CB-1.262

LA BÚSQUEDA DE LA FUNCIÓN INVERSA DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA. UN EJEMPLO PARA LA TRANSVERSALIDAD Y RESIGNIFICACIÓN DE CONTENIDOS

Patricia Nora Folino – Stella Maris Boutet
patriciafolino@gmail.com - stellaboutet@gmail.com
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda, Argentina

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario
Palabras clave: Función inversa, resignificación de contenidos, estrategias de enseñanza

Resumen

La propuesta consiste en hallar la función inversa de una función polinómica cuya expresión se corresponde con polinomios que no solo tienen el término de mayor grado y/o el independiente, sino también el lineal y/o el cuadrático. Esto hace que los estudiantes deban revisar, aplicar, reconsiderar y resignificar los conocimientos adquiridos anteriormente. En análisis matemático I, en la carrera de ingeniería, estudiamos la existencia de la función inversa y cómo hallarla, en la unidad 1, del programa, en la 2 y 3, continuidad y derivada. Para poder dar respuesta a este problema, deberán rever todo esto y además vincularlo con álgebra, con las raíces de un polinomio y la fórmula de Cardano para los de tercer grado. Se ha usado el software Geogebra. Se valora su utilidad para poder pensar y proponer ideas. Se hacen conjeturas y demostraciones.

En los cursos de Análisis Matemático I comenzamos reviendo el concepto de función y funciones que fueron tratadas en el nivel anterior (lineal, cuadrática, polinómicas en general, homográficas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas). En el tratamiento de estas hallamos dominio y conjunto imagen, ceros positividad y negatividad. También hacemos operaciones entre ellas, composición. Las clasificamos en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas con la finalidad de analizar si tienen inversa o no y finalmente poder calcular la función inversa.

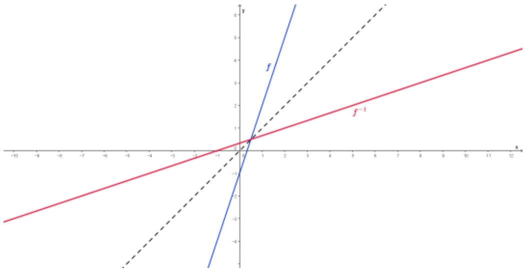
En las funciones tratadas hasta aquí siempre se puede obtener la expresión de la función inversa, despejando "x", por ejemplo: Dada la función $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}\ /\ f(x) = 3x - 1$, probamos que es biyectiva, por lo tanto, podemos hallar su inversa,

$y = 3x - 1 \Rightarrow y + 1 = 3x \Rightarrow \frac{y+1}{3} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Entonces, la función inversa es $f^{-1}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}\ / f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

También las graficamos y observamos la propiedad que cumplen los gráficos de las funciones inversas, son simétricos respecto de la recta $y = x$



Este tratamiento lo podemos aplicar en todas las funciones que presentamos en este momento de la materia incluso en algunas que no son inyectivas, haciendo una simple restricción de su dominio y / o codominio, las transformamos en biyectivas.

Si nos quedáramos aquí sin plantear nada más, hemos comprobado que, en los estudiantes queda la idea que para obtener la expresión de la inversa siempre se puede despejar y que siempre es fácil obtenerla.

Planteamos, entonces, una función polinómica, como por ejemplo:

$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}\ /\ f(x) = x^3 + x + 2$

La primera de las cuestiones es ver si es inyectiva, para lo cual usamos la definición

$$f: \mathrm{A} \subseteq \mathrm{R} \to \mathrm{R}\ es\ inyectiva\ \Leftrightarrow (\forall x_1 \in \mathrm{A}, \forall x_2 \in \mathrm{A}:\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

O bien

$$f: \mathrm{A} \subseteq \mathrm{R} \to \mathrm{R}\ es\ inyectiva\ \Leftrightarrow (\forall x_1 \in \mathrm{A}, \forall x_2 \in \mathrm{A}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

De aquí surge que los conocimientos que se tienen hasta este momento no alcanzan para poder establecer la condición de esta función. En el ejemplo que hemos puesto, el planteo es

$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \qquad x_1^3 + x_1 + 2 = x_2^3 + x_2 + 2$

Más allá de poder cancelar el dos, caemos en una ecuación de la cual no podemos salir.

