# PERMANENCIA DE ALGUNOS CONCEPTOS DE ESPACIOS VECTORIALES Y SU OPERATIVIDAD.

*Ana Rosso; Julio Barros*
Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas Físico- Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Río Cuarto
arosso@exa.unrc.edu.ar jbarros@exa.unrc.edu.ar

**Resumen**
El objetivo de este trabajo es analizar la permanencia de algunos saberes sobre *espacios vectoriales* y su disponibilidad operatoria a la hora de resolver situaciones problemas. Esta exploración se realiza mediante una entrevista. Del análisis de las mismas se infiere que, en la enseñanza de estos temas habría que profundizar el trabajo con el concepto de espacio vectorial, en lo relativo a su definición como ente constituido por operaciones y propiedades. Ejercitar la aplicación de diferentes técnicas propias del Algebra Lineal, reflexionando sobre su uso y los resultados con ellas obtenidos, ya que en reiterados casos se observa la aplicación mecánica de esas técnicas. La práctica se realiza en general utilizando las definiciones en forma directa, lo que produce algunas distorsiones en la capitalización del saber. Se propone la recreación de la definición en distintas situaciones problemáticas como una manera de atenuar este problema.

**Palabras Claves:** espacio vectorial, permanencia de conceptos,

## 1. Introducción

La investigación surge como una necesidad de explorar y analizar las diferentes formas en que el alumno construye su conocimiento y recupera los conceptos aprendidos en situaciones de aplicación. En este trabajo[94] se pretende analizar la permanencia y operatividad de algunos conceptos que tienen como base la noción de espacio vectorial. En este sentido se ha tenido en cuenta la interrelación que se desprende del mapa conceptual consensuado por los docentes a cargo de la asignatura, en el cual se interrelacionan las nociones de espacio vectorial, subespacio, operaciones entre subespacios, subespacio generado, base y dimensión. Para la obtención de los datos se construyó una secuencia de situaciones problemas que se resuelven en una entrevista realizada a los estudiantes.
En cierta manera se espera poder establecer si los obstáculos del formalismo definidos por Dorier (1997), Sierpinska (2000) y Uicab y Oktaç (2006) permanecen aún en el estudiante. Nuestra investigación se situó en un contexto donde no sólo se manipularon símbolos, sino también objetos concretos, como vectores, matrices y polinomios.
Un análisis exploratorio de las respuestas y justificaciones que los estudiantes consignaron en las entrevistas tuvo como propósito obtener un primer acercamiento a las concepciones que los alumnos lograron construir y permanecen en el tiempo, tanto como saberes propios de una teoría, como herramientas que ayudan a la solución de problemas. Este abordaje tiene como propósito esclarecer el modo en que algunas nociones han sido incorporadas a la red conceptual del alumno y forma parte de sus saberes a la hora de resolver problemas.

[94] Este trabajo se enmarca en el Proyecto *Propuesta didáctica de articulación de los diferentes lenguajes subyacentes en la enseñanza de Espacios Vectoriales y Subespacios en Algebra Lineal*

La investigación se sustenta en la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1994, Moreira, 2002) que aborda los fenómenos de aprendizaje bajo el enfoque de campo conceptual, visto a través de la formulación de esquemas mentales en la adquisición y desarrollo de un concepto durante la construcción del conocimiento (Vergnaud, 1990), a partir de una variedad de situaciones que lo dotan de significado. Además se tienen en cuenta los registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo (Duval, 1999) y los juegos de marcos y representación simbólica (Alves Días y Artigue, 1995); a la vez que se considera especialmente los modos de pensamiento teórico y práctico, tratados por Sierpinska y Dorier en sus investigaciones en temas de Álgebra Lineal.

## 2. Objetivo General

El objetivo general de este trabajo es analizar la permanencia de algunos saberes referidos al concepto *espacio vectorial* y su disponibilidad operatoria a la hora de resolver situaciones problemas que involucran estos saberes.

