

UNA MIRADA MÁS AMPLIA DEL ÁLGEBRA

Horacio Solar¹; Francisco Rojas²

¹Universidad Católica de la Santísima Concepción; ²Centro Felix Klein - USACH,
hsolar@ucsc.cl; francisco.rojass@usach.cl

Resumen

El propósito de esta investigación es indagar en la incorporación del pensamiento variacional en el álgebra escolar para los cursos de quinto a sexto básico (11 a 12 años). La caracterización de este eje curricular se fundamenta en el Modelo de Competencia Matemática (MCM), el cual permite, además de caracterizar los contenidos que serían parte del eje, determinar las competencias matemáticas que se ponen en juego. Asimismo, la puesta en marcha de una renovación curricular, pasa por la comprensión del enfoque teórico que orienta el eje curricular por parte de los profesores, en este caso, de las competencias matemáticas. Para ello, se han elaborado situaciones de aprendizaje para cada curso sustentadas en el MCM, que son implementadas por profesores de matemáticas, estudiando su nivel de apropiación de las competencias matemáticas, en particular, y del MCM en general.

Palabras clave: Relaciones y cambio, álgebra, competencias matemáticas, modelización

1. Introducción

Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1996) proponen cuatro interpretaciones de álgebra indicando las concepciones que poseen las variables: *aritmética generalizada*, en que las letras se entienden como generalizadoras del modelo aritmético; *resolución de ecuaciones*, en que las variables son incógnitas específicas, *estructural*, en que las letras son símbolos abstractos; y *funcional*, en que las variables son argumentos de funciones. Tradicionalmente, en el currículo de matemáticas chileno, el álgebra se ha introducido desde la primera y segunda interpretación -aritmética generalizada y resolución de ecuaciones- dejando la visión funcional para primero medio (15 años). Actualmente, el currículo ha tenido ajustes en que se ha revalorizado el álgebra, asociándolo más al estudio de relaciones y patrones. Por otra parte, si bien las funciones se enseñan en 8° básico (14 años), se introducen por medio de expresiones algebraicas. Nuestra propuesta es ampliar la mirada del álgebra para incorporar la visión funcional asociada al pensamiento variacional. En otros términos, si el álgebra la entendemos como el estudio de las relaciones, patrones y cambios, nuestra propuesta es incorporar el estudio del cambio al álgebra escolar.

2. Estudio del cambio en el álgebra escolar

El pensamiento variacional se utiliza en prácticamente todo el currículo de matemáticas a través de la comprensión de patrones, el uso de modelos que se expresan mediante una tabla numérica, una gráfica o una expresión algebraica, y en el análisis de fenómenos de cambio.

Según Cordero y Flores (2007), las gráficas deberían ser abordadas desde cierto grado de nivel básico, como una representación del concepto de función. Sin embargo, este concepto no aparece en el currículo mexicano hasta la educación secundaria. En el currículo chileno de matemáticas ocurre algo similar. En un estudio anterior (Solar,

2006) se observó que el concepto de función es tratado a los 14 y 15 años a través del concepto de proporcionalidad, y que el uso de las gráficas se limitaba a ello. En el currículo español de secundaria (a partir de 7º básico) aparece el eje “Funciones y gráficas” (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006). En particular, en el currículo de Cataluña se introduce desde primaria el eje “Relaciones y cambio” (DOGC, 2007), organización curricular que, según nuestros planteamientos, destaca de mejor manera el pensamiento variacional. En los estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 2006) uno de los cinco ejes propuestos se denomina “pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos” en que se amplía la visión del álgebra. Asimismo en la propuesta curricular del NCTM⁶⁶ (2003) de EEUU, el estándar de contenido Álgebra se refiere a las relaciones entre cantidades incluyendo las funciones, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio; esta visión, considera más interpretaciones del álgebra a la estructural y resolución de ecuaciones, que son las que se encuentran en el currículo chileno de matemáticas.