Los estudiantes tienen a su disposición el Geogebra y al graficarla ven que es inyectiva pero surge la necesidad de obtener alguna herramienta analítica – teórica para confirmar esto.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Continuamos con el desarrollo de la materia, vemos límite, continuidad y derivada. Todas estas herramientas nos permiten obtener mayor información de las funciones, en particular una definición y algunos teoremas

Definición:

i) Una función definida en un intervalo es estrictamente creciente en él, si y solo si, para todo par de elementos x_1 y x_2 que pertenecen al intervalo, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$

ii) Una función definida en un intervalo es estrictamente decreciente en él, si y solo si, para todo par de elementos x_1 y x_2 que pertenecen al intervalo, tales que $x_1 > x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$

Teoremas:

1) Si f es estrictamente creciente (o decreciente) en $[a;b]$ y es continua en dicho intervalo, entonces:

i) $f:[a,b] \to [f(a), f(b)]$ es biyectiva, por lo tanto, existe f^{-1}

ii) f^{-1} es estrictamente creciente (o decreciente) en $[f(a); f(b)]$

iii) f^{-1} es continua en $[f(a); f(b)]$

2) Si f es una función continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$, entonces:

i) si $f'(x) > 0$, para todo x perteneciente a $(a;b)$, entonces, f es estrictamente creciente en $[a;b]$

ii) si $f'(x) < 0$, para todo x perteneciente a $(a;b)$, entonces, f es estrictamente decreciente en $[a;b]$

Volvemos a la función polinómica de la cual hemos querido obtener su inversa. Por ser una función polinómica es continua y derivable en R, con lo cual podemos aplicar los teoremas enunciados anteriormente.

Entonces, para la función que estamos tratando, $f(x) = x^3 + x + 2$ los estudiantes proponen hacer la derivada, $f'(x) = 3x^2 + 1$ y observan que la derivada es positiva para cualquier valor real, por lo tanto, es estrictamente creciente para todo R, con lo cual, según el otro teorema, la función tiene inversa. Ahora el problema se centra en encontrar la expresión de esa función.

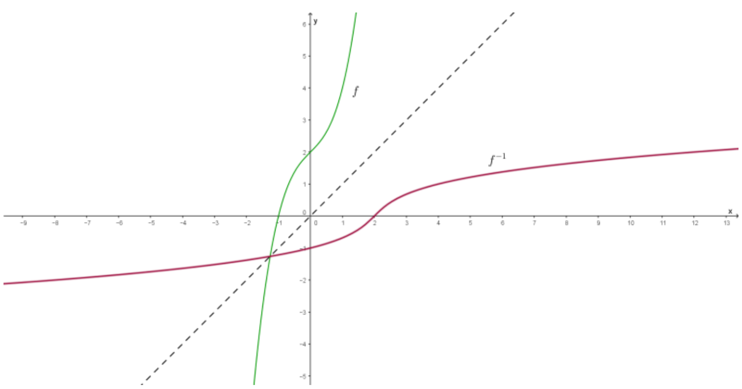
ISBN 978-84-945722-3-4

Los alumnos ya habían advertido que no pueden despejar "x" como lo hacen con otras funciones y que entonces deben buscar otra estrategia. A partir del análisis de querer despejar surge la idea de usar la fórmula de Cardano para hallar las raíces de un polinomio de tercer grado. Ella es: $z^3 + pz + q = 0$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad , \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \Rightarrow z = u + v$$

Pensaron que cuando buscamos la expresión de la función inversa, estamos buscando los valores de "x" dados los de "y". Es decir, debemos despejar "x" en $f(x) = x^3 + x + 2$. Aplicamos el procedimiento que hacemos para hallar una inversa: $y = x^3 + x + 2$
Cambiamos y por x, resultando $x = y^3 + y + 2 \implies y^3 + y + (2 - x) = 0$
Lo que estamos buscando son los valores de y que satisfacen esta ecuación. Y aplicamos la fórmula de Cardano $u = \sqrt[3]{-\frac{2-x}{2} + \sqrt{\frac{(2-x)^2}{4} + \frac{2^3}{27}}}$ $\quad v = \sqrt[3]{-\frac{2-x}{2} - \sqrt{\frac{(2-x)^2}{4} + \frac{2^3}{27}}}$

Luego $y = u + v$, entonces: $y = \sqrt[3]{-\frac{2-x}{2} + \sqrt{\frac{(2-x)^2}{4} + \frac{2^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{2-x}{2} - \sqrt{\frac{(2-x)^2}{4} + \frac{2^3}{27}}}$ que es la expresión de la función inversa



El gráfico, realizado con el software Geogebra, muestra a la función f y su inversa
Para poder resolver este problema tuvieron que: volver sobre el concepto de función (como tantas otras veces), sobre la necesidad de saber cómo se comporta esa función (si es biyectiva, si es creciente, etc.), qué implica ser la función inversa, qué propiedades tiene, la importancia

ISBN 978-84-945722-3-4

de la derivada, reforzando la idea de qué es la derivada y para qué sirve, la importancia de la continuidad, por qué no alcanza con saber que la función está definida en un conjunto y que esto no es lo mismo que ser continua. Además de vincular conceptos aprendidos y utilizados en Álgebra bajo otro contexto.

