explicita la secuencia implementada, junto al análisis de los resultados obtenidos.

4. Resultados y discusión

Las tareas propuestas por el docente investigador para el desarrollo de las clases se corresponden con los siguientes tipos de tarea:

T_1 : Definir el límite de funciones

T_2 : Calcular el límite de funciones en un punto

T_3 : Graficar funciones

La primera tarea que se propuso fue:

Dadas las siguientes expresiones $f(x)=x^2+x+1$ *y* $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$

(a) Indica el dominio para que correspondan a una función
(b) Represéntalas gráficamente e indica el procedimiento llevado a cabo

En la tarea se consolidan los tres tipos de tareas propuestos para ser estudiados en la secuencia. Por un lado, el objetivo de la tarea es estudiar funciones en determinados puntos con el propósito de introducir a los estudiantes a la definición de límite y por

otro lado, calcular dicho límite. Además, a partir del estudio de las funciones se propone representarlas gráficamente.
Si bien, lo que se propone aquí es un problema *clásico*, con el que habitualmente inician el estudio del límite funcional los libros escolares de matemática, aquí el docente propuso su resolución mediante el empleo de Netbooks, utilizando el software GeoGebra®.
El investigador propuso resolver la tarea en forma grupal. Los estudiantes no demostraron inconvenientes en analizar cual era el dominio natural de las funciones presentadas. Sin embargo, una de las problemáticas que detectó el investigador fue que ningún estudiante del curso consideraba como expresiones algebraicas a las funciones y de esta forma no procedían a realizar operaciones para establecer relaciones entre las mismas. Por lo que se propone el primer problema, que enfocará esta cuestión, y permitirá estudiar el límite de una función en un punto y así logar una diferenciación entre las expresiones dadas.
A partir de la utilización del software, se estudió el comportamiento de las funciones mediante la confección de una tabla y luego se representaron gráficamente. Esta última tarea produjo gran asombro en los estudiantes, debido a que el software permitía visualizar la misma gráfica para ambas funciones, a excepción de $g(x)$ en $x = 1$. A partir de la similitud de dichas gráficas se pudo concluir que operando para los dominios definidos en cada función, ambas se podían expresar del mismo modo. Esto permitió profundizar en la problemática que nos enfrentábamos en un principio, y poder establecer el nexo entre expresiones algebraicas y funciones. Finalizada la discusión de esta primera tarea, se institucionalizó una idea intuitiva de límite de funciones en un punto.
En la clase siguiente, se propuso realizar una síntesis de lo realizado hasta el momento. A continuación, se formuló el siguiente problema, que tuvo como objetivo definir los límites laterales.

Determinar el $\lim_{x \to 1} h(x)$ *para la función definida a trozos* $h(x) = \begin{cases} 3x+5 & si\ x \le 1 \\ -x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$

Los estudiantes aquí tuvieron que analizar la función en el punto según las ramas. En primera instancia, realizaron la representación gráfica de la función con el software. Para ello, el profesor debió indicar cómo se ingresaba la función definida a trozos en el programa.
Al momento de estudiar las gráficas, la mayoría de los estudiantes presentaban dificultades para analizar y comparar los datos que obtenían de la tabla y la gráfica que proporcionaba el programa. El investigador pudo advertir que en algunos casos los estudiantes trabajaban sólo con el gráfico o sólo con la tabla de valores, por lo que fue necesario explicitar que el análisis requería del estudio de los dos tipos de representación. De esta manera, los alumnos pudieron determinar el valor del límite conforme se acercaban a $x = 1$ por valores mayores y menores que él. Luego de una discusión de la propuesta de cada grupo, se institucionalizó los límites laterales.
A continuación, se propuso una serie de funciones para calcular el límite en un punto. El estudio también se realizó empleando la misma dinámica de estudio que en las clases anteriores. En esta instancia, el profesor advirtió mayor familiaridad de los estudiantes con las netbooks. A partir de la tarea, se pudo institucionalizar el álgebra de los límites sin mayores inconvenientes. Se destaca que si bien, el álgebra del límite de funciones puede ser demostrado, no se propuso tal actividad porque el profesor a cargo del curso