## 3. Materiales y Metodología

### 3.1 Población

La muestra se tomó sobre los alumnos de las asignaturas Algebra Lineal, materia de segundo cuatrimestre, de primer año de la carrera de Profesorado y Licenciatura de Matemática y Algebra II, asignatura del Profesorado y Licenciatura en Física y Geometría y Algebra Lineal, materia de tercer año de la Licenciatura en Ciencias de la Computación. Todas estas asignaturas tienen los mismos contenidos básicos. Los entrevistados son alumnos que han aprobado la asignatura con nota mayor o igual a siete y ya han transcurrido por lo menos 6 meses desde el examen final. La muestra estuvo conformada por 12 estudiantes, 8 del Profesorado y Licenciatura de Matemática, 2 de la Licenciatura en Física y 2 de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, que cursaron entre los años 2008 y 2009.

### 3.2 Instrumento

Es una entrevista que tiene situaciones problemas enfocadas a indagar las nociones de espacio vectorial, subespacio y base. (Anexo I). Las situaciones se pensaron bajo el supuesto de que los alumnos deberían dominar tanto, el uso de los conceptos, como las metodologías operatorias para establecer las propiedades de los espacios vectoriales, en sus diferentes formas de definición. Para la construcción del instrumento se tuvo en cuenta el mapa conceptual y la interrelación de los temas, como así también la forma de trabajo desarrollada durante el dictado de la asignatura.
Una vez elaboradas las situaciones se realizó un análisis a priori de cada una, se estableció su propósito y las posibles respuestas. El objetivo o propósito de cada situación se detalla a continuación.

**Situación 1:** Registra el grado de formalización de la noción de estructura de Espacio Vectorial.

**Situación 2:** Investiga sobre: a) El nivel de representatividad que tienen las leyes de clausura y las propiedades de las operaciones. b) El nivel de abstracción logrado cuando el ejemplo tratado no tiene representación geométrica. c) La permanencia de la congruencia semántica entre sus unidades significantes.

**Situación 3:** Esta situación apunta a registrar el grado de reversibilidad del concepto y la individualización de los entes constitutivos.

**Situación 4:** a) Pretende indagar sobre el manejo de técnicas de demostración y de cuantificadores y la operatividad de algunos conceptos de la teoría de conjuntos que subyacen en estas situaciones. b) Quiere registrar la puesta de manifiesto de la validación de la solución encontrada y la institucionalización de la noción en juego.

### 3.3 Consideraciones Metodológicas

Las situaciones problemas planteadas en las entrevistas ponen nuevamente al alumno frente al concepto, resolviendo situaciones problemas diferentes a las dadas en clase. Pretendemos ver si logró interiorizar algunos conceptos para ser usados en situaciones nuevas. Las entrevistas, individuales y escritas, plantearon situaciones problemas sobre los temas de interés que debían ser resueltos por los estudiantes. Fueron dadas en forma escritas para facilitar la comprensión de la situación a resolver, permitiendo volver sobre el enunciado las veces que fuese necesario. No se colocó límite de tiempo para pensar las respuestas y elaborar la justificación de cada caso; ellos mismos anotaban sus respuestas. Un docente estuvo presente durante el desarrollo de la entrevista para explicar, si era requerido, alguna consigna.
Con los datos obtenidos se hizo un análisis a posteriori de los resultados y con ellos elaboramos nuestras conclusiones. Los métodos de investigación utilizados en esta etapa revisten carácter empírico, observación-análisis-síntesis, cualitativo y cuantitativo de las respuestas.

### 4. Resultados

El análisis de los datos de las entrevistas nos permitió observar que:

1) La noción de espacio vectorial está presente en el 50% de los entrevistados de manera correcta. El otro 50% se queda con una parte de la definición, en la mayoría de los casos optaron por la respuesta b.
2) Si los vectores son elementos de $IR^3$, matrices o funciones, los entrevistados pueden establecer de manera correcta las operaciones necesarias para que el conjunto dado resulte un espacio vectorial. En el caso que los vectores son polinomios, el 25% define de manera incorrecta las operaciones.
3) Sobre la situación 3, inciso a) se nota cierta dificultad para reconocer el espacio ambiente en el cual los espacios vectoriales son subespacios, 66% responde bien. Las respuestas al inciso b) se muestran en el gráfico 1.

