

ORGANIZACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS SEGÚN NIVELES DE COMPLEJIDAD COGNITIVA: UNA MIRADA DESDE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Francisco Rojas¹; Horacio Solar²

¹Centro Felix Klein – USACH; ²Universidad Católica de la Santísima Concepción
francisco.rojass@usach.cl; hsolar@ucsc.cl

Resumen

En el marco del proyecto FONIDE 511091, en el cual se realiza un trabajo con docentes para el desarrollo y comprensión de un Modelo de Competencia Matemática (MCM), mostramos una experiencia con profesoras de primer y segundo año de primaria, en temas relativos al campo aditivo en dichos niveles, en la cual se evidencia que la comprensión paulatina de dicho modelo puede llevar a las docentes a organizar la actividad matemática, haciendo evolucionar la complejidad de las tareas matemáticas siguiendo patrones implícitos de organización curricular en el aula.

Palabras clave: competencias matemáticas, niveles de complejidad, tareas matemáticas.

1. Introducción

Actualmente, el *enfoque por competencia* es considerado en la comunidad internacional como una propuesta educativa que va más allá del aprendizaje de contenidos, y apunta a la formación de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos, permitiéndoles identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo (OCDE, 2003).

Sin embargo, es esencial que los docentes cuenten con herramientas claras para su trabajo en aula. En investigaciones desarrolladas en los últimos años (Espinoza et al., 2008; Solar, 2009), se ha logrado consolidar un Modelo de Competencia Matemática (MCM) que permitiría a los docentes articular dicho trabajo. Para ello, hemos propuesto una metodología de trabajo docente, en la cual buscamos la comprensión de dicho modelo por parte de los profesores e impactar en el aula por medio de actividades bien organizadas siguiendo el MCM como modelo didáctico para la gestión del conocimiento matemático.

2. Modelo de Competencia Matemática (MCM)

El desarrollo del Modelo de Competencia Matemática (MCM) ha pasado por diversas etapas de consolidación. En una primera instancia realizamos una revisión en profundidad sobre la literatura que había sobre competencias matemáticas. La primera conclusión que obtuvimos fue que no hay un consenso en la noción de competencia matemática, ni hay una estructura concreta que permita explicar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basándose en un enfoque por competencias. A partir de aquí, nuestro primer propósito fue llegar a un acuerdo sobre el aspecto relevante y diferenciador de las competencias: organizar la matemática escolar no solo por contenidos tales como álgebra, geometría, aritmética, sino que también destacar los procesos matemáticos tales como: modelizar, resolver problemas, argumentar, razonar y comunicar.

Para tal propósito, el modelo debía articular los *contenidos* con los *procesos*. Por una parte, los contenidos matemáticos los estructuramos en términos de Organizaciones

Matemáticas (Chevallard, 1999), basándonos en la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), ya que es un marco teórico que permite caracterizar detalladamente las estructuras matemáticas en la escuela. Por otra parte, se debe considerar que las competencias matemáticas son un objeto de logro en el largo plazo. De ahí que es relevante estudiar y articular su progreso con el estudio específico de los contenidos matemáticos. Dicho progreso o evolución de las competencias se caracterizó en términos de niveles de complejidad de la actividad, siguiendo la estructura piramidal sugerida por de Lange (1995) y los grupos de competencia formulados en PISA (OCDE, 2003).

Teniendo estos elementos en consideración, el modelo se conforma por tres componentes principales:

- *Competencia matemática*: en base a los estándares propuestos por la NCTM (2003) y las competencias matemáticas propuestas por Abrantes (2001), Niss (1999) y PISA (OCDE, 2003) acordamos elegir y optar por *procesos matemáticos nucleares* que denominamos competencias matemáticas, las cuales organizan y articulan el currículo de matemáticas. Estas competencias están compuestas por procesos específicos presentes de forma transversal a los contenidos matemáticos (NCTM, 2003).
- *Organizaciones matemáticas*: consideramos contenidos matemáticos estructurados según tareas y técnicas matemáticas, variables didácticas y condiciones de realización de dichas tareas (Chevallard, 1999).
- *Niveles de complejidad cognitiva*: se definen tres niveles de complejidad, organizados en función de las tareas y los procesos que conforman la competencia: niveles de reproducción, conexión, reflexión. La expresión nivel de complejidad se adopta de los grupos de competencia de PISA (OECD, 2003), basados en la pirámide propuesta por de Lange (1995).

