

CONTEXTOS, INTERESES Y SENTIDO DE REALIDAD EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA. UNA EXPERIENCIA CON EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Jhony Alexander Villa-Ochoa
Universidad de Antioquia
javo@une.net.co

RESUMEN

Desde diferentes perspectivas la modelación, al interior de la Educación Matemática, puede observarse como un proceso que se relaciona con las dinámicas que se tejen con las matemáticas en el ámbito escolar. En medio de dicho proceso, el profesor de matemáticas cumple un papel fundamental, en el cual se debe establecer “vínculos” entre las matemáticas y los contextos socioculturales en los cuales se desenvuelve. En este documento retomo la noción de *sentido de realidad* propuesta en Villa-Ochoa et al. (2009) y Villa-Ochoa y Jaramillo (2011) para discutir un episodio en el cual un profesor de matemáticas (estudiante de un programa de Maestría en Educación Matemática) incursiona en el diseño de modelos matemáticos, des-cubriendo algunas relaciones entre las matemáticas y la cultura de la cual el profesor es miembro. Al finalizar, planteo algunas reflexiones frente a las nociones de *interés* y de *sentido de realidad* en proyectos de modelación matemática.

Palabras clave:

Sentido de realidad, contexto, interés, modelación matemática

1. LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y EL SENTIDO DE REALIDAD

De modo general, en la literatura internacional se reconocen relaciones entre la “realidad” y las matemáticas como una de las características que identifica la modelación matemática. El término *realidad* ha sido uno de los focos de debate filosófico en el campo científico en los últimos años. Al respecto, Araújo (2007, 2009) señala que, generalmente, en las relaciones entre la matemática y la realidad se presenta una dicotomía bastante discutible puesto que presenta a la matemática como una “abstracción” que no hace parte de la realidad. Para la autora, es claro que este tipo de discusiones están basadas en principios filosóficos divergentes que, según ella, se fundamentan en visiones “platónicas” o “formalistas” de las matemáticas. Atendiendo a estas cuestiones, la autora concluye que si la relación entre matemática y realidad se inspira en el platonismo, la modelación matemática se vería como una manera de describir, a través de la matemática, una realidad preexistente; si, por el contrario, fuera inspirada en el formalismo la modelación podría entenderse como el uso de alguna teoría formal existente (o la construcción de una nueva teoría) para actuar en un problema de la realidad (Araújo, 2007, 2009).

Por su lado, Villa-Ochoa, Bustamante y Berrío (2010) asumen la noción de realidad en la modelación matemática como un *sistema* en el que se implican fenómenos y contextos, los cuales son observados y pueden ser estudiados o analizados matemáticamente por el modelador, teniendo en cuenta múltiples dimensiones del sistema. Estos investigadores no agotan su idea de realidad en los aspectos extramatemáticos; sin embargo, declaran su interés en las situaciones asociadas a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela como el punto en el cual la modelación matemática tiene su génesis. Poner el interés en este tipo de contextos llama especialmente la atención porque, en las maneras flexibles que debe tener la modelación, se puede atender a las diferentes demandas sociales que se le han impuesto a las matemáticas escolares, entre ellas, las que

tienen que ver con que los estudiantes comprendan e interpreten el mundo que les rodea, así como la formación de un estudiante capaz de participar de manera activa en la sociedad y la cultura (Aravena et al., 2007, Blum y Borromeo-Ferri, 2009). De otro modo, a partir de los contextos señalados por Villa-Ochoa et al. (2010), también es posible que se (re)creen otros aspectos propios de la modelación matemática, como los que están asociados a la identificación y manipulación de datos, el reconocimiento de relaciones, a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción del modelo para su resolución, entre otros.

Las anteriores consideraciones sugieren que el aula de clase de matemáticas se promueva como un espacio social de producción de conocimiento y, en consecuencia con ello, se impongan ciertos desafíos a los profesores, no solo para orientar a los estudiantes en la elección de un tema o fenómeno a estudiar y su consecuente modelación, sino también para que ellos mismos desempeñen su papel como modeladores en esta perspectiva.