Como se sabe, se tiene que verificar $(f_0 f^{-1})(x) = (f^{-1}{}_0 f)(x) = x$

Resulta

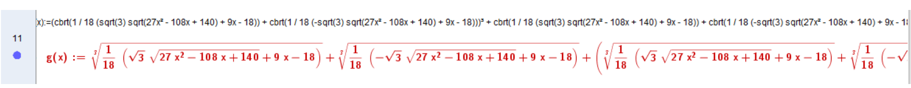
$$(f_0 f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\sqrt[3]{-\frac{2-x}{2}+\sqrt{\frac{(2-x)^2}{4}+\frac{2^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{2-x}{2}-\sqrt{\frac{(2-x)^2}{4}+\frac{2^3}{27}}}\right) =$$

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{2-x}{2}+\sqrt{\frac{(2-x)^2}{4}+\frac{2^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{2-x}{2}-\sqrt{\frac{(2-x)^2}{4}+\frac{2^3}{27}}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{-\frac{2-x}{2}+\sqrt{\frac{(2-x)^2}{4}+\frac{2^3}{27}}}+\right.$$

$$\left.\sqrt[3]{-\frac{2-x}{2}-\sqrt{\frac{(2-x)^2}{4}+\frac{2^3}{27}}}\right)+2$$

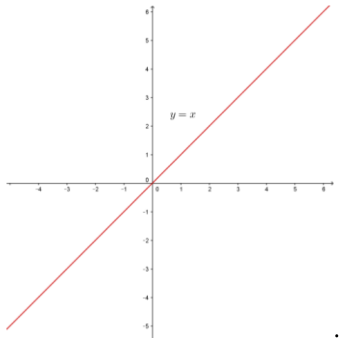
Esta cuenta no es muy amable para hacer, lo mismo para la otra igualdad

Los estudiantes hasta aquí saben usar el Geogebra y en particular el *CAS*. Mientras se escriben las ecuaciones, éstas se representan en la vista gráfica. Al hacer las cuentas con el software, el gráfico muestra que se obtiene $y = x$, la identidad.



Esta imagen se corresponde con la expresión de la composición de la función y su inversa, en el Geogebra usando *CAS*.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



.

Este es el gráfico que aparece a la derecha del cálculo con el CAS, en la vista gráfica del Geogebra. Como se puede ver se obtiene la identidad, lo que certifica que una función es la inversa de la otra.

La pregunta que surge ahora es: ¿qué características, en cuanto a su expresión, tiene una función polinómica de grado tres para poder tener inversa?

Los estudiantes aquí empiezan a querer deducir en forma generalizada, esto es, pensar la función polinómica, así $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Y volviendo a usar la propiedad que si una función continua es estrictamente creciente (o decreciente), entonces, es inyectiva, hacen la derivada y ven bajo qué condiciones eso ocurre $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

De aquí surgen deducciones con conocimientos que traen desde la escuela media Debemos pedir que $3ax^2 + 2bx + c > 0$ o bien $3ax^2 + 2bx + c < 0$ según sea estrictamente creciente o decreciente. Que estas expresiones sean positivas o negativas para todo real equivale a decir que: $3ax^2 + 2bx + c \neq 0$ y sabemos que esto ocurre cuando el discriminante es negativo, resulta entonces $4b^2 - 4 \cdot 3a \cdot c < 0 \Rightarrow \quad b^2 < 3ac$.

Esta conclusión se combina con que si $a > 0$, entonces es estrictamente creciente, porque la derivada resulta siempre positiva, y, si $a < 0$, será estrictamente decreciente, porque la derivada resulta siempre negativa. Por otro lado, esto negó algunas suposiciones hechas en un momento que si la función polinómica tenía el término cuadrático no podía ser inyectiva. Propusimos que inventaran algunas funciones polinómicas de tercer grado completas que tengan inversa. Esa búsqueda se hizo usando las conclusiones anteriores y además proponiendo con condiciones, es decir, que sean crecientes o decrecientes y sabiéndolo anticipadamente. Esto lo corroboraron usando un software para graficarlas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Otra discusión que surge en correlación con Álgebra, es el tema de las raíces. Cuántas raíces puede tener un polinomio de tercer grado, cuántas pueden ser reales, y la vinculación con lo anterior.

Una de las funciones propuestas es $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R} \ / \ f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ para hallar su inversa, en la cual se propone usar la fórmula de Cardano.

Partimos de una ecuación polinómica de tercer grado completa: $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

Dividimos por $A \neq 0$, $x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0$ y lo renombramos $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Ahora hacemos una sustitución conveniente $x = z - \frac{a}{3}$

Y reemplazamos $\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0$

Haciendo las cuentas y reagrupando, resulta $z^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)z + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$ que es una ecuación cuya variable es z.

Si en ella sustituimos $p = b - \frac{1}{3}a^2$ y $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$

Resulta $z^3 + pz + q = 0$ que es la ecuación que usamos antes.