3. Metodología de trabajo docente

En base a los resultados obtenidos del proyecto en que se desarrolló el MCM (Espinoza et al., 2008), surge la necesidad de estudiar cómo el profesor desarrolla un proceso de comprensión de las competencias matemáticas que ha de trabajar con sus estudiantes. En este sentido, ¿qué herramientas nuevas para la enseñanza le entrega al profesor de matemáticas el MCM? ¿De qué manera puede el profesor modificar su práctica docente al considerar un modelo didáctico de estas características? ¿Cuáles son las condiciones para que un profesor desarrolle actividades que potencien el nivel de reflexión en los estudiantes? ¿Cuál es una forma adecuada para generar un proceso de apropiación del MCM?

Para enfrentar estas preguntas, nos hemos involucrado en el desarrollo de una metodología de trabajo docente en torno al MCM que promueva la reflexión pedagógica necesaria para incorporar en las prácticas de aula el enfoque por competencias. Consideramos necesario que antes de enfocarnos en el aprendizaje y el desarrollo de las competencias en el estudiante, para lo cual se requerirían estudios longitudinales extensos temporalmente, es indispensable centrarnos en la enseñanza, discutiendo con profesoras y profesores el modelo de competencias matemáticas propuesto, reflexionando sobre su gestión en el aula y en cómo se llevan a cabo y concretizan en actividades matemáticas relevantes.

En este trabajo conjunto entre profesores e investigadores, es muy relevante el papel que juega la reflexión profesional, en este caso la reflexión de la práctica (Schön, 1983). Estos procesos reflexivos permitirán al docente cuestionar su conocimiento profesional, tanto el relativo al conocimiento pedagógico general, como el referido al conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1987). En este sentido, el análisis conjunto de experiencias clínicas de enseñanza se posiciona como un elemento fundamental de la metodología de trabajo docente. La reflexión y análisis de estas prácticas permitirán observar el nivel de comprensión de los profesores sobre las características que deben tener las situaciones didácticas y su implementación en el aula para el desarrollo de las competencias matemáticas.

El trabajo con los docentes se lleva a cabo en un Seminario (ocho sesiones), el cual está dividido en dos partes. En la primera parte del seminario (primeras cuatro sesiones), se estudian las componentes del MCM, analizando los casos clínicos y realizando algunas actividades de tipo taller, donde se evidencie y se ponga en práctica el trabajo anterior. La primera sesión se ha enfocado en el estudio de las competencias y procesos matemáticos, la segunda en los componentes constituyentes de una organización matemática, la tercera en los niveles de complejidad cognitiva y la organización de tareas matemáticas en base a éstos, y la cuarta ha servido de síntesis del MCM. En la segunda parte del Seminario (quinta a octava sesión), los docentes analizan algunas de sus prácticas (grabadas entre las sesiones anteriores) y llevan a cabo un proceso de diseño de una secuencia de aprendizaje sobre los problemas y técnicas de cálculo relativas al campo aditivo para el primer y segundo curso de primaria.

Al finalizar este Seminario, las profesoras participantes implementarán en sus aulas las secuencias diseñadas, las cuales serán estudiadas para determinar el grado de apropiación del MCM. Dicha implementación será finalmente discutida en sesiones grupales de trabajo, con análisis de las prácticas realizadas, dando la oportunidad a las docentes de optimizar sus producciones, y cerrando así el ciclo de reflexión profesional. Antes de pasar a explicar la experiencia de organización de tareas matemáticas realizadas por las docentes en la tercera sesión del Seminario, mostraremos brevemente las ideas más relevantes acerca de los niveles de complejidad, considerados como una parte central del MCM.

