CB-1.300

IDENTIFICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA

Claudio Fuentealba[1,2] – Edelmira Badillo[2] – Gloria Sánchez-Matamoros[3]
cfuentealba@uach.cl – edelmira.badillo@uab.cat – gsanchezmatamoros@us.es
[1]Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería, Universidad Austral de Chile, Chile. [2]Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimental, Universitat Autònoma de Barcelona, España. [3]Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla, España.

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario
Palabras clave: derivada, esquema, Teoría APOE, subniveles de desarrollo

Resumen

Los resultados de investigaciones relacionadas con el aprendizaje del concepto de derivada constatan que, a pesar de ser un concepto indispensable, su comprensión resulta muy compleja, observándose una cantidad significativa de estudiantes universitarios que solo logra alcanzar una comprensión parcial. Ésta problemática a pesar de no ser nueva, aún constituye un gran desafío de la educación matemática a nivel universitario y es una constante preocupación para las instituciones educativas de nivel superior. En esta investigación presentamos un análisis exploratorio cuyo fin es identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo del esquema de derivada alcanzados por estudiantes universitarios con instrucción previa en cálculo diferencial.

Introducción

La derivada es uno de los conceptos más importantes del cualquier curso de Cálculo y corresponde a una herramienta fundamental en la comprensión de los fenómenos que involucran el cambio y variación de magnitudes. Sin embargo, a pesar de ser un concepto básico y transversal en los currículos universitarios de matemáticas, ingeniería y otras ciencias, su comprensión es compleja para una gran parte de los estudiantes. Entre algunos de los aspectos más importantes que provocan esta dificultad en la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes se encuentran; (1) la creación y utilización de diseños intruccionales que privilegian la excesiva mecanización y memorización, convirtiendo al concepto de derivada en un conocimiento algorítmico que se construye por medio de la resolución de cientos de tareas que solo involucran la aplicación correcta de determinadas

ISBN 978-84-945722-3-4

operaciones algebraicas, lo cual, obstaculiza la construcción de una comprensión más completa del concepto (Dawkins y Epperson, 2014), (2) la excesiva predilección de por el uso de tareas que involucran la utilización de un solo modo de representación, olvidando que la conversión entre modos de representaciones y la coordinación (síntesis) entre distintas representaciones es fundamental para lograr un nivel alto de comprensión, pues cada representación tiene asociadas algunas características del concepto, pero no todas (Duval, 2006; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006). Como consecuencia de lo anterior, se observa que una gran parte de los estudiantes tienen éxito al enfrentarse a ese tipo de tareas, sin embargo, estos mismos estudiantes pueden mostrar dificultades y errores cuando la resolución de la tarea que requiere de la comprensión del significado de la derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o de su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente, o de ambas simultáneamente (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Baker, Cooley y Trigueros, 2000).

En este trabajo nos centramos en identificar el desarrollo de la compresión del concepto de derivada alcanzado por un grupo de estudiantes universitarios luego de un curso de Cálculo Diferencial.

Marco teórico

En este trabajo hemos consideramos el marco propuesto por la Teoría APOE (Arnon, et al., 2014; Asiala et al., 1997), la cual se basa en la idea de *abstracción reflexiva* propuesta por Piaget y García (1983). La Teoría APOE considera que la comprensión de un concepto, por parte de un estudiante, comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, en términos de *acciones*. Estas *acciones* se *interiorizan* para formar *procesos*, que a su vez, se *encapsulan* para formar *objetos*. Con relación a los *procesos*, éstos pueden ser generados a partir de mecanismos de *coordinación* o *reversión* de otros *procesos*, previamente construidos por el estudiante, o bien por medio de la *generalización* de éstos. Finalmente, las *acciones*, los *procesos* y los *objetos* se pueden organizar en *esquemas* (Dubinsky, 1991; Arnon et al., 2014). Un *esquema* debe entenderse como una construcción cognitiva compleja y conformada por *acciones*, *procesos*, *objetos*, otros *esquemas* y sus interrelaciones. Dichas estructuras se encuentran relacionadas en la mente del estudiante, consciente o inconscientemente, y son evocadas cuando se enfrenta a distintas tareas. Este constructo de *esquema* y los mecanismos de *abstracción reflexiva* permiten explicar la