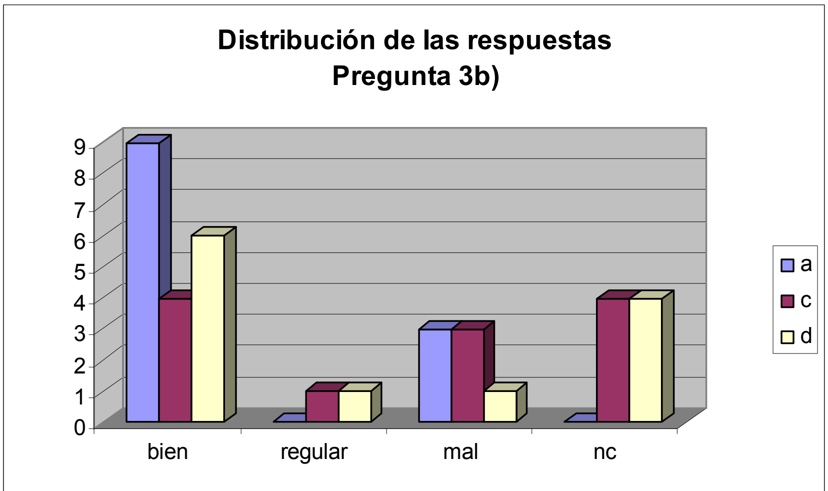


Gráfico 1

Si miramos la distribución de las respuestas podemos decir que: si el espacio es de dimensión finita (ejemplo a), la mayoría puede trabajar y dar una respuesta adecuada. Si el espacio es de dimensión infinita (ejemplo c) hay dudas si es posible dar una base. Además, si nos alejamos de los ejemplos más tradicionales de espacio vectorial, (ejemplo d) la mayoría no puede establecer una base para ese espacio. Esto quedó reflejado en la última situación donde sólo un 50% pudo contestar correctamente cuál es la base del espacio dado.

4) En lo referido a utilizar las técnicas de demostración, la distribución de las respuestas se muestra en el gráfico 2.

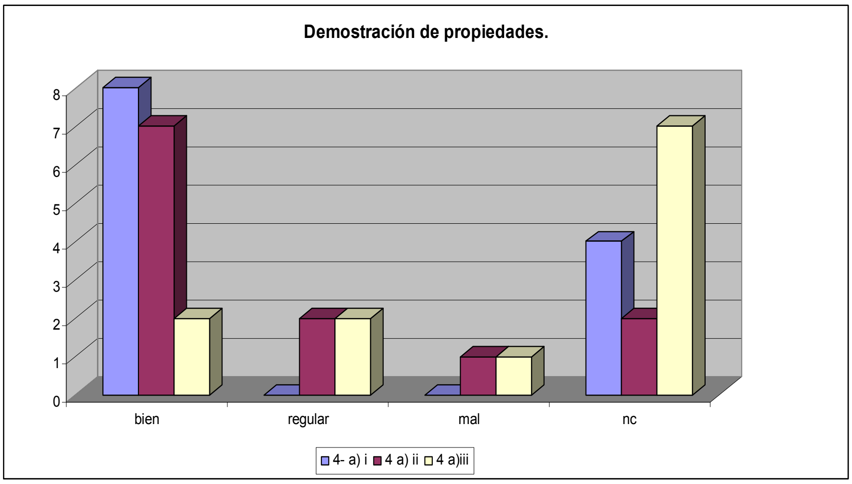


Gráfico 2

Es de observar que la mayoría opera correctamente; pero si la propiedad no ha sido trabaja en clase, hay dudas sobre la veracidad de la afirmación. En este instrumento, la última afirmación es falsa, pero la mayoría intenta una demostración, cometiendo el mismo tipo de error; esto sugiere una mecanización de la demostración de algunas propiedades.

5) Al trabajar con intersección de subespacios, la mayoría pudo reconocer los elementos constitutivos del subespacio intersección (67%) y justificar su elección. Pero sólo el 33% pudo apoyarse en resultados de la teoría para descartar las otras respuestas.

6) En el gráfico 3 se muestra el resultado de aplicar una técnica a un ejemplo no tradicional. Los datos están referidos a la situación $4c_1$ y $4c_2$.