4. Niveles de Complejidad: condiciones y procesos

Si bien la discusión sobre niveles de complejidad de los problemas matemáticos se ha desarrollado principalmente bajo un punto de vista evaluativo, es posible caracterizar las propias actividades de aprendizaje, entendidas como tareas matemáticas que progresan debido a variables didácticas, definiendo de esta forma ciertas condiciones de realización para dichas actividades (Espinoza et al., 2008).

El marco teórico de PISA, que recoge fuertemente los trabajos desarrollados por de Lange (1995), establece grupos de competencias, en el sentido del grado de competencia que tiene un estudiante para realizar una tarea matemática propuesta. De hecho, en los resultados empíricos de la prueba PISA se confirma que los estudiantes que resuelven problemas de mayor complejidad, también responden a los problemas de complejidad inferior. Esto permite sostener que la caracterización en *niveles de complejidad* de las tareas matemáticas permite evidenciar con mayor claridad el nivel de competencia que logran los estudiantes. De esta forma, los niveles de complejidad se distinguen por las demandas cognitivas a las cuales está sujeto el estudiante y que están

implicadas en los procesos requeridos y por las condiciones de las tareas matemáticas a realizar.

En el siguiente cuadro se definen los tres niveles de complejidad en los términos anteriores, y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de éstas.

Reproducción	Este nivel requiere esencialmente de la reproducción del conocimiento estudiado: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, ejecución de procedimientos rutinarios.
Conexión	Este nivel se apoya sobre el nivel de reproducción, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.
Reflexión	Este nivel incluye un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema, relacionado a la capacidad de los estudiantes para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problemas que contienen más elementos y pueden ser más «originales» (o inusuales) que los del nivel de conexión.

Tabla 1. Niveles de Complejidad Cognitiva (Espinoza et al., 2008, p. 19)

El paso de un nivel de complejidad a otro se puede explicar en términos del grado de familiaridad de la actividad y grado de reflexión que requiere el estudiante. Una actividad en un nivel de reproducción demandará procesos cognitivos limitados; en cambio, una actividad en un nivel de reflexión requerirá en el estudiante poner en juego una serie de dichos procesos. La tesis que hemos desarrollado en otros estudios (Espinoza et al., 2008; Solar, 2009) y que continuamos en esta investigación, es que el nivel de complejidad cognitiva de una actividad matemática puede ser explicada en términos de las condiciones de realización de una tarea y los procesos cognitivos que demandan. Mientras más procesos cognitivos, más demanda tiene la tarea y por tanto mayor nivel de complejidad; por otra parte al complejizar las condiciones de realización de la tarea más complejidad adquiere la actividad. En consecuencia, el nivel de complejidad de una actividad se obtiene al articular los procesos y las condiciones de realización de la tarea matemática.

5. Organización de Tareas Matemáticas

En el marco de la metodología de trabajo docente, queremos mostrar un episodio en donde las profesoras, al verse expuestas a la necesidad de organizar una serie de tareas matemáticas siguiendo los niveles de complejidad, lo hacen de distintas formas y con distintos criterios.

Este tema se trató en la tercera sesión del Seminario, la cual tuvo como propósito estudiar el nivel de complejidad de las actividades como el tercer componente del MCM. En primer lugar, las participantes analizaron un video de una docente que gestionó una situación ya estudiada en sesiones anteriores, pero donde cambiaban las condiciones de realización, para posteriormente establecer una secuencia que ordenara las condiciones de una tarea matemática, según el nivel de complejidad.

Finalmente, las docentes debían organizar en tres clases, a modo de secuencia didáctica, un conjunto de tareas matemáticas. Éstas se señalan a continuación:

- | |
|---|
| A. Resolver problemas de cambio y composición directos con números del 0 al 100, usando combinaciones aditivas básicas. |
|---|

- B. Resolver problemas de cambio y composición inversos con números del 0 al 100, usando combinaciones aditivas básicas.
- C. Resolver problemas de cambio y composición inversos con números del 0 al 100, con números de dos cifras más un dígito cualquiera.
- D. Calculan mentalmente adiciones y sustracciones del 0 al 100, extendiendo las combinaciones aditivas básicas.
- E. Calculan mentalmente adiciones y sustracciones del 0 al 100, en sumas de un múltiplo de 10 más un dígito cualquiera.
- F. Calculan mentalmente adiciones y sustracciones del 0 al 100, en sumas de números de dos cifras.
- G. Enuncian procedimientos para sumar y restar en un ámbito del 0 al 100, basadas en descomposición canónica.
- H. Enuncian procedimientos para sumar y restar en un ámbito del 0 al 100, entre múltiplos de 10.
- I. Enuncian procedimientos para sumar y restar en un ámbito del 0 al 100, en cálculos de número de dos cifras con un número menor que 5.

