ENSEÑANZA DE LA SUMA DE RIEMANN APLICANDO REPRESENTACIONES VISUALES PARA CALCULAR EL TRABAJO REALIZADO AL DESALOJAR EL AGUA QUE OCUPA EL VOLUMEN DE UN RECIPIENTE

Silvia Seluy
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas- Universidad Nacional del Litoral.
Santa Fe – República Argentina
sseluy@rectorado.unl.edu.ar

Resumen
El bajo rendimiento de los alumnos en matemáticas en las Facultades de Ingeniería y los errores que ellos cometen, hacen sospechar que existen razones por las cuales la enseñanza no es fructífera, dando la idea que los profesores debemos buscar técnicas que nos permitan enseñar mejor, es decir, hacer que el alumno aprenda mejor.
En este sentido, a modo de facilitar a los alumnos la comprensión de algunos conceptos de cálculo, se recurre al empleo de técnicas visuales para el abordaje de los temas.
En este trabajo se recurre a realizar una aplicación de la Suma de Riemann, a conceptos físicos ya estudiados y explicar el tema, para su mejor comprensión, por medio de una animación que a su vez le permita al alumno encontrarle una aplicación inmediata como es el cálculo del trabajo desarrollado para desalojar el líquido de un recipiente.

Palabras clave: suma de Riemann - animaciones en matemática – aprendizaje visual- enseñanza de cálculo- integrales de trabajo

1. Introducción
En este trabajo se muestra la implementación de técnicas de animación para favorecer el aprendizaje en el alumno, como motor imprescindible para desarrollar habilidades del pensamiento, teniendo en cuenta que la matemática es conocimiento reflexivo y que no puede transmitirse enseñando a memorizar algoritmos, lo cual tendería a mal interpretarla o desvalorizarla.
Es necesario que pongamos al alcance del alumno, herramientas que puedan serle útiles para que adquieran capacidad para interpretar conceptos, de lograr razonamientos no estereotipados, argumentar convincentemente, de usar la tecnología.
Para Yves Chevallard, *aprender* matemática, consistirá en la adquisición, manejo y construcción de un cúmulo de herramientas útiles y necesarias para el estudio de problemas matemáticos y *enseñar* matemáticas, consistirá en proporcionar al alumno dichas herramientas y la manera de utilizarlas, esto es, poner a su alcance no sólo las técnicas de estudio, sino también la visualización de los conceptos.
El profesor de matemática debe utilizar técnicas docentes y didácticas concretas. La negación de ellas como herramientas básicas, pueden ser causa de la negación de la didáctica de las matemáticas como ciencia y de los problemas que ésta estudia.
Según Resnick, L:"los empleadores se quejan que los alumnos de secundaria y de universidad no saben emprender con facilidad tareas complejas, necesitan mejorar su capacidad de escribir y hablar con eficacia, seguir aprendiendo fácilmente en el trabajo, usar las habilidades matemáticas para aplicar deferentes herramientas de producción, leer temas complejos y construir y evaluar argumentos".

De acuerdo a lo señalado oportunamente por el Dr. Luis Santaló: "conviene que todos los ciudadanos entren en contacto con la verdadera matemática, que es método, arte y ciencia; muy distinto de la calculatoria que es técnica y rutina".
Cuando se trabaja con animaciones, a modo de favorecer el aprendizaje por medios visuales e implementar nuevas formas de enseñanza en el aula, se puede ver fácilmente cómo se interrelacionan las ideas, unas con otras. El aprendizaje y el pensamiento, se vuelven más activos que pasivos. El estudiante puede descubrir qué tan profundo ha llegado en la construcción de ese nuevo conocimiento y precisar la existencia de lagunas conceptuales, las que al detectarse se pueden eliminar. También puede clarificar su pensamiento, procesar, organizar y priorizar nueva información además de estimular el pensamiento creativo. Puede ver cómo se conectan las ideas, cómo se puede organizar o agrupar la información con una comprensión más profunda y sencilla de los conceptos.
Este tipo de enseñanza, incita a los estudiantes a construir sobre su conocimiento previo y a integrar la nueva información. Por otra parte, a través de esta metodología en la que el alumno puede identificar más claramente un concepto, también le permite identificar los conceptos erróneos, dejando al descubierto lo que aún no ha podido comprender.
Se ha utilizado esta metodología para explicar el concepto de la Suma de Riemann aplicándolo al cálculo del trabajo que hay que desarrollar para desalojar el volumen de líquido que contiene un recipiente.