ISBN 978-84-945722-3-4

manera en que se construyen los conocimientos matemáticos en la mente de un estudiante, a través de las estructuras cognitivas y las relaciones establecidas entre ellas (Trigueros, 2005). Los *esquemas* según Piaget y García (1983) crecen a través de distintos mecanismos y se desarrollan o evolucionan pasando por tres niveles, Intra-Inter-Trans. Estos niveles son denominados triada y se suceden según un orden fijo, caracterizándose por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto. Para Arnon et al. (2014) un estudiante en el nivel Intra del desarrollo de un *esquema* se centra en *acciones*, *procesos* y *objetos* individuales sin relacionarlos. En el nivel Inter, hace uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y establece relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en el mismo modo de representación. Este nivel se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre los *procesos* y los *objetos* que conforman el *esquema*. Finalmente, en el nivel Trans, el estudiante usa elementos matemáticos de forma correcta en todos los modos de representación y establece relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en diferentes modos de representación. Los estudiantes en este nivel han construido el *objeto* derivada, y toman consciencia de las relaciones que pueden establecer entre distintos modos de representación llegando a la síntesis de éstos (Sánchez-Matamoros et al., 2006). Es importante destacar que Piaget y García (1983) consideran que cada fase o nivel (Intra, Inter y Trans) implican, a su vez, la existencia de algunos subniveles que siguen el mismo orden de progresión. Un ejemplo de ello, es lo reportado en la investigación de Sánchez-Matamoros et al. (2006) que identifica y describe dos subniveles para los niveles de desarrollo Intra e Inter. La existencia de estos subniveles podría dar explicación de las diferencias que se observan entre estudiantes asignados a un mismo nivel de desarrollo del *esquema*.

Metodología

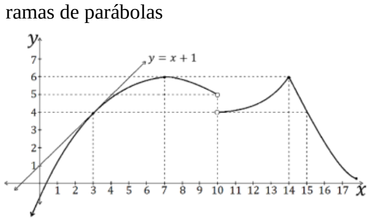
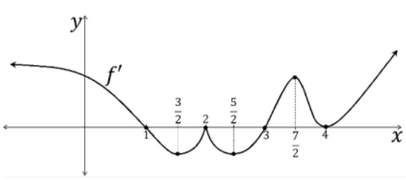
Esta investigación es de tipo cuantitativa y tiene carácter descriptivo exploratorio. En ella participaron 40 estudiantes universitarios de segundo año del grado doble de Matemáticas y Física de una universidad pública de Cataluña. Todos los estudiantes habían cursado y aprobado como mínimo una asignatura de Cálculo Diferencial.

El instrumento de recolección de datos correspondió a un cuestionario conformado por tres tareas (ver Tabla 1) entregadas en distintos modos de representación. Dichas tareas fueron seleccionadas y modificadas de investigaciones previas sobre la comprensión del concepto

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de derivada (Baker et al., 2000; Sánchez-Matamoros et al., 2006). Para su resolución era necesario utilizar y coordinar distintos elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada.

Tabla 1. Tareas propuestas en el cuestionario y descripción de aspectos asociados a su resolución

Tarea	Enunciado	Descripción de aspectos asociados a la resolución
1	Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones: a) f es continua en su dominio b) $f(2) = 0$. c) $f'(2) = f'(5) = 0$ d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$ e) $\lim_{x \to -8^-} f(x) = -\infty$ f) $f'(x) < 0$ cuando $5 < x < 8$ g) $f'(x) \geq 0$ cuando $x < 5$ h) $f''(x) < 0$ cuando $3 < x < 8$ i) $f''(x) > 0$ cuando $x < 3$	Modo de representación: analítico→gráfico Elementos matemáticos: Interpretación analítica de la derivada y sus implicaciones sobre la gráfica de la función (existencia de valores extremos, puntos de inflexión). Signo de la primera derivada y su relación con respecto a los intervalos de monotonía de la función. Signo de la segunda derivada y su relación con respecto a los intervalos de convexidad de la función.
2	Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas  a) Obtener los valores de $f'(3)$, $f'(7)$, $f'(10)$, $f'(14)$ y $f'(15)$. Explicando cómo los obtienes. b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo los has obtenido.	Modo de representación: gráfico→analítico→gráfico Elementos matemáticos: Interpretación geométrica y analítica de la derivada (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía y convexidad de la función y su relación con el signo de la primera derivada o segunda derivada según sea el caso. El operador derivada (si f es una parábola entonces f' es una recta).
3	La Figura muestra la gráfica de la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f. 	Modo de representación: gráfico→analítico→gráfico Elementos matemáticos: Interpretación geométrica (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía de la primera derivada y su relación con el signo de la segunda derivada (intervalos de convexidad de la función). Intervalos de cambio de signo de la primera derivada y su relación con respecto a la monotonía de función.