La manera de entender el álgebra en el currículo de matemáticas chileno está alejada de potenciar la visión funcional ligada al cambio. Por un lado no se resalta la importancia de las funciones en el currículo ya que se introducen recién en 8º básico, y no se han asociado previamente a nociones de proporcionalidad que son presentadas en el eje de números en 7º básico. Por otro, en los primeros años se introducen las gráficas en otros ejes tales como datos y azar, centrándose fundamentalmente en el trato de la información en las gráficas y no en las relaciones de variables que se presentan, para luego en los siguientes cursos las gráficas se desarrollan en el eje de álgebra. Por tanto, hay una ambigüedad respecto a cual eje trata la interpretación de gráficas.

Esta ambigüedad se podría evitar con una nueva organización curricular que asocie el álgebra al pensamiento variacional, como el caso nombrado del currículum catalán de matemáticas que denomina “Relaciones y cambio” al eje curricular asociado al álgebra.

De los cuatro focos propuestos en el NCTM (2003) para el estándar de álgebra, en Solar (en prensa) se han seleccionado tres de ellos para organizar los temas asociados al pensamiento variacional⁶⁷: (1) comprender patrones, relaciones y funciones, (2) usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y (3) analizar el cambio en contextos diversos. Estos tres focos son el punto de partida para desarrollar los aspectos funcionales del álgebra.

3. Modelo de Competencia Matemática (MCM)

Actualmente, el enfoque por competencia es considerado en la comunidad internacional como una propuesta educativa que va más allá del aprendizaje de contenidos, y apunta a la formación de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos, permitiéndoles identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo (OCDE, 2003). En el ámbito escolar, destacan algunos proyectos en torno a la implementación del enfoque por competencia en matemática: (a) la reforma curricular portuguesa que propuso una caracterización de las competencias matemáticas (Abrantes, 2001); (b) la incorporación de competencias matemáticas al currículum danés (Niss, 2002); y (c) el proyecto PISA que se apropia de las competencias propuestas por Niss para sustentar su marco teórico

⁶⁶ National Council of Teacher Mathematics

⁶⁷ El cuarto foco- representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos- no ha sido seleccionado porque se asocia a la interpretación estructural, la cual se aleja a la visión de cambio en el álgebra que se promueve en este proyecto.

(OCDE, 2003). En estas tres experiencias, el listado de competencias matemáticas corresponde a procesos matemáticos tales como razonar, argumentar, representar, calcular, modelar, resolver problemas y comunicar. En base a esta caracterización de las competencias matemáticas por medio de procesos matemáticos, una de las contribuciones del enfoque por competencias al currículo de matemáticas es dotarle de una estructura orientada al desarrollo de procesos matemáticos (Solar, 2009). Además, las competencias matemáticas, al sustentarse en procesos, se caracterizan por ser transversales a los núcleos temáticos y desarrollarse a largo plazo de manera cíclica en cada nivel educativo. Así, un enfoque por competencias es coherente con una estructura curricular que destaque los procesos matemáticos.

En un estudio anterior (Espinoza, Barbé, Mitrovich, Solar, Rojas y Matus, 2008) se caracterizó el marco curricular y los programas de estudio de primer ciclo básico chileno correspondiente al subsector de matemáticas en función de competencias matemáticas. El trabajo desarrollado se basó en la perspectiva funcional de las matemáticas, “mathematical literacy”⁶⁸ (OECD, 2003) y como resultado se elaboró un Modelo de Competencia Matemática (MCM) que permitiera interpretar dicho marco en términos de las competencias y los procesos matemáticos. Se propusieron cuatro competencias matemáticas: *resolución de problemas, representación, razonamiento y argumentación, cálculo y manipulación de expresiones*.

Teniendo estos elementos en consideración, el modelo se conforma por tres componentes principales:

Competencia matemática: en base a los estándares propuestos por la NCTM (2003) y las competencias matemáticas propuestas por Abrantes (2001), Niss (1999) y PISA (OCDE, 2003) acordamos elegir y optar por *procesos matemáticos nucleares* que denominamos competencias matemáticas, las cuales organizan y articulan el currículo de matemáticas. Estas competencias están compuestas por procesos específicos presentes de forma transversal a los contenidos matemáticos (NCTM, 2003).

Organizaciones matemáticas: contemplan tareas y técnicas matemáticas, variables didácticas y condiciones de realización de dichas tareas, aspectos que están sustentados en la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) desarrollada por Chevallard (1999).