solicitó que no se expusiera a los estudiantes a dicha tarea. No obstante, a partir de la tarea propuesta los alumnos pudieron arribar a enunciar el álgebra de los límites sin que requieran ser definidos desde un principio por el investigador, alejándose de una visión monumentalista de los saberes.
En la cuarta clase, se propuso estudiar los límites laterales de diversas funciones, con el propósito de establecer la existencia o inexistencia del límite de funciones. A partir de la tarea, los estudiantes pudieron concluir que para que exista el límite de una función en un punto, los límites laterales deben existir y ser iguales.
En las dos clases siguientes, se propusieron actividades para trabajar con las técnicas utilizadas hasta el momento. Las tareas involucraron el análisis de gráficos de funciones para determinar el límite de las mismas en determinados puntos; el bosquejo de la gráfica de funciones que cumplan ciertas condiciones para los límites y el cálculo del límite funcional en un punto, empleando tanto el álgebra de funciones como herramientas informáticas.
Para finalizar el trabajo realizado en clase, como exigencia institucional se requirió que los estudiantes realicen una prueba individual y escrita. Aunque el trabajo realizado en clase se basó de manera casi exclusiva en el uso del GeoGebra®, en la evaluación, los estudiantes tuvieron total libertad para decidir qué técnica utilizar. Las tareas propuestas en la evaluación fueron las siguientes.

1. *Determinar el valor de los límites señalados, si es que existen, siendo*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \;\; x \le 0 \\ -x - 1 & si \;\; 0 < x \end{cases}$$

$$a) \lim_{x \to 0} f(x) \qquad b) \lim_{x \to 3} f(x)$$

Indicar el procedimiento utilizado

2. *Calcular utilizando propiedades:*

$$a) \lim_{x \to 1}\left(4 + x - \frac{1}{x}\right) \qquad b) \lim_{x \to 8}(3x - 2)x \qquad c) \lim_{x \to 3}\frac{x^2 + 6}{x - 2}$$

Indicar el procedimiento indicado

Con relación a la resolución de la tarea 1 a), en general, se obtuvieron resultados favorables, pues sólo dos estudiantes no pudieron establecer la inexistencia del límite.
En una amplia mayoría, las resoluciones para la tarea 1 indican que, los estudiantes pudieron calcular correctamente el límite de la función definida a trozos en el punto donde cambiaban las ramas, calculando los límites laterales. Sin embargo, sólo un estudiante pudo calcular correctamente el límite de la función en un punto, cuyo entorno del valor estudiado estaba comprendido sólo en una rama de la función. El resto de los estudiantes calcularon los límites laterales, haciendo corresponder cada uno de ellos a una rama distinta de la función. De esta forma, obtuvieron un resultado erróneo, tal como se puede observar en el protocolo A19:

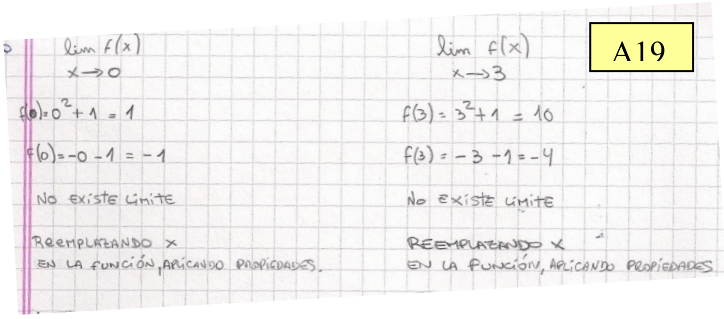

Figura 1. Resolución de la tarea 1 de A19

Esto evidencia una baja comprensión de los estudiantes acerca del estudio de límites de una función defina a trozos en algún punto donde no existe cambio de ramas. Tal vez, esta situación se revierta cuando se enfrente a los estudiantes a tareas que requieran del estudio de la continuidad de funciones. En dichas tareas, seguramente recobre sentido el estudio del límite lateral.