Para discretizar los protocolos de resolución y obtener un vector asociado a cada uno de ellos, definimos 27 variables (ver Tabla 2) que son el resultado de la descomposición de: los elementos matemáticos en ambos modos de representación (analítico/gráfico), la utilización

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de relaciones lógicas y de otros estudios previos (Trigueros y Escandón, 2008; Fuentealba et al., 2017).

Tabla 2. Variables utilizadas para discretizar los protocolos de resolución de cada uno de los cuestionarios

Elemento matemático	Variable a observar
1. Derivada en un punto $f'(a)$	V_1. Usa correctamente el significado geométrico de la derivada en $x=a$ V_2. Usa correctamente el significado analítico de la derivada en $x=a$
2. Función derivada $f'(x)$	V_3. Usa correctamente el significado de función derivada V_4. Usa correctamente el significado del operador derivada
3. Valor extremo de f	V_5. Usa correctamente el significado de máximo local geométricamente V_6. Usa correctamente el significado de máximo local analíticamente V_7. Usa correctamente el significado de mínimo local geométricamente V_8. Usa correctamente el significado de mínimo local analíticamente
4. Punto de inflexión de f	V_9. Usa correctamente el significado de punto de inflexión geométricamente V_{10}. Usa correctamente el significado de punto de inflexión analíticamente
5. Relación de equivalencia lógica entre el signo de f' en un intervalo I y, la monotonía de f en dicho intervalo	V_{11}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f' en un intervalo I y el crecimiento estricto de f en dicho intervalo V_{12}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el crecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo positivo de f' en dicho intervalo V_{13}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo f' en un intervalo y el decrecimiento estricto de f en dicho intervalo V_{14}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el decrecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo negativo de f' en dicho intervalo
6. Relación de equivalencia lógica entre el signo de f'' en un intervalo I y, la curvatura de f en dicho intervalo	V_{15}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f'' en un intervalo I y la convexidad de f en dicho intervalo V_{16}. Usa correctamente la relación de implicación entre: la convexidad de f en un intervalo I y el signo positivo de f'' en dicho intervalo V_{17}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo de f'' en un intervalo I y la concavidad de f en dicho intervalo V_{18}. Usa correctamente la relación de implicación entre: la concavidad de f en un intervalo I y el signo negativo de f'' en dicho intervalo
7. Puntos de no derivabilidad de f	V_{19}. Usa correctamente las derivadas laterales V_{20}. Usa correctamente el significado de los puntos conflictivos (cúspides y angulosos)
8. Continuidad y derivabilidad de f	V_{21}. Usa correctamente la relación directa: si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$ V_{22}. Usa correctamente la relación contrarrecíproca: si f no es continua en $x=a$, entonces f no es derivable en $x=a$
Otras variables generales observables	V_{23}. Es capaz de dividir correctamente una gráfica en distintos intervalos determinados por los elementos gráficos proporcionados (monotonía y curvatura). V_{24}. Es capaz de definir correctamente distintos intervalos del dominio de la función determinados por la información analítica proporcionada (signo y ceros). V_{25}. Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades gráficas. V_{26}. Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades analíticas. V_{27}. Es capaz para establecer correctamente relaciones entre la primera y segunda derivada