Esto es lo que nos ofrece Álgebra para la resolución de estas ecuaciones. Procedemos a aplicarlo en la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Por supuesto, primero analizamos que tiene inversa haciendo la derivada y verificando que es estrictamente creciente, además de ser continua.

Entonces $y = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, cambiamos y por x, $x = 2y^3 + 3y^2 + 2y + 1$

Igualamos a cero, para poder aplicar la fórmula $2y^3 + 3y^2 + 2y + (1 - x) = 0$

Dividimos todo por 2, que es el coeficiente principal para que el polinomio sea mónico

$y^3 + \frac{3}{2}y^2 + y + \frac{(1-x)}{2} = 0$ Correspondiéndose con $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1-x}{2}$

Hacemos la sustitución $y = z - \frac{a}{3}$ y usamos $z^3 + pz + q = 0$

Calculamos p y q con la fórmulas obtenidas

$$p = b - \frac{1}{3}a^2 \quad \Rightarrow \quad p = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2}{27} \cdot \frac{27}{8} - \frac{\frac{3}{2} \cdot 1}{3} + \frac{1-x}{2} = \frac{1-2x}{4}$$

Calculamos u y v, para luego obtener z

ISBN 978-84-945722-3-4

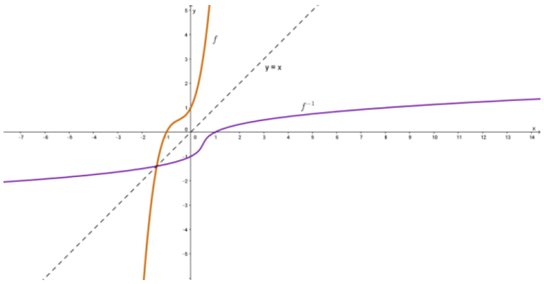
$$u = \sqrt[3]{\frac{2x-1}{8} + \sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64} + \frac{1^3}{64 \cdot 27}}} \qquad v = \sqrt[3]{\frac{2x-1}{8} - \sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64} + \frac{1^3}{64 \cdot 27}}}$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{2x-1}{8} + \sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64} + \frac{1^3}{64 \cdot 27}}} + \sqrt[3]{\frac{2x-1}{8} - \sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64} + \frac{1^3}{64 \cdot 27}}}$$

Finalmente, $y = z - \frac{a}{3}$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2x-1}{8} + \sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64} + \frac{1^3}{64 \cdot 27}}} + \sqrt[3]{\frac{2x-1}{8} - \sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64} + \frac{1^3}{64 \cdot 27}}} - \frac{\frac{3}{2}}{3}$$

$y = \sqrt[3]{\frac{2x-1}{8} + \sqrt{\frac{27(1-2x)^2+1}{1728}}} + \sqrt[3]{\frac{2x-1}{8} - \sqrt{\frac{27(1-2x)^2+1}{1728}}} - \frac{1}{2}$ Que es la expresión de la función inversa



El gráfico, realizado con el software Geogebra, muestra a la función f y su inversa, y la simetría que cumplen dichos gráficos respecto de la recta de ecuación $y = x$, por ser inversas.

Surgen nuevas preguntas: ¿Qué ocurre con las funciones polinómicas de grado mayor que tres, si su expresión se corresponde con un polinomio completo, o que, por lo menos, tenga junto con el término de mayor grado, no solo el término independiente, sino algún otro?

En principio respondieron que había que buscar en las funciones que se correspondían con polinomios de grado impar porque las de grado par no podían ser inyectivas. Esto lo relacionaron con que al hacer la derivada debe quedar una expresión que sea siempre positiva o siempre negativa. Ésta, si es de potencia par, al derivarla va a ser de potencia impar y un polinomio de grado impar siempre va a tener una raíz real que será de multiplicidad impar y por lo tanto esa expresión no puede tener siempre el mismo signo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La otra pregunta que surgió es si podemos encontrar la expresión de la función inversa para funciones polinómicas de grado cinco, por ejemplo, completas, si no tenemos fórmula de Cardano para utilizarla como en los casos anteriores. Esta es una pregunta que ha quedado abierta.

Bibliografía

1. García Venturini, A; Scardigli, M. (2016) *Análisis Matemático I, para estudiantes de ingeniería*. Editorial Ediciones Cooperativas
2. Leithold, L. (1992). *El cálculo con geometría analítica*. Editorial Harla.
3. Rey Pastor, J; Pi Calleja, P; Trejo, C. (1970). *Análisis matemático*. Editorial Kapeluz
4. Stewart, J; Redlin, L; Watson, S. (2002). *Precálculo.* Editorial Thomson
5. Spivak, M. (2010). *Calculus.* Editorial Reverté.

ISBN 978-84-945722-3-4