Niveles de complejidad: el progreso de la competencia se determina en términos de la complejidad de la actividad, que depende tanto de las tareas como de los procesos que la conforman. La expresión nivel de complejidad se adopta de los grupos de competencia de PISA (OECD, 2003) basados en la pirámide propuesta por de Lange (1995).

4. Propuesta de investigación

El objetivo de esta investigación es desarrollar la interpretación funcional del álgebra basado en el MCM, el cual no solo depende de la elaboración de una propuesta curricular, sino que también por una apropiación del profesor de matemáticas de dicha propuesta. En particular, la apropiación pasa por una comprensión del enfoque teórico que orienta el eje, en este caso las competencias matemáticas. Esta comprensión se desarrolla en la medida en que el profesor es capaz de contextualizar el nuevo enfoque a su práctica docente, reinterpretando el marco curricular bajo un enfoque por competencias, e implementando unidades didácticas fundamentadas en el modelo de

⁶⁸ *Mathematical literacy* se ha traducido al castellano en el informe PISA (OCDE, 2003) como “Competencia Matemática”. Para evitar confusiones con nuestro significado de competencia matemática, preferimos mantener el término en su versión original.

competencia matemática. La apropiación por parte del profesor es sustancial para el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes.

En consecuencia, para el desarrollo de la interpretación funcional del álgebra, es indispensable discutir con profesores el modelo competencial propuesto, reflexionando sobre su gestión en el aula y en cómo se lleva a cabo y concretiza en actividades matemáticas relevantes.

En este trabajo conjunto entre profesores e investigadores, es muy relevante el papel que juega la reflexión profesional, en este caso la reflexión de la práctica (Schön, 1983). Estos procesos reflexivos permitirán al docente cuestionar su conocimiento profesional, tanto el relativo al conocimiento pedagógico general, como el referido al conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1987). Por tanto, la apropiación del profesor del MCM se estudiará a través de la reflexión del profesor de su práctica docente.

Para ello, se trabajará en torno a un seminario con profesores dado que se espera que el desarrollo de la propuesta curricular sea un trabajo en conjunto con los profesores y no solo una elaboración teórica del investigador. Además la participación del profesor en todo el proceso permite estudiar de manera completa uno de los objetivos de la investigación de la cual esta comunicación es parte, que es la apropiación de los profesores del MCM.

Un modelo curricular basado en un enfoque por competencias matemáticas destaca el desarrollo de procesos matemáticos en los estudiantes. Estos procesos matemáticos en un enfoque por competencias matemáticas, articularían y conducirían el currículo de matemática al desarrollo de los mismos. En base a estos principios nos surge una pregunta relacionada al desarrollo de las competencias: ¿Cuáles son las competencias a promover en la interpretación funcional del álgebra para quinto y sexto básico? Asimismo, la puesta en marcha de una renovación curricular, pasa por la apropiación de los profesores del mismo. Para estudiar dicha apropiación nos enfocaremos en el nivel de reflexión del profesor de su práctica docente con criterios que se sustentan en el MCM.

5. Metodología

La metodología que utilizaremos para el logro de los objetivos de la investigación se enmarca en un enfoque cualitativo interpretativo. Esto nos permitirá entender, desde el discurso y la práctica de los profesores, el proceso de significación del MCM que ellos están viviendo.

Los participantes en la investigación son profesores pertenecientes a establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción y alrededores, distribuidos equitativamente en clases de 5° y 6° básico. Se ha acordado realizar este estudio con un número de entre 5 a 6 profesores, ya que al ser un grupo pequeño permite un trabajo focalizado en cada uno de ellos en caso que así se requiriera y generar discusión para evidenciar sus procesos reflexivos y por ende su nivel de apropiación del MCM.

Bajo esta perspectiva, se han seleccionado profesores que tengan una formación matemática significativa que les permita poder elaborar actividades en base a la propuesta y que actualmente estén realizando clases en los cursos de 5° o 6° básico.