ISBN 978-84-945722-3-4

El propósito del establecimiento de estas variables fue realizar un análisis de cluster que nos permitiera identificar y caracterizar preliminarmente los subniveles de desarrollo del *esquema* de derivada (subgrupos entregados por el cluster). Sin embargo, para cuantificar la presencia o ausencia de cada una de las variables, en los protocolos de resolución de los estudiantes, fue necesario utilizar una escala de medida para asignar una puntuación a cada una de ellas. Para este estudio utilizamos una escala de tipo binaria 1 o 0 (1: se observa la variable; 0: no se observa la variable). A partir de estas dos herramientas (variables y escala) obtuvimos para cada uno de los cuestionarios un vector del tipo $(V_1, V_2, V_3, \dots, V_{27})$, en donde cada variable tiene un valor de 0 o 1.

Análisis y resultados

Para el análisis de cluster utilizamos el software Infostat versión 2016. Por otra parte, dadas las características del estudio, seleccionamos la distancia euclidea al cuadrado (por tratarse de variables binarias) y como método de agrupamiento, el de encadenamiento completo (vecino más lejano). Además, considerando los elementos aportados por la Teoría APOE, indicamos que el número inicial de conglomerados es 3 (3 clusteres iniciales correspondientes a los niveles de desarrollo del *esquema*). A partir de estas consideraciones, obtuvimos el dendograma que se muestra en la Figura 1.

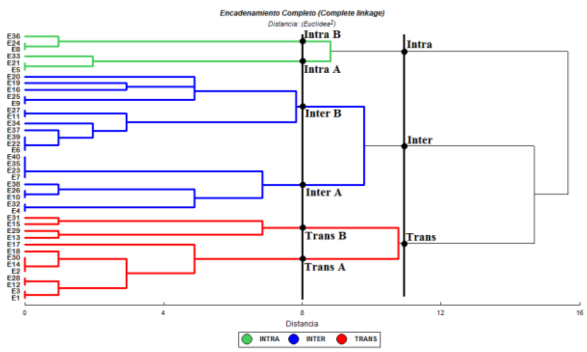


Figura 1. Dendograma obtenido del análisis de cluster con encadenamiento completo y distancia euclidea al cuadrado.

El análisis e interpretación del dendograma nos permite indicar que la primera línea vertical de la derecha determina los tres grupos correspondiente a los niveles de desarrollo del *esquema* de derivada Inter-Intra-Trans. La segunda línea vertical correspondiente a la mitad de la distancia total (criterio comunmente utilizado) nos indica las subdivisión de cada nivel

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

en dos subniveles de desarrollo, que para cada uno de los casos hemos denominado A y B. El agrupamiento de los estudiantes en los distintos niveles y subniveles (A y B) se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Distribución de los estudiantes según los niveles y subniveles entregados por el análisis de cluster.

	INTRA		INTER		TRANS	
Estudiantes	E5, E8, E21, E24, E33, E36		E4, E6, E7, E9, E10, E11, E16, E19, E20, E22, E23, E25, E26, E27, E32, E34, E35, E37, E38, E39, E40		E1, E2, E3, E12, E13, E14, E15, E17, E18, E28, E29, E30, E31	
Total	6		21		13	
SUBNIVELES	**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**
Estudiantes	E5,E21, E33	E8, E24, E36	E4, E7, E10, E23, E26, E32, E35, E38, E40	E6, E9, E11, E16, E19, E20, E22, E25, E27, E34, E37, E39	E1, E2, E3, E12, E14, E17, E18, E28, E30	E13, E15, E29, E31
Total	3	3	9	12	9	4

Posteriormente, a partir la asignación de estudiantes a los distintos subniveles de desarrollo determinados por el cluster, observamos cada uno de los subgrupos generados con el objetivo de caracterizarlos en términos de la presencia y/o ausencia de las variables observadas.

Con relación a los subniveles de desarrollo Intra, se observa que en ambos subniveles no existe comprensión del significado de derivada en un punto. Además, los estudiantes asignados a estos subniveles, no ven a la derivada como una función o como un operador lineal. Es importante destacar que estos estudiantes no hacen uso de derivadas laterales o puntos conflictivos y no establecen relaciones entre la primera y segunda derivadas. Sin embargo, son capaces de determinar intervalos a partir de la información analítica o gráfica, aunque no grafican correctamente.