El desarrollo de una modelación que se comprometa con los espacios sociales en los cuales emerja está imbricado con la capacidad del modelador para relacionarse con tales espacios, de su "capacidad para leer el mundo". Es en este sentido que, tanto en Villa-Ochoa et al. (2009) como en Villa-Ochoa y Jaramillo (2011) se describe la noción de "*sentido de realidad*" como:

[...] la sensibilidad que un profesor debe tener frente a la realidad, que además incluye la intuición y la capacidad de detectar las situaciones y oportunidades del contexto sociocultural frente a las cuales se pueda movilizar el conocimiento de los estudiantes, dicho sentido incluye una buena dosis de imaginación y creatividad. El sentido de realidad, más que una componente racional del conocimiento del profesor, es una componente subjetiva que metafóricamente actúa como una lupa con la cual el profesor observa la realidad objetiva y le posibilita la (re)significación de dicha realidad a partir de un proceso de modelación matemática. (Villa-Ochoa et al., 2009, pp. 169-170)

La noción de *sentido de realidad* emergió en el trabajo cuando los investigadores analizaban las maneras en que un conjunto de profesores hacía uso de situaciones asociadas a los contextos de los estudiantes. En los episodios con los profesores, los investigadores observaron que, a pesar que algunos de ellos tenían actitudes favorables frente a la cualificación de sus prácticas como profesores y que asumían la importancia del vínculo de las matemáticas con la "realidad", sus actividades en las aulas de clase no trascendían los rutinarios enunciados verbales (*word problems*). De esa manera, los investigadores observaron la necesidad de que los profesores desarrollaran, de alguna manera, su "*sentido de realidad*" como una manera de atender a esta situación escolar.

En este artículo me propongo retomar la noción de "*sentido de realidad*", descrita anteriormente, con el fin de analizar un episodio en el cual, un profesor de matemáticas se compromete con la producción de modelos matemáticos a partir del contexto en el cual está inmerso.

2. LA EXPERIENCIA DESDE LA CUAL SE EXTRAE EL EPISODIO

El episodio que analizaré en este artículo se deriva de una experiencia de investigación en la que se implicaron dos estudiantes de maestría en Educación (Matemática), quienes se desempeñaban como profesores de instituciones educativas en municipios de Antioquia, cuya base económica estaba fundamentada en el cultivo de café.

Uno de los estudiantes, denominado con el seudónimo de Alexander, había participado cuatro años atrás en otra investigación que se preocupó por las consideraciones de los profesores frente al uso de la modelación matemática en las aulas escolares de dicha subregión. En la investigación de aquel entonces, Alexander se había mostrado como un profesor para quien las relaciones entre las matemáticas y “la realidad” estaban fundamentadas por los espacios académicos en los cuales había participado (cursos de física y de mecánica automotriz). En dicho estudio, no se encontró evidencia que este profesor usara situaciones de los contextos extraescolares para observar otras dinámicas entre las matemáticas y dichos contextos.

Tanto Alexander como su colega, ingresaron al Programa de Maestría en Educación con el ánimo de cualificar su práctica como profesores a través de la investigación. En ese sentido, traían ciertas preocupaciones frente a las dificultades observadas en sus estudiantes sobre la falta de significados de las expresiones algebraicas. En la revisión de la literatura realizada por los profesores (estudiantes de maestría), pudieron encontrar sugerencias que les permitieron orientarse por la modelación matemática como una manera de atender a dicha necesidad.

El episodio que presento en este documento se desarrolló en las primeras sesiones de trabajo, las cuales estaban centradas en la delimitación del problema de investigación y en ampliar la concepción teórica de la modelación matemática en Educación Matemática lo cual orientaría el desarrollo de la disertación de maestría.

3. EL SENTIDO DE REALIDAD Y EL DES-CUBRIMIENTO DE RELACIONES ENTRE CONTEXTOS

En la primera parte del trabajo se estableció un diálogo con Alexander, el cual me permitió observar que su formación como profesor a nivel de pregrado estuvo marcada por una secuencia de disciplinas matemáticas, cuyo eje se fundamentaba en la lógica; evidencias de este hecho se encuentran en verbalizaciones como “*al principio el curso de modernas [primer curso de lógica] fue algo difícil para uno empezar con lógica, pero uno ve que en todas las materias la va a necesitar [...] aunque por mucho que uno vea, esas demostraciones de límites los cálculos [cálculo diferencial, integral y en varias variables] por ϵ delta siempre me dieron duro*”. En el diálogo también surgieron comentarios, por los espacios en los cuales él recuerda haber desarrollado modelación, frente a lo cual comentó: “*así que yo recuerde, podría ser cuando en álgebra trabajamos problemas con ecuaciones, y en cálculo con los máximos y mínimos, y ya [hizo una pequeña pausa, se mostró un poco pensativo] ¡Ah, sí! En especial en ecuaciones diferenciales que uno resolvía muchas de esas aplicaciones de salmueras y así, ya cuando uno veía física, sí veía la necesidad de las matemáticas*”. Estas verbalizaciones dan cuenta de que más allá de los enunciados verbales o problemas contextualizados presentados en los libros de texto, el profesor no recuerda haberse implicado en otros fenómenos en los que las matemáticas estuvieran vinculadas a otras maneras de desarrollar procesos de modelación matemática.

