CB-1.266

COMPONENTES DE UN ESQUEMA DE LA IMPLICACIÓN COMO CONDICIONAL LÓGICAMENTE VÁLIDO

Isabel García-Martínez – Marcela Parraguez
igarcia@ucn.cl – marcela.parraguez@pucv.cl
Universidad Católica del Norte, Chile – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato
Palabras clave: lógica, APOE, descomposición genética, implicación

Resumen

Como han reportado diversos autores, los estudiantes universitarios presentan dificultades en la comprensión de la implicación. Esta comunicación considera explícitamente uno de los cuatro tipos de sentencias condicionales considerados por Durand-Guerrier (2003), –el condicional lógicamente válido (reglas de inferencia)–, e implícitamente las otras sentencias: el entendimiento común (donde, en general, el antecedente falso no se considera), el conectivo proposicional (definido mediante tablas de verdad) y el condicional generalizado (teoremas). El marco teórico que sustenta esta investigación es la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), que es un marco teórico de corte cognitivo que permitió explicar cómo se construye el conocimiento incluido en la implicación. Para esto último se aplicó un cuestionario de cinco preguntas a doce estudiantes universitarios y se determinaron componentes para un esquema de la implicación como condicional lógicamente válido. Entre los resultados, se destaca la importancia de que los estudiantes realicen actividades con traducciones de frases del lenguaje cotidiano al lenguaje lógico y viceversa, con la finalidad de que construyan conocimiento matemático necesario para comprender la implicación.

Introducción

En esta comunicación, se presenta un estudio de la implicación en el nivel universitario.

Éste es un tópico presente (implícita o explícitamente) en los cursos de matemáticas de las distintas carreras del nivel superior; sin embargo, como muchos autores han reportado, los estudiantes presentan dificultades en su comprensión (Alvarado y González, 2009, 2013; Durand-Guerrier, 2003; Epp, 2003; Ernest, 1984; García-Martínez y Parraguez, 2017; Reid, 1992).

ISBN 978-84-945722-3-4

Generalmente, en matemática, la implicación es concebida como una proposición de la forma $p \Rightarrow q$, donde p se denomina antecedente y q consecuente y puede definirse mediante las tablas de verdad. Sin embargo, Quine (1950) sostiene que hay varias interpretaciones de sentencias condicionales (o implicaciones) que son: el entendimiento común (donde, en general, el antecedente falso no se considera), el conectivo proposicional (definido mediante la tabla de verdad), el condicional lógicamente válido (reglas de inferencia) y el condicional generalizado (teoremas). Según Durand-Guerrier (2003), se deben tener en cuenta estos cuatro tipos de sentencias condicionales en la enseñanza y aprendizaje de la implicación.

Este trabajo se centra en la implicación como condicional lógicamente válido o reglas de inferencia, que son implicaciones simples verdaderas, las cuales se pueden aplicar para determinar la validez de argumentaciones –proposiciones de la forma $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$, donde las proposiciones $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ son las premisas y q la conclusión– (Bloch, 2000). La sucesión de pasos y justificaciones para ir desde las premisas a la conclusión, mediante las reglas de inferencia, se denomina derivación.

Algunas reglas de inferencia son:

Modus Ponens, Modus Ponendo Ponens (del latín, modo que afirmando afirma) o *separación:*

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Que es otra forma de escribir $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Modus Tollens o Modus Tollendo Tollens (del latín, modo que negando niega):

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Modus Tollendo Ponens (del latín, modo que negando afirma) o *silogismo disyuntivo:*

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}$$

Silogismo hipotético:

$$p \Rightarrow q$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

$$\frac{q \quad \Rightarrow \quad r}{p \quad \Rightarrow \quad r}$$

En este reporte se consideran solamente reglas de inferencia sin cuantificar (como los ejemplos de arriba), ya que en otra de las interpretaciones se consideran implicaciones cuantificadas.

En Matemática Educativa, no se han reportado investigaciones sobre la construcción de la implicación como condicional lógicamente válido, desde la Teoría APOE, referente teórico sobre el cual se basó la presente investigación.

Teoría APOE

La teoría APOE (Acción, Proceso; Objeto; Esquema) es un marco teórico de corte cognitivo creado por Ed Dubinsky y desarrollado conjuntamente con otros investigadores, a partir del concepto de abstracción reflexiva de Piaget, para la construcción del conocimiento (Arnon et al., 2014).