2. Conceptos básicos

El trabajo es la cantidad física que se refiere a la energía consumida cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, para desplazarlo una cierta distancia.
Matemáticamente, la energía empleada (o trabajo realizado, T) es el producto de la Fuerza (F) en Newtons, multiplicada por la distancia (d) en metros (usando el sistema MKS de medición). Simbólicamente:

$$\mathbf{T = F.\ d}$$

Por lo tanto, las unidades de trabajo quedarían expresadas como:

$$[F]\ .\ [d] = \text{Nt. m} = \frac{kg.m^2}{seg^2} \quad \text{dado que } 1\ \text{Nt} = \frac{kg.m}{seg^2} = [F]=[m.a]$$

expresando a la masa en kg y a la aceleración en $\frac{m}{seg^2}$ (siempre en unidades del sistema MKS).

3. Desarrollo

Utilizando el concepto de la *Suma de Riemann*, se calculará el trabajo realizado para subir pequeñas cantidades de agua hasta el borde de un recipiente, desde donde el agua caerá por efecto de la gravedad.
Para ello, se tiene en cuenta que el peso específico (P.e.) de una sustancia es la relación entre el peso (P) de la misma y el volumen (V) que ocupa, (P.e. = P / V), y además siendo que el peso específico del agua es 1, el peso de cualquier volumen de agua es numéricamente igual al volumen del mismo. Es decir, de la ecuación de P.e. se obtiene que P = P.e. **.** V, entonces, queda P = V.

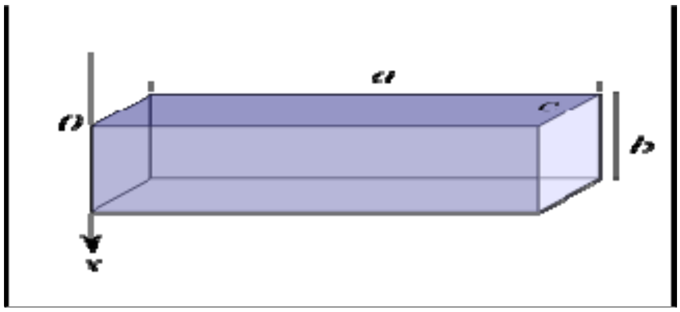
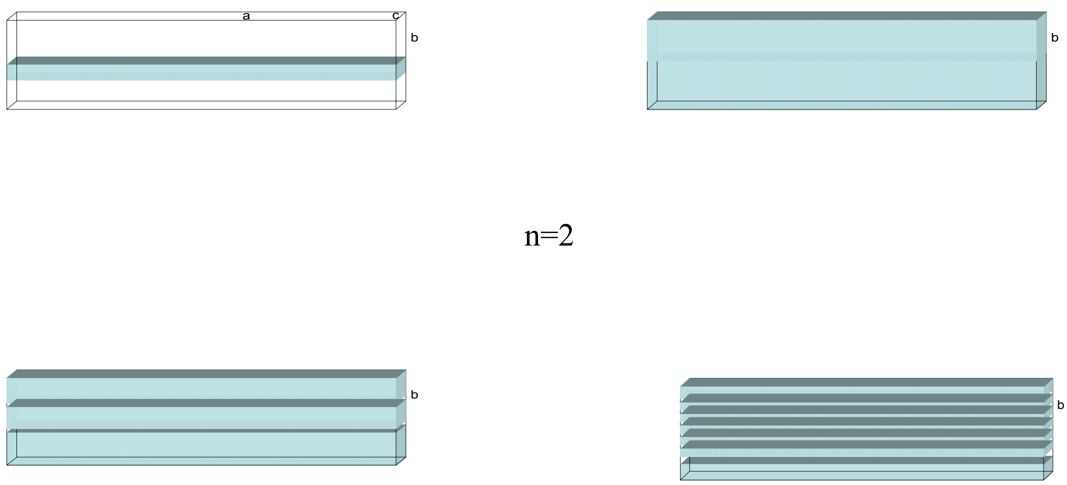


Figura 1
Prisma en el que se toma una partición del intervalo [0,b]