Con el ánimo que el profesor pudiera reconocer otras maneras de establecer relaciones entre las matemáticas y los contextos propios de los estudiantes, se le propuso analizar un fragmento del trabajo de Berrío (2012), en el cual se describe el trabajo de modelación desarrollado por un conjunto de estudiantes rurales inmersos en la cultura cafetera. Según Berrío, los estudiantes se comprometieron en la comparación de la cantidad de árboles que pueden caber en un terreno inclinado y otro plano llegando a modificar algunas ideas que estaban presentes en algunos miembros de la comunidad.

Esa situación permitió que Alexander se *activara* y pusiera de relieve el conocimiento del contexto que poseía previamente; una de las declaraciones del profesor es “[...] en los terrenos inclinados las técnicas de sembrado son diferentes a las de los terrenos planos, para poder evitar la erosión”. En el mismo diálogo, el profesor aclaró algunos términos propios de la jerga cafetera tales como *calle* y

puente; de esa forma el profesor puntualizó que *calle* hace alusión a “*la distancia entre árbol y árbol de manera horizontal*” (D_2 ver la figura 1), mientras que *puente* se asocia con “*la distancia vertical entre árbol y árbol*” (D_1 , ver la figura 1).

Fue en ese momento que el investigador le formuló al profesor la pregunta *¿cuántos árboles pueden sembrarse en un terreno?* Frente a lo cual el profesor señaló que “*en caso que fuera plano [el terreno], se haría la siembra como esa [refiriéndose a la distribución rectangular de los árboles en la figura del tablero, Figura 1].*”

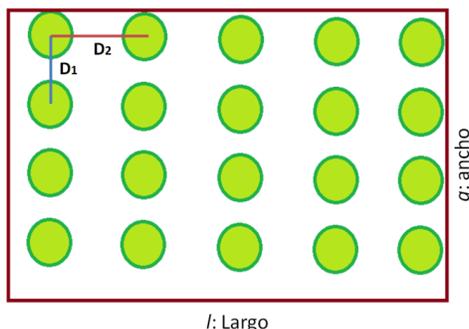


Figura1. Gráfico construido entre el investigador y Alexander

Continuando con la interacción, el profesor agrega “Habría que conocer el área del terreno y así se sabe cuántos árboles cabrían”, el diálogo se adelantó en los siguientes términos:

- Investigador (I) : *¡bueno!... hagámoslo para un terreno rectangular con longitudes de a y l [el investigador escribió dichos símbolos en el gráfico del tablero]*
- Alexander (A) : *Sí, ... pero también necesitamos el puente y la calle*
- I : *¿Qué símbolos usamos para eso?*
- A : *No necesitamos símbolos porque eso se usa entre uno, y uno con veinte [1 mt o 1.20 mts]. Pero bueno, sí, pongámosle D_1 y D_2 .*
- I : *¿Por qué varía la distancia?*
- A : *tiene que ver con el tipo de café que se siembre, sobre todo, para que no se den sombra, en el puente pueden casi tocarse, pero en la calles si debe ser más separada para que pueda pasar el recolector.*
- I : *¡listo! Pero, ¿cómo calculamos cuántos árboles caben?*

El diálogo continuó entre Alexander y el investigador de tal manera que llegaron a determinar que para calcular la cantidad de árboles que pueden sembrarse horizontal y verticalmente se establecen respectivamente las relaciones $C_1 = \frac{a}{D_1}$ y $C_2 = \frac{l}{D_2}$. De esa forma, la cantidad de árboles está dada por la expresión $C_1 \times C_2 = \frac{a}{D_1} \times \frac{l}{D_2} = \frac{al}{D_1 D_2}$.

Una vez construida la expresión anterior, el investigador pregunta *¿Qué tipo de expresión es esa?* A lo que Alexander señala “*depende de las variables*”, y agrega que “*si el puente y la calle se tomaran iguales, sería una expresión racional de la forma $\frac{a}{x^2}$ [...] ¡Uy! vea como uno puede enseñar funciones racionales así!*”

La discusión continuó frente a los valores l y a de la figura 1, llegando a señalar que para el caso de una hectárea, la expresión se convertiría en modelo $\frac{10.000}{D_1 D_2}$. Otras reflexiones sobre el significado de esta expresión como una unidad de medida surgieron y, a partir de allí, se produjo la expresión $\frac{10.000}{D_1 D_2} \times A$ (donde A representa el área del tal terreno). Dicha área permitió calcular la cantidad de árboles que podría haber en cualquier terreno plano con solo conocer el área.