Por otra parte, en subnivel Intra A, a diferencia de lo que ocurre con el subnivel Intra B, se establecen relaciones directas entre el signo de f' y la monotonía de f. Los estudiantes no son capaces de establecer relaciones entre continuidad y derivabilidad, las cuales sí las realizan los estudiantes asignados al subnivel Intra B.

Los estudiantes asignados a los subniveles Inter utilizan el significado geométrico de la derivada (pendiente de la recta tangente), pero no el analítico. Además, utilizan correctamente el significado de los valores extremos y puntos de inflexión en ambos modos de representación. Asimismo, al igual que los estudiantes de los subniveles Intra, no logran establecer relaciones entre la primera y segunda derivadas. Sin embargo, ellos utilizan las derivadas laterales y son capaces de establecer intervalos para graficar a partir de información entregada, aunque grafican con poca precisión.

En cuanto, a las diferencias entre los dos subniveles Inter, podemos indicar que los estudiantes de nivel Inter B no consideran a la derivada como función ni como operador, en contraste con los estudiantes del subnivel Inter A que si la consideran como función. Además, los estudiantes del subnivel Intra A tienen dificultades en establecer la relación directa entre el crecimiento de la función y el signo de la derivada. En tanto, los estudiantes del subnivel Inter B, tienen dificultades para establecer la relación directa entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada.

Finalmente, en relación con los subniveles de desarrollo Trans podemos indicar que el subnivel Trans A observamos las 27 variables. Sin embargo, en los protocolos de resolución de los estudiantes, asignados al subnivel Trans B, se observan dificultades para establecer relaciones entre la primera y segunda derivadas, del mismo modo, no observamos la utilización del significado geométrico del punto de inflexión y tampoco el establecimiento de relaciones entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada.

Conclusiones

Los resultados de este trabajo nos han permitido identificar dos subniveles asociados a cada nivel de desarrollo de *esquema* de derivada, lo cual, es coincidente con los resultados obtenidos por Sánchez-Matamoros et al. (2006) para los niveles de desarrollo Intra e Inter. Sin embargo, el tratamiento estadístico de los datos nos ha mostrado la existencia, hasta ahora, de dos subniveles asociados al nivel de desarrollo Trans. Cada par de subniveles (Intra-Inter-Trans) tiene asociadas algunas características comunes y otras, que los diferencian. Dichas divergencias se acentúan en los niveles de desarrollo más bajos (Intra, Inter) y son menos notorias, en el nivel de desarrollo Trans. Esta primera caracterización confirma algunas conclusiones de otros estudios previos (Sánchez-Matamoros et al., 2006; Baker et al., 2000) en cuanto al papel fundamental que juegan los modos de representación, los extremos y puntos de inflexión, así como también, las relaciones lógicas que pueden establecerse entre elementos matemáticos. Estos últimos son los que determinan los niveles y subniveles de desarrollo del *esquema*. Finalmente, esperamos que al aumentar la muestra podamos encontrar otros subniveles que nos permitan refinar esta caracterización preliminar.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer-Verlag:New York.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1997). A framework forresearch and curriculum development in undergraduate mathematics education, 37–54.MAA NOTES.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. Journal for Research in Mathematics Education, 31(5), 557-578.

Dawkins, P., y Epperson, J. (2014). The development and nature of problem-solving among first-semester calculus students. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(6), 839-862.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.).Advanced Mathematical Thinking, 95–123.Springer: Netherlands.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61(1), 103-131.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., y Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48(3), 374-392.

Piaget, J., y García, R. (1983). Psicogénesis e historia de la ciencia. Siglo veintiuno editores, S.A.: México, España, Argentina, Colombia.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. Enseñanza de las ciencias, 24(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto deinvestigación en didáctica de la matemática. Relime, 11(2), 267–296.

Trigueros, G., y Escandón, M. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. Revista mexicana de investigación educativa, 13(36), 59-85.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática, 17(1), 5–31.

ISBN 978-84-945722-3-4