El prisma tiene como espesor b, siendo $0 = x_0 \langle x_1 \langle x_2 \langle ...... \langle x_{n-1} \langle x_n = b$.
Considerando dos puntos de esta partición x_{i-1}, x_i se determina una placa perteneciente al prisma. Si con ellos formamos el espesor de la placa: $x_i - x_{i-1}$ = h, siendo sus lados a y c, consideramos su volumen como: $V_i = (x_i - x_{i-1})a.c$
Haciendo tender a cero el valor del espesor de una capa, la cantidad de capas aumenta, n tiende a infinito y se cubre de esa forma todo el volumen.
Por medio de una animación sobre el prisma dado, la cual se podrá apreciar en la presentación del trabajo, se hace una representación visual del concepto de límite cuando $n \to \infty$ de la sumatoria desde i =1 hasta i = n, siendo "n" la cantidad de capas. Esto proporciona la noción que para cubrir la altura total del prisma, debe disminuir el espesor de la placa, $(x_i - x_{i-1}) \to 0$, y por ende aumenta la cantidad de las mismas para cubrir el espesor total.
Las siguientes figuras proporcionan el efecto visual mencionado:



n=1 n=2

n=3 $n \to \infty$

Figura 2
Efecto del aumento del número de capas en el prisma

Luego, el trabajo realizado para llevar el volumen de agua a la superficie (T = F.d), será entonces el producto de su peso, que es numéricamente igual a su volumen V_i por la distancia x_i que hay que recorrer hasta alcanzar el borde del recipiente.

$$T_i = V_i x_i \Rightarrow T_i = (x_i - x_{i-1}).a.c.x_i$$

Por lo tanto, una aproximación del trabajo total para vaciar el tanque es:

$$T \approx \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) a.c.x_i$$

Esta sumatoria es una suma de Riemann para la función f(x) = acx, así que si en la sucesión de mallas, el espesor tiende a cero, ($h \to 0$), cuando n tiende a infinito, $(n \to \infty)$, se tiene:

$$T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) a.c.x_i = \int_0^b a.c.x dx = a.c \frac{x^2}{2} \Big]_0^b = a.c \frac{b^2}{2}$$

De esta forma, el trabajo realizado en este recipiente es: $T = \frac{1}{2} a.c.b^2$

Dado que el volumen del recipiente es V = abc, el trabajo realizado para vaciarlo es $T = \frac{1}{2} V.b$ es decir, *el trabajo que se debe realizar para vaciar el tanque es el peso de todo el volumen por la mitad de la altura del recipiente.*

4. Conclusiones

La representación visual fue utilizada en este caso para facilitar la comprensión del concepto de la suma de Riemann y del límite aplicado a ella, como paso para arribar a la integral definida y una de sus aplicaciones en el campo de la Física, como es el Trabajo Mecánico. En este caso el concepto se aplicó al trabajo para desalojar el líquido que ocupa el volumen de un recipiente.

Si bien se utilizan mecanismos de enseñanza por medio de visualizaciones en distintos temas que se dictan en matemáticas en las carreras que se dictan en nuestra Facultad como parte del proyecto de investigación que estamos desarrollando, se está haciendo la investigación entre grupos de alumnos con esta metodología de visualización y en otros grupos se trabaja sin este sistema. Luego de un análisis comparativo entre ambos grupos, resultan más favorables los resultados de los grupos que han podido visualizar los conceptos respecto de los que no han usado esta metodología.

Estos resultados se obtienen por medio de un test en forma escrita que se toma a ambos grupos, con dos preguntas muy simples de lo que representa el tema dado con y sin visualización. Del análisis de los errores que cometen los alumnos en la resolución de dicho test, es que se concluye que las clases que se puedan dictar con visualizaciones, favorecen la comprensión de los temas, minimizando por ende, los errores cometidos en las clases tradicionales.

5. Bibliografía

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué puede aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte). *Enseñanza de las Ciencias.* Vol. 8, N°3:259-267

Cantoral, R. (1996). El futuro del cálculo infinitesimal. ICME-8. Sevilla- España.Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y. (1990). Didactique, anthropologie, mathématiques; Postfacio a la segunda edición de La transposition didactique, Grenoble. Citado en el texto "El futuro del Cálculo infinitesimal", pág. 250.

De Guzmán, M. (1997). El rincón de la pizarra. *El papel de la visualización.* Editor: Pirámide

Langer, E. y Camillon, A. (1999) El poder del aprendizaje consciente. Editorial Gedisa- ISBN: 8474327342.

Míguez, M. y Curione, K. (2005).Aprendizaje de las Ciencias. Montevideo, Uruguay: Imp. Lapsus- ISBN 9974-0-0295-8.

Pozo, I. (1999).Aprender y enseñar ciencia Editorial Morata

Plasencia Cruz, I. (1999). Revista de investigación educativa. Volumen 17. N° 1. Pág. 167-185

Resnick, L. (1999).La educación y el aprendizaje del pensamiento. Argentina: Aique.

Santaló, L.A. (1994). Enfoques: hacia una didáctica humanista de la matemática. Buenos Aires. Troquel.