En la confrontación de esta expresión ($\frac{10.000}{D_1 D_2}$) con el trabajo de Berrío (2012), el profesor se comprometió con buscar este modelo en los documentos de los técnicos caficultores, pues como lo señalaron los estudiantes participantes del estudio de Berrío, éste parece ser el modelo usado por la Cooperativa de Caficultores de Colombia.

Frente a estas “motivaciones” de Alexander, el investigador lo instó para que lograra determinar otros modelos matemáticos en el mismo contexto. Ante lo cual el profesor sugirió temas como el control de plagas, el proceso producción y de recolección y venta del café, etc.

Conocer un modelo que le permitiera describir la cantidad de árboles de café en cualquier finca *activó* en el profesor el “interés” por usar esta expresión, para determinar un modelo que le permitiera describir la producción de una finca. Para ello, el profesor describió la unidad *carga*, la cual es propia de la cultura cafetera; esta unidad equivale a 650 kg de café; a partir de allí, el profesor señaló que la relación de la producción es de 8/1000 y, con base en esos *conocimientos* el profesor produjo la expresión $(80/pq)x$ como un modelo que describe la cantidad de cargas de cualquier finca, dependiendo de la distribución de la calle y el puente (p y q) y del área del terreno x . En la siguiente imagen se muestra un registro de la producción de Alexander.

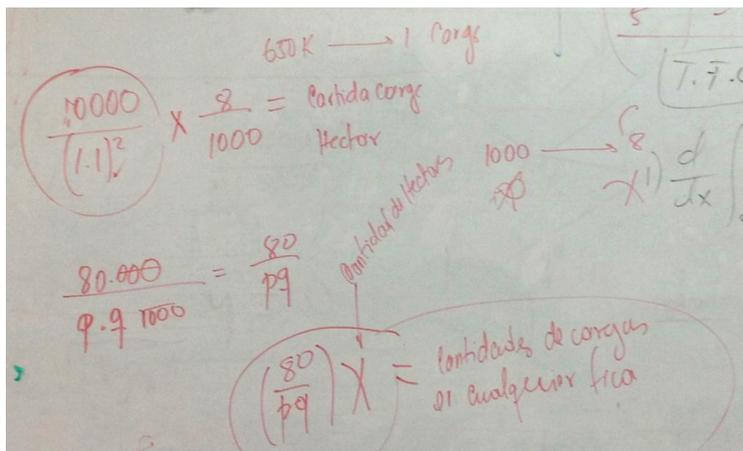


Figura 2. Modelos producidos entre el investigador y Alexander

Como éste, otros modelos comenzaron a ser producidos por Alexander; algunos de ellos, se convirtieron en actividades que posteriormente él deseaba incluir en el desarrollo de su trabajo de grado.

4. ALGUNAS REFLEXIONES FINALES

En la primera parte de este artículo presenté el “*sentido de realidad*” como una noción equiparable con la capacidad que tienen las personas para “leer el mundo matemáticamente”, en otras palabras, la

capacidad para analizar los contextos que le rodean y reconocer en ellos fenómenos susceptibles de modelarse matemáticamente. Conforme se mostró en el desarrollo del trabajo con Alexander, esta noción no es incompatible con la noción de *interés* en los proyectos de modelación presentada por Herminio y Borba (2010).

De un modo general, una mirada a los diferentes trabajos de modelación matemática permite diferencias, al menos, en dos usos de la noción de *interés*, a saber:

- ***El interés como un aspecto intrínseco al sujeto que modela:***

En este aspecto, la motivación de los sujetos por algún tema se asume como hecho fundamental para que el modelador se muestre proclive al desafío de desarrollar modelación matemática a partir de tal asunto. Algunas de las aseveraciones que se pueden encuadrar en esta característica son:

- “...el estudiante participa de la elección del problema dependiendo de su interés...”
- “... se debe abordar un problema que sea del interés de los estudiantes...”
- “[en la modelación] se hace investigación a partir de un problema de su interés [de los estudiante]”.
- “la modelación proporciona suficiente autonomía para que el estudiante busque comprender más sobre los temas de su interés”.

- ***El interés como un producto o meta de la modelación:***

En este aspecto la modelación se observa como una estrategia que permite generar motivación por el estudio de la matemática, la cual es asumida como una consecuencia de involucrar situaciones de la cotidianidad. Algunas referencias a esta acepción se encuentran en las siguientes líneas:

- “[...] a través de la modelación los estudiantes consiguen motivarse por el estudio de tópicos de las matemáticas...”
- “...la modelación posibilita otras visiones y motivaciones del estudiante pues asume como objeto de estudio su propio contexto”
- “en la modelación el estudiante va demostrando mayor interés y comprensión, de esa manera el aprendizaje se torna más enriquecido...”