Tabla 2. Tareas matemáticas para ser organizadas en una secuencia didáctica

Dada la naturaleza de las tareas propuestas (resolver problemas, calcular, enunciar procedimientos), y en cuya redacción estaban estipuladas las condiciones de realización que obedecían a ciertas variables didácticas (ámbito numérico, tipo de problema, técnica de cálculo, relación entre los números), las docentes generaron distintas organizaciones de las tareas. A medida que compartieron el trabajo realizado, sistematizamos las distintas secuencias propuestas en la pizarra. Cuatro docentes propusieron los siguientes ordenamientos.

	Clase 1	Clase 2	Clase 3
Ana	D – E – H – G	A – B – C	F – G – H – I
Tamara	I – E – H	A – D – G	B – C – F
Carmen	I – G – D – A	H – E – C	B – F – ...
María	E – H – D – F	G – A – B – C	...

Tabla 3. Ordenamientos de las tareas matemáticas propuestos por las docentes⁶⁹

Se discutió con las docentes cuales eran los criterios que fundamentaban cada secuencia propuesta. A continuación mostramos un extracto de lo que nos dicen dos profesoras, que corresponden a dos de las organizaciones de tareas que más nos llaman la atención.

Ana	Carmen
<i>Bueno, primero vamos a trabajar desde la parte mental (...) Vamos jugando con las combinaciones básicas como más pequeñas (...) Pensemos, bueno, que vamos a trabajar en esta parte adición y sustracción... la verdad es que me quedé también un poco pensando en si viene o no secuenciado un sobreconteo, nos vamos a meter ahora de lleno en la adición y sustracción, entonces como para</i>	<i>Bueno primero fue de procedimiento, cómo los niños lo iban haciendo, después fue de cálculo y después ellos lo final que hacían, lo último fue la resolución de problemas. Eso fue lo que nosotros quisimos hacer (...) Procedimiento de cálculo, procedimiento cómo lo hacían ellos, después el cálculo cómo ellos lo iban, cómo lo aplicaban y después fue la resolución de problemas (...) Y esa es la</i>

⁶⁹ Estos nombres han sido cambiados para resguardar la confidencialidad de las profesoras participantes.

<p><i>irlo combinando (...) les voy entregando el cómo voy haciendo la cosa, pensando además que lo vamos a ir haciendo resolviendo problemas (...) La segunda clase vamos a resolver problemas, cómo vamos a resolver problemas, vamos a ir haciendo la combinación directa y vamos a resolver entre los directos y lo inversos. Utilizando además, bueno, la adición, suma y resta, en forma conjunta.</i></p>	<p><i>idea que teníamos para las futuras, después la de descomposición canónica, que aplicara también eso mismo con la resolución de problemas. Eso, como habían tres resoluciones de problemas, una resolución en cada clase (...) Eso es lo que pretendíamos nosotros, primero ver cómo lo hace el niño, después practicar algún tipo de cálculo mental y después aplicarlo en la resolución de problemas, esa era nuestra idea.</i></p>
--	--

Tabla 4. Transcripción de lo que sostienen las docentes sobre sus organizaciones de tareas matemáticas.

El caso de Ana fue llamativo, pues ella realizó una articulación de las tareas matemáticas según el nivel de complejidad, basándose en las condiciones de realización de cada una de ellas, pero agrupándolas de manera general por género de tarea en cada clase. De la misma manera, llama la atención la organización propuesta por Carmen, quien distribuye en cada clase un tipo de tarea y éstas se complejizan clase a clase. Las organizaciones aquí presentadas muestran las formas organizativas implícitas que tienen estas docentes, quienes como Ana sistematizan de lo más simple a lo más complejo, o quienes como Carmen organizan la enseñanza potenciando distintos tipos de actividad matemática en cada clase y articulando su complejidad en el tiempo.