Del análisis de la tarea 1 y 2 se distinguen dos grupos de resoluciones: producciones en las que se emplea el GeoGebra® para justificar las resoluciones y otras en las se basan del empleo del álgebra del límite de funciones. En particular, se destaca que la mitad de los estudiantes resolvió las tareas del cálculo del límite mediante el uso del software. De este grupo, solo 4 estudiantes trascribieron la tabla de valores que produjeron con el programa, como medio para justificar sus respuestas, sin identificar correctamente un entorno para la variable *x*. Los estudiantes transcribían la tabla utilizando sólo valores más pequeños que *x* (límite lateral por izquierda) o sólo valores mayores que *x* (límite lateral por derecha). Por ejemplo, para la resolución de la tarea 1, para calcular $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ algunos estudiantes justifican su respuesta a partir de la presentación de tablas como el protocolo siguiente de A11T1, la que sólo representa a la función para valores a derecha de $x = 0$, siendo incompleta su presentación para poder establecer la existencia del límite de la función en el punto.

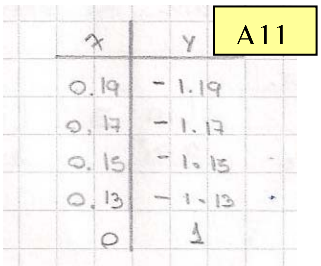

Figura 2. Resolución de la tarea 1 de A11

Se pudo advertir a través de sus producciones que sólo dos estudiantes no lograron comprender el concepto de "tendencia" o "se acerca a", pues para justificar sus producciones utilizan como resultado de límite el valor más próximo que encontraban en la tabla de valores. Por ejemplo, A20 para justificar la realización de la tarea 2. *c*) propone la siguiente tabla:

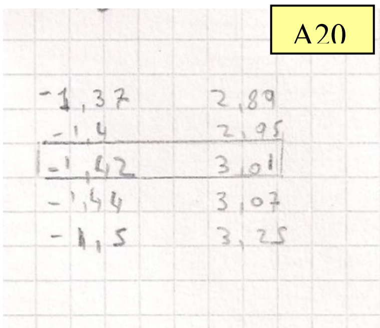

Figura 3. Resolución de la tarea 2 c) de A20

De los estudiantes que resolvieron las tareas sin emplear el software, se destaca que sólo tres estudiantes de este grupo supo aplicar adecuadamente el álgebra del límite de funciones, de lo inferimos que la utilización del Geogebra® ayudó a la interpretación del algebra de los límites.

5. Conclusiones

En esta secuencia, la implementación de tareas que requirieron del empleo del software, permitieron a los estudiantes participar en forma activa en la construcción del conocimiento, explorando diferentes ejemplos y corroborar los resultados obtenidos mediante resoluciones de lápiz y papel. A pesar de que los estudiantes cuentan con el software Geogebra® a partir de la disponibilidad de un ordenador para cada alumno en el marco del Plan conectar-igualdad, requirió de un gran esfuerzo por parte del investigador, para que se familiarizaran y aprovecharan las potencialidades de dicha herramienta. Esta dificultad se genero porque se entregaron las Netbooks simultáneamente al inicio de la secuencia.

Esto originó que los estudiantes adquieran en la clase de matemática nuevas responsabilidades que requerieron de un esfuerzo sostenido en el tiempo. El investigador tuvo que lidiar con la constante demanda de los estudiantes de no aceptar momentos de incertidumbres y ser ellos mismos los que construyan los conocimientos a institucionalizar.

Nuestras investigaciones futuras se orientan a modificar la secuencia didáctica propuesta, a la luz de los resultados obtenidos en esta primera implementación, para ser desarrollado en otros contextos áulicos y lograr una profundización en el estudio de los límites.

Bibliografía

Blázquez, S.; Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO.* 30, 67 - 82.

Bosch M., Espinoza L., Gascón J. (2003) El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23 (1), pp. 79-136

Contreras, A. (2001). *El límite en el Bachillerato y primer año de Universidad. Perspectivas desde los enfoques epistemológicos y semióticos.* Obtenido Julio 1, 2008: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/huesca/limitebachillerato.pdf

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, Y F. Javier Garcia (Ed.). *Sociedad, Escuela y Matemáticas*. *Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico,* (pp. 705-746.). Universidad de Jaén.

Corica, A. (2010). *Enseñanza de Límite y Continuidad en la Universidad: Estudio de Organizaciones Matemáticas y Didácticas.* Tesis de doctorado. UNC. Argentina.

Corica, A.; Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 305 – 331.

Ladage, C.; Chevallard, Y. (2010). *La pédagogie de l'enquête dans l'éducation au développement durable*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.