Según Herminio y Borba (2010) la noción de *interés en proyectos de modelación* ha tenido un papel destacado en la tradición investigativa de algunas comunidades en modelación matemática en Educación; sin embargo, estos autores señalan que aún existen muchas preguntas abiertas frente a esta noción y su relación con el proceso de modelación.

Como lo expresé anteriormente, una de las acepciones usadas en la investigación en Educación Matemática tiene que ver con *el interés como un aspecto intrínseco al sujeto que modela*, en ese sentido, parece existir una relación directa entre tal interés y la elección de tema o problema a modelar; esta característica es la que permite cierta afinidad entre las nociones de *interés* y el *sentido de realidad*; sin embargo, las dos nociones no se agotan una en la otra.

El caso de Alexander presenta evidencia que aunque él es un miembro activo de la cultura del cultivo de café y conoce de manera detallada las dinámicas que en ella se presentan, no existía un vínculo claro entre los saberes construidos culturalmente y el conocimiento matemático producido en la escuela. La observación de Alexander al trabajo de Berrío (2012) sobre la producción de modelos y las reflexiones que aparecieron en los estudiantes, le permitió descubrir una serie de relaciones matemáticas que pueden ser vistas a la luz del contexto cafetero; de esta manera, sus roles como un miembro de la cultura cafetera parecen haber encontrado elementos comunes con su rol de profesor de matemáticas y ya no solo como dos componentes disyuntos de su cotidianidad.

Una vez develadas algunas relaciones entre la cultura cafetera y las matemáticas escolares, aparecieron nuevos *intereses y motivaciones* por continuar la búsqueda de nuevas relaciones matemáticas. En este punto, la noción de *interés* por modelar matemáticamente relaciones en el contexto parece atender simultáneamente a los dos énfasis descritos anteriormente; en primer lugar se muestra como un resultado de la *activación* de cierta sensibilidad frente a la matemática presente en el contexto del profesor, sin embargo, también se convierte en motor para que él mismo se centre en dicho contexto para formular nuevos modelos matemáticos.

Finalmente, la información proporcionada por Alexander aporta mayores evidencias frente al hecho que, no existe una transferencia automática de los contenidos vistos de manera teórica en las aulas de clase hacia la capacidad de modelar matemáticamente ni de observar en las diferentes situaciones del cotidiano, situaciones susceptibles de ser modeladas. Estas reflexiones imponen desafíos para que la investigación proporcione mayores evidencias sobre la manera como pueden organizarse los espacios de formación de profesores que atiendan a un desarrollo del *sentido de realidad*, por medio del cual, la modelación matemática puede emerger de situaciones del cotidianas para el profesor y sus estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

- ARAVENA, M.; CAAMAÑO, C.; GIMÉNEZ, J. Modelos matemáticos a través de proyectos. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-Relime**, v. 11, n. 1, p. 49-92, 2008. ISSN 1665-2436.
- ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: BARBOSA, J.; *et al* (Ed.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007. p.17-32
- ARAÚJO, J. L. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 55-68, 2009. ISSN 1982-5153.
- BERRÍO, M. **Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café**. (Disertación de Maestría no publicada) Universidad Nacional de Colombia: Medellín. 2012
- BLUM, W.; BORROMEO-FERRI, R. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.
- HERMINIO, M. H. G. B.; BORBA, M. C. A NOÇÃO DE INTERESSE EM PROJETOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 12, n. 1, p. 111-127, 2010. ISSN 1983-3156.
- VILLA-OCHOA, J.; JARAMILLO, C. M. Sense of Reality through mathematical modeling. In: KAISER, G.; BLUM, W., *et al* (Ed.). **Trends in the teaching and learning of mathematical modelling – ICTMA14**. New York: Springer, 2011. p.701-711.
- VILLA-OCHOA, J. A. *et al*. Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 159-180, 2009. ISSN 1982-5153.



5, 6 e 7 DE JUNHO DE 2013

Centro Universitário Franciscano | Santa Maria - Rio Grande do Sul

VILLA-OCHOA, J.; BUSTAMANTE, C.; BERRÍO, M. Sentido de realidad en la modelación Matemática.
In: LESTON, P. (Ed.). **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. 23, México: Comité
Latinomaericano de Matemática Educativa, 2010. p. 1087-1096