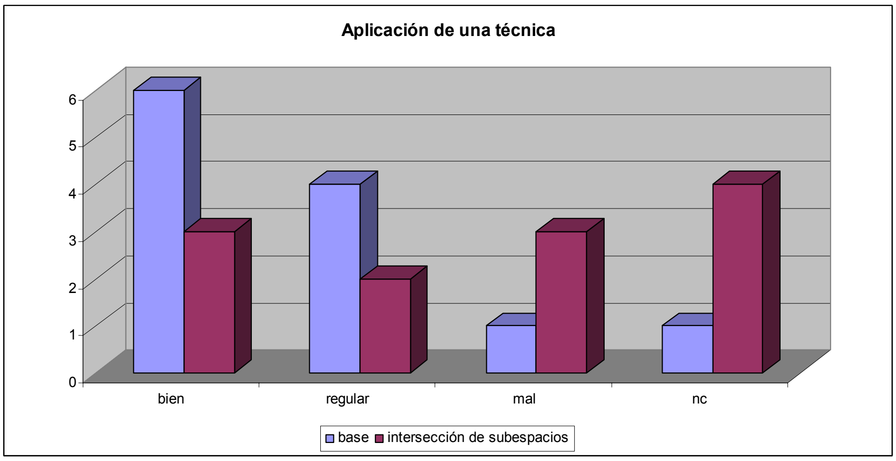


Gráfico 3

## 5. Conclusiones

- En la enseñanza de los conceptos tratados se debería hacer mayor hincapié en el trabajo con el concepto de espacio vectorial, en lo relativo a su definición como ente constituido por operaciones y propiedades ya que se evidenció una disociación entre ellas. Hay un obstáculo del formalismo dado que puede reproducir la demostración de propiedades que hacen a la definición, pero no reflexionan sobre las leyes de clausura. Una propuesta en esta dirección es trabajar con un número importante de ejemplos heterogéneos donde se visualice la maleabilidad del concepto, aún en los casos que el concepto no admite representación geométrica.
- En general, cuando se enseñan los conceptos mencionados se ejercita sobre la aplicación de diferentes técnicas propias de esta disciplina. Pero en muchos casos esto se reduce a la aplicación de una técnica vacía de contenidos, reduciéndose puramente a lo formal (obstáculo del formalismo). La práctica se realiza en general utilizando las definiciones en forma directa, lo que produce algunas distorsiones en la capitalización del saber. Como una manera de atenuar este problema, se debería facilitar la recreación de la definición en distintas situaciones problemáticas a la vez que se debería ejercitar en la búsqueda de contraejemplos.
- Las falencias en el uso correcto de los cuantificadores trae aparejados errores en la aplicación de algunas técnicas de demostración más cercanas a la Lógica pero aplicadas al contexto del Algebra Lineal.
- Cuando los problemas presentados al alumno se alejan de los modelos tradicionales se observan dificultades en la resolución de los mismos. Atendiendo a esta observación es necesario profundizar el trabajo con ejemplos donde la representación geométrica no sea posible, más aún donde los elementos del espacio vectorial provienen de diferentes ramas de la matemática.
- Al analizar técnicas para encontrar la intersección entre subespacios se observa que cuando los subespacios están presentados bajo diferentes formas de definición, ello dificulta la aplicación de las técnicas aprendidas. Por ejemplo, si un subespacio está definido mediante una ecuación y el otro mediante sus generadores, este último es llevado a su representación por ecuaciones para poder hallar la intersección.
- Se observa que la presencia de la noción de subespacio queda anclada en la condición necesaria para que un subconjunto sea un subespacio y no en la definición propia del concepto.
- En el manejo del lenguaje y la terminología técnica se observa la congruencia semántica entre sus unidades significantes.

## 6. Agradecimientos

A la Secretaría de Ciencia y Técnica de la U.N.R.C, que ayuda a la financiación de los proyectos PIIMEG.
A la Dra. Marta Marcolini por la lectura minuciosa de este trabajo y por sus valiosas sugerencias.

## 7. Bibliografía

Alves Días, M. & Artigue, M (1995). *Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra*. In L. Meira (ed), Proceeding of the 19th International Conference on de Psychology of Mathematics Education, Vol II, pp. 34-41. Recife, Brazil

Dorier J. L. (1997) *The role of formalism in the teaching of the theory of vector space. Linear Algebra and its applications*

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle, pp. 13-79. -

Ouicab R., Oktaç A (2006) *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámico.* RELIME, Año 9, vol. 003, pag 459-490

Moreira M. A. (2002). *La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, La enseñanza de las ciencias y la investigación en el área (Vergnaud's conceptual fields theory, science education, and research in this area)* Instituto de Física, UFRGS Caixa Postal 15051 91501-970 Porto Alegre, RS moreira@if.ufrgs.br. http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf

Sierpinska A. (2000). *On some aspects of student's thinking in linear algebra.* In J. L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 209–246). Holland: Kluwer.