Según la teoría APOE, todos los conceptos matemáticos, o fragmentos de éstos, pueden ser interpretados a través de las estructuras y los mecanismos mentales; los primeros son acciones, procesos, objetos o esquemas y algunos de los mecanismos mentales son interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación.

Cuando un estudiante se enfrenta a una actividad matemática y necesita ser guiado mediante estímulos externos, aunado al hecho que precisa realizar todos los pasos involucrados en la actividad, se dice que éste muestra una construcción acción de dicho concepto, la cual interiorizará en un proceso cuando no necesite efectuar todos los pasos para resolver dicha actividad (se puede saltar algunos), ni deba ser guiado. Por otro lado, dos o más procesos pueden coordinarse para dar lugar a un nuevo proceso. Cuando el estudiante ve el proceso como un todo y puede actuar sobre él, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto, el cual también puede desencapsular para volver a los procesos que le dieron origen, por ejemplo al buscar un contraejemplo de una situación dada. Una colección de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático dado, determinan un esquema, que es una estructura coherente e inacabada, ya que puede asimilar y acomodar otros objetos.

ISBN 978-84-945722-3-4

La teoría APOE también proporciona un ciclo de investigación formado por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de los datos. La descomposición genética es un modelo hipotético en donde se plasman las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender determinado concepto matemático (Arnon et al., 2014). Luego se diseñan y aplican instrumentos para validar, o no, cada una de las partes de la descomposición genética. En la última componente, se analizan los datos obtenidos en la componente anterior y se determina si la descomposición genética es viable y, si no lo fuera, se vuelve a la primera componente (refinando la descomposición genética) y se continúa el ciclo las veces que sean necesarias.

Método

Para determinar elementos para una descomposición genética de la implicación interpretada como condicional lógicamente válido, se analizó un texto guía que forma parte de las referencias bibliográficas sugeridas en el programa del curso "demostraciones y fundamentos" de una universidad sudamericana (Bloch, 2000) y se aplicó un cuestionario de cinco preguntas a doce estudiantes de dicho curso, que conforman el caso de estudio. El estudio de caso (Stake, 2010) se inserta en cada una de las tres componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE, con la finalidad de llevar a cabo un análisis más dirigido de las producciones de los participantes en la investigación. Los estudiantes del caso de estudio fueron etiquetados por E1, E2, …, E12 y las preguntas que se aplicaron son las siguientes.

Escriba en forma simbólica cada una de las argumentaciones que se presentan a continuación y determine su validez. Justifique su respuesta.

1. *Si deja de llover, entonces jugaremos fútbol.*
   Deja de llover.
   *C**onclusión**: Jugaremos fútbol.*
2. *Si llueve mucho, entonces el patio se inunda.*
   El patio se inunda.
   *Co**nclusión**: Llueve mucho.*
3. *Si madrugo, entonces salgo a trotar.*
   No madrugo.
   *C**onclusión**: No salgo a trotar.*
4. *Si vendo todos los números de la rifa, entonces completo el dinero de la excursión.*
   No completo el dinero de la excursión.
   *C**onclusión**: No vendo todos los números de la rifa.*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

5. *Si ganamos el partido, entonces pasamos a la final.*
   Si pasamos a la final, entonces jugamos en la capital.
   Ganamos el partido.

C***onclusión***: *Jugamos en la capital.*

Resultados

De acuerdo a las definiciones de argumentación y reglas de inferencia dadas anteriormente (Bloch, 2000), se determinaron algunos elementos que las componen: proposición, premisa, conclusión y conectivos lógicos.

Teniendo en cuenta estos elementos, se analizaron las producciones de los estudiantes que conforman este caso de estudio, de las cuales se muestran las de E9 y E12, porque en ellas se observan algunos de dichos elementos. Asimismo, se han seleccionado las preguntas 1 y 2 del cuestionario para darlas a conocer en esta comunicación, ya que ellas muestran estructuras mentales para la construcción del concepto matemático en cuestión. Ambos estudiantes (E9 y E12) escriben en forma simbólica las argumentaciones dadas en las preguntas 1 y 2. En la pregunta 1, E9 identifica las premisas y la conclusión y parece reconocer alguna regla de inferencia (*Modus Ponens*), pero no la menciona (Figura 1).