Para recoger los datos que conforman el cuerpo de análisis y de donde se extraen las unidades de significado, se organiza la investigación en cinco etapas. En la primera etapa se desarrollará un estudio completo de las tareas matemáticas asociadas a la interpretación funcional del álgebra para 5° y 6° básico. En la segunda etapa se desarrolla las competencias matemáticas a promover en los estudiantes; en la tercera

etapa en conjunto con los profesores se elaborarán situaciones de aprendizaje, en una cuarta etapa se implementan las situaciones de aprendizaje en el aula de matemáticas; y finalmente en la quinta etapa se desarrollan las orientaciones didácticas para la propuesta. En base al proceso anterior se obtendrá como producto una propuesta curricular para desarrollar la interpretación funcional del eje de álgebra sustentada en el Modelo de Competencia Matemática (MCM).

Desde la primera etapa se trabaja en torno a un seminario con profesores dado que se espera que el desarrollo de la propuesta curricular sea un trabajo en conjunto con los profesores y no solo una elaboración de investigador. Además, la participación de los profesores en todo el proceso permite estudiar la apropiación de los profesores del Modelo de Competencia Matemática (MCM).

Por otra parte, el *seminario* de estudio con los profesores también permite estudiar la dimensión reflexiva del profesor. El seminario se organiza en sesiones quincenales que se llevan a cabo durante las cinco etapas de la investigación. La estructura del seminario sigue el orden de las etapas. Las primeras dos etapas consisten en un estudio de las tareas y competencias matemáticas, para luego dar paso a la elaboración de las situaciones de aprendizaje (tercera etapa). En estas etapas el nivel de reflexión del profesor se estudia analizando información relevante sobre las decisiones y problemáticas vividas por los profesores. En todas estas discusiones se pretende ahondar en las herramientas, conocimientos y experiencias que necesita el profesor para diseñar las situaciones en base al MCM.

En la cuarta etapa cuando los profesores implementen las situaciones de aprendizaje, el estudio del nivel de reflexión del profesor se realizará por medio de *estudio de casos*. El objetivo es recoger información relevante respecto de cómo impacta en los profesores el estudio del MCM en su quehacer docente. La estrategia para analizar los casos de estudio consiste, por una parte, en un análisis de sus intervenciones orales y producciones escritas en el seminario, describiendo las trayectorias reflexivas que siguen a través de las sesiones de éste, y por otra, de sus intervenciones en el aula de matemáticas, y cómo gestionan su práctica habitual y aquella que está basada en el MCM.

Actualmente se han desarrollado tres sesiones del seminario con los profesores, las que se han centrado en estudiar actividades que potencian el pensamiento variacional y en estudiar el desarrollo de competencias matemáticas. En las próximas sesiones los profesores comenzarán a elaborar la secuencia didáctica que implementarán al inicio del segundo semestre escolar (agosto). En esta instancia se registrarán las implementaciones, para estudiar el desempeño de los profesores al enseñar la interpretación funcional del álgebra para 5° y 6° básico y el grado de apropiación del Modelo de Competencia Matemática. En los resultados, por una parte esperamos obtener una caracterización del desempeño y nivel de reflexión de los profesores que participaron en la investigación, y por otra parte orientaciones didácticas para desarrollar la visión del álgebra asociada al cambio.

6. Referencias

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 125-143.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *RELIME*, 10(1), 7-38.
- De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87–172). New York: SUNY Press.
- DOGC. (2007). 4915 *Decret 142/2007 de 26 de juny*, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària.
- Espinoza, L., Barbé, Q., Mitrovich, D., Solar, H., Rojas, D. y Matus, C. (2008). Análisis de las competencias matemáticas en primer ciclo. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas. *Proyecto FONIDE N°: DED0760*. Santiago: Mineduc.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Colombia: autor.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2006). Real decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE*, 5, 677-773.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. España: Thales.
- Niss, M. (2002) (coord). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project*. Roskilde: Roskilde University.
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Paris: autor.
- Schön, D. A. (1983). *The Reflective practitioner: how professionals think in action*. Londres: Temple Smith.
- Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform*. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis
- Solar, H. (2006). *La interpretación de gráficas y tablas en marcos y materiales curriculares a través de un análisis de texto. Tesis de master*. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).
- Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso. Tesis doctoral*. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Solar (en prensa). Relaciones y cambios: una mirada más amplia del álgebra. En M. Quintanilla, y F. Angulo. (coord.). *Unidades Didácticas en matemáticas y física*. Bellaterra:UAB.