6. Esquemas de organización de tareas

El episodio antes descrito nos permite abstraer la existencia de esquemas implícitos en la organización de las actividades de enseñanza. Para el caso de Ana, ella organiza las clases de manera de trabajar una solo tipo de tareas en cada una de ellas. Sin embargo, contempla los niveles de complejidad al graduar las tareas específicas según las condiciones de realización de las mismas. En el caso de Carmen, la distribución de tareas no es secuencial, sino que obedece a una estructura que podríamos llamar matricial. Verticalmente (cada clase), Carmen selecciona los tres tipos de tareas, que apuntan a distintas competencias y procesos, con lo cual los estudiantes tienen la posibilidad de desarrollar una actividad matemáticas más rica desde el punto de vista del desarrollo de competencias. Horizontalmente (a través de las clases) cada uno de estos procesos se va complejizando, de forma de que el estudiante viva un proceso de estudio que lo desafía a lo largo del tiempo, y que además es inclusivo en su construcción, evidenciando de esta forma la lógica de los niveles de complejidad. La figura 1 muestra estos recorridos.

Desde el punto de vista de la calidad de la organización, el esquema de Ana se ve atomizado por la tarea, aunque evoluciona dentro de la clase. Esto hace pensar que en los criterios de organización no se contemplan los procesos como elemento que define el nivel de complejidad, sino que sólo las condiciones de realización de las tareas. En cambio, el esquema de Carmen presenta de manera cíclica las tareas, considerando tanto la evolución de los procesos como de las condiciones de realización para definir el avance en complejidad del tema tratado.

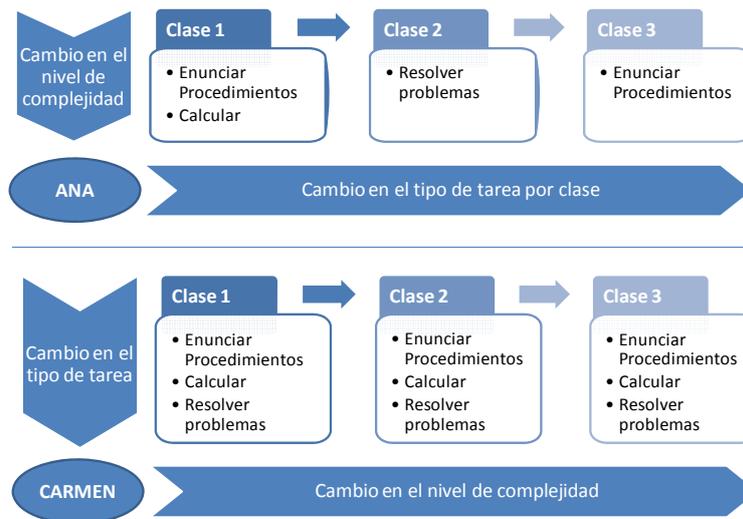


Figura 1. Esquemas de organización de tareas de Ana y Carmen

Por último, el hecho que estas estructuras surgieran de las propias docentes, nos señala que la metodología de trabajo docente, al menos en este nivel y momento del proceso de reflexión, está produciendo algunas comprensiones sobre las potencialidades del MCM para organizar la enseñanza. Tanto la riqueza teórica de la diferencia entre estas estructuras, como el aporte a la labor docente de las profesoras, son resultados que apoyan las metodologías de trabajo para la comprensión del MCM que proponemos.

7. Referencias

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. In T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87-172). New York: SUNY Press.
- Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., Solar, H., Rojas, D., & Matus, C. (2008). Análisis de las competencias matemáticas en primer ciclo. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Proyecto FONIDE DED0760. Santiago: Mineduc.
- Nctm. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Ocde. (2003). Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. Paris: OCDE.
- Schön, D. A. (1983). *The Reflective practitioner: how professionals think in action*. Londres: Temple Smith.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Solar, H. (2009). Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.