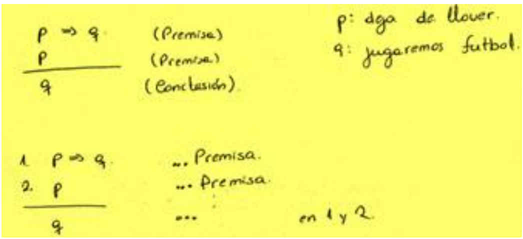

Figura 1. Respuesta de E9 a la pregunta 1.

En la pregunta 2, E9 justifica su razonamiento, considerando la contrapositiva de manera correcta cuando coloca "Contrapositiva en 1" (Figura 2), pero también la considera, incorrectamente, como la negación de una proposición. E2 fuerza la situación para probar la validez de la argumentación, aunque para ello tenga que deducir la negación de una proposición a partir de la misma. Con lo cual, se puede interpretar que E9 muestra una construcción acción de conectivos lógicos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

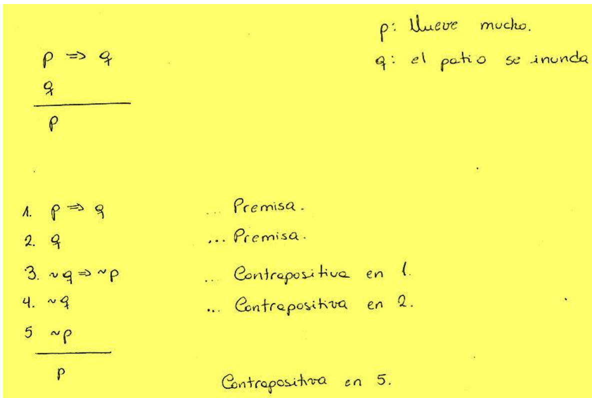

Figura 2. Respuesta de E9 a la pregunta 2.

E12 resuelve la pregunta 1 aplicando la regla de *Modus Ponens*, aunque no indica el nombre (Figura 3) y la pregunta 2 a través de un contraejemplo (Figura 4). A partir de lo cual, se puede interpretar que E12 muestra una concepción objeto de la implicación como condicional lógicamente válido.

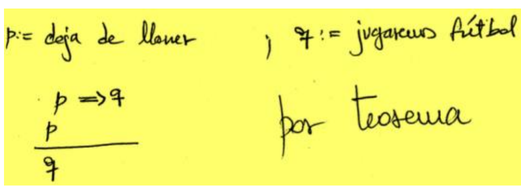

Figura 3. Respuesta de E12 a la pregunta 1.

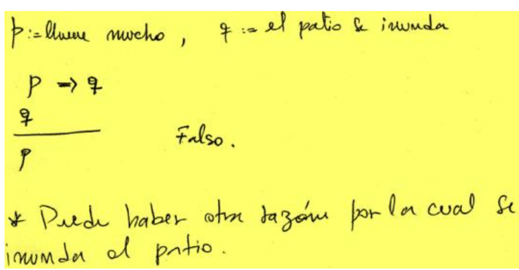

Figura 4. Respuesta de E12 a la pregunta 2.

Discusión y conclusión

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Algunos elementos para la descomposición genética de la implicación interpretada como condicional lógicamente válido, observadas en el texto y en las producciones de los estudiantes son: proposición (acción y proceso), premisa (proceso), conclusión (proceso), conectivos lógicos (proceso). A partir de los elementos aquí determinados, se diseñará una descomposición genética de la implicación como condicional lógicamente válido y se determinarán las relaciones entre las descomposiciones genéticas para las diferentes interpretaciones de la implicación, con base en las cuales se planteará una secuencia de aprendizaje, que debe considerar, entre otras cosas, traducciones del lenguaje cotidiano al lenguaje lógico y viceversa, para establecer algunas de dichas relaciones.

Referencias

Alvarado, A. y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 73-84.

Alvarado, A. y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(1), 37-63.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. *A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Bloch, E. (2000). *Proof and fundamentals: A First Course in Abstract Mathematics.* Boston: Birkhäuser.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics*, *53*(1), 5-34.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly 110*, 886-899.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 173-189.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2017). The Basis Step in the Construction of the Principle of Mathematical Induction based on APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior 46*, 128-143.

ISBN 978-84-945722-3-4

Quine, W.V.O. (1950). *Methods of Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Reid, D. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching*. (Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4