Vergnaud, G. (1990) *La teoría de los campos conceptuales*. CNRS y Université René Descartes. Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170,

Vergnaud, G. (1994). *Multiplicative conceptual field: what and why?* In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y. State University of New York Press. pp. 41-59.

ANEXO I
Entrevista

1) Indique con un círculo que encierre la letra, la frase que completaría más adecuadamente la siguiente oración. (Sólo una opción)

"Un Espacio Vectorial es"

a. un conjunto de elementos de cualquier naturaleza, llamados vectores.
b. un conjunto de elementos llamados vectores en cual se han definido dos operaciones que cumplen que, al realizar dichas operaciones entre los elementos del conjunto se vuelve a obtener nuevamente un elemento del conjunto.
c. el conjunto de elementos de $IR^2$, $IR^3$, $IR^n$ con $n \geq 2$.
d. un conjunto de elementos llamados vectores en cual se han definido dos operaciones que cumplen determinadas propiedades.
e. un conjunto de elementos llamados vectores en cual se ha definido una operación que cumple determinadas propiedades.

2) Conteste afirmativamente o negativamente según considere, cuáles de los siguientes conjuntos constituirían un Espacio Vectorial, con las operaciones que usted defina. Defina las operaciones en todo caso, sea verdadera o falsa la afirmación

a. $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in IR^3 : \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ Si No

Operaciones: ……………………………………………………..
……………………………………………………..

b. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in IR^{2\times 2} : \quad x + t = 2 \right\}$ Si No

Operaciones: ……………………………………………………………
……………………………………………………………

c. $E_3 = \{ f : [a,b] \to IR : \quad f \; es \; continua \}$ Si No

Operaciones: ……………………………………………
……………………………………………

d. $E_4 = \{ f : IR \to IR : \quad f(x) = \alpha \cos(x) + \beta sen(x), \alpha, \beta \in IR \}$ Si No

Operaciones: ……………………………………………………………
……………………………………………………………

e. $E_5 = \{ P(x) : \quad P$ es polinomio de grado tres$\}$ Si No

Operaciones: ……………………………………………………………
……………………………………………………………

3) Referente al inciso (2)

a. ¿Cuáles de los espacios vectoriales que señaló en (2), son subespacios? Indique el espacio ambiente en el cual están incluidos.

…………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………….

b. Para los espacios vectoriales del inciso (2) ¿se pueden definir bases en todos los casos? En caso afirmativo defina una base.

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

4) a. Se sabe que $S$ y $W$ son subespacios de un espacio vectorial $V$, de dimensión $n$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Para las que supone verdaderas esboce una demostración y para las que supone falsas dé un contraejemplo.

i) $S \subseteq W \Rightarrow S \cup W \; es \; subespacio \; de \; V$

ii) $S \cup W \; es \; subespacio \; de \; V$

iii) $Si \; Z \; es \; subespacio \; de \; V \; entonces, \; S \cap (W + Z) = S \cap W + S \cap Z$

b. Sea $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in IR^3 : \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \}$ y sea $W = gen\{(2,1,0),(1,1,1)\}$

Verifique, si existe, cuál es la única respuesta correcta:

i) $S \cap W = \{(0,1,2)\}$ ii) $S \cap W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in IR^3 : \quad x_2 - x_3 = 0 \}$

iii) $W \cap S = gen\{(0,-1,-2)\}$

¿Se pueden descartar rápidamente las respuestas que no son correctas?

………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………..

c. Sea $S = gen\{1, \quad x, \quad x^2\}$ y sea $W = gen\{1 + x, \; x + x^2\}$

c1) Verifique, si existe, cuál es la única respuesta correcta:

i) $S \cap W = gen\{1 + x\}$ ii) $S \cap W = gen\{1, \; x\}$ iii) $W \cap S = gen\{x + 2x^2\}$

¿Se pueden descartar rápidamente las respuestas que no son correctas?

…………………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………………….

c2) ¿Es $B_1 = \{1, x, x^2\}$ y/o $B_2 = \{1 + x, x + x^2\}$ una base para el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos?

…………………………………………………………………………………….