

CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Patricia Sureda^{1, 2}; María Rita Otero^{1, 2}

¹Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT),
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As., Tandil, Argentina.

²Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
psureda@exa.unicen.edu.ar; rotero@exa.unicen.edu.ar

Resumen

Este trabajo se enmarca en el análisis de la conceptualización de un grupo de alumnos del colegio secundario que estudian el campo conceptual de las *funciones exponenciales* en una dinámica de estudio que prioriza la participación del alumno en la construcción del conocimiento. En particular, se utilizan los constructos teóricos propuestos por la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990, 1996, 2005, 2007, 2008, 2010), para describir las respuestas de algunos alumnos cuando se les propone un problema de interés compuesto. El análisis de los protocolos muestra la estrecha relación entre los sistemas de representación de los estudiantes y sus *invariantes operatorios* en la misma situación, siendo los sistemas de representación relacionados con el dominio analítico-gráfico los que más dificultades presentan a los estudiantes.

Palabras clave: Conceptualización- Sistemas de Representación-Funciones exponenciales-Enseñanza Secundaria –.

1. Introducción

La importancia de la enseñanza de la *función exponencial* en la escuela secundaria está muy ligada a su relevancia en la modelización de diversos fenómenos. La comprensión de estos modelos resulta indispensable para entender situaciones cada vez más cercanas a cualquier ciudadano actual. Por ejemplo: el aumento del dinero puesto a interés compuesto, el crecimiento de la deuda que genera el interés de una tarjeta de crédito; el avance de las epidemias en una población, o la durabilidad de los efectos de la radiación en el medio ambiente etc., requieren de *funciones exponenciales* más o menos complejas. Pero la comprensión de estos acontecimientos se obstaculiza si solo se dispone de esquemas mentales lineales, pues se asimilan los modelos no lineales a los lineales (Confrey, 1994; Karrer y Magina, 2000; Villareal et al., 2005; Ramírez et al. 2010). Los esquemas mentales lineales de las personas son el producto de un largo proceso de construcción que se inicia con su propia participación en situaciones cotidianas que requieren, en su gran mayoría, ser modeladas mediante variaciones lineales. Mientras que los esquemas no lineales, y en particular los *exponenciales*, son más complejos pues se apoyan parcialmente en las estructuras aditivas y multiplicativas. Pero dado que la escasa participación de las personas en este tipo de situaciones no colabora con su construcción, interesa estudiar qué situaciones ayudan a la conceptualización de las *funciones exponenciales*, y cómo inciden los sistemas de representación sobre ésta.

2. Marco Teórico

Este trabajo se centra en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, y utiliza la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990, 1996, 2005, 2007, 2008, 2010), a

partir de ahora TCC. Esta teoría postula que si se está interesado en la enseñanza de conceptos, no se los debe reducir a su definición, pues es través de las *situaciones* y de los problemas que se pretenden resolver como un *concepto* adquiere sentido para el sujeto (Vergnaud, 1990: 133). Así, la TCC define al *concepto* como un triplete de tres conjuntos: C (S; I.O; S.R):

- La referencia [S]: Es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto. Para Vergnaud, una situación tiene el carácter de tarea.
- El significado [I.O]: Es el conjunto de *invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)* sobre los cuales reposa la operacionalidad de los *esquemas*. Estos conceptos y teoremas pueden ser implícitos o explícitos; más o menos formales; y correctos o incorrectos. Su carácter de IO descansa en que hacen operatorio el esquema.
- El significante [S.R]: Son los sistemas de representación. Es decir, el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el *concepto*, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento. En este trabajo se utilizan los sistemas de representación numérico (SRN: refiere a los cálculos con números), algebraico (SRA1: involucra aquellos procedimientos algebraicos en el que los parámetros se corresponden con la situación; SRA2: refiere a los procedimientos algebraicos en el que los parámetros no están inicializados), analítico-gráfico (SRG: refiere a la construcción gráfica en ejes cartesianos), y verbal escrito (SRVE: son las formas lingüísticas escritas).

El carácter pragmático de la construcción del concepto *función exponencial*, no permite reducir el *significado*, ni a los *significantes*, ni a las *situaciones*, pues el *significado* viene dado por ambos. Por lo tanto, al estudiar el desarrollo de los *conceptos* relativos a las *funciones exponenciales*, se consideran estos tres planos a la vez.

3. Metodología

Para el estudio del *campo conceptual* de las *funciones exponenciales* en la escuela secundaria, se diseñó un conjunto de 12 situaciones de enseñanza. Luego de una prueba piloto, el conjunto de situaciones fue readaptado e implementado en dos cursos de quinto año (13-14 años), por una profesora de matemática integrante del equipo de investigación. La escuela donde se llevó a cabo el estudio piloto y las dos implementaciones, atienden a sectores urbanos medios y medios bajos. Cada intervención se registró mediante un audio general, y se recogieron los protocolos de los 61 estudiantes, clase a clase. Esta recolección sistemática de los protocolos resulta indispensable, debido a que para el estudio de la conceptualización se necesita acceder a las primeras estrategias formuladas por los estudiantes.

4. Análisis de los Datos y Resultados Parciales

La implementación del conjunto de situaciones, se realizó luego de que los alumnos habían estudiado las funciones lineales vinculadas al interés simple, habían calculado porcentajes y conversado acerca de la tasa de interés en el modelo lineal. Así, y dado que las primeras tres situaciones se diseñaron en torno a un problema que está vinculado con la capitalización a interés compuesto; se comenzó la implementación con una discusión acerca de qué significa colocar dinero en un plazo fijo a interés compuesto. Es decir, se acordó que al poner una cierta cantidad de dinero a interés compuesto, por ejemplo con una tasa de interés del 1%, cada mes se obtiene un 1% más que el mes anterior. Convenido esto, se propuso la primera situación. En esta primera situación,

dada la tasa de interés de tres bancos y el dinero obtenido a partir del primer mes de capitalización, se solicitó a los estudiantes una representación gráfica de la variación del dinero en un sistema de ejes coordenados dado, calculando para tres meses cualesquiera, y que se expresara verbalmente qué función se utilizaba. Para inhibir los IO ligados a los problemas de escala, se propusieron los ejes cartesianos. A continuación se presentan y describen las resoluciones de tres alumnos: A14, A2 y A15 que resultan ser representativos de tres diferentes estrategias de resolución.

En el protocolo de A14 se advierte que los *invariantes operatorios* que parecen dirigir los cálculos del dinero a obtener en los tres primeros meses en cada banco, están

A14 12/55/2009

Situación 1

Un grupo de chicos tiene \$12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de 0,011 y les permite tener \$12132 cumplido el primer mes.
 La tasa mensual del **Banco 2** es de 0,012 y les permite tener \$12144 cumplido el primer mes.
 La tasa mensual del **Banco 3** es de 0,013 y les permite tener \$12156 cumplido el primer mes.

a) ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?
 b) Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.

c) ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?

Recordá que es muy importante dejar todas las cuentas que haces en la hoja, y no borrar nada de lo que escribas.

$12000 \rightarrow 100\%$ $132 = x \rightarrow 1,1\%$	BANCO 1	$12132 \rightarrow 100\%$ $133,45 = x \rightarrow 1,1\%$	$12265,45 \rightarrow 100\%$ $134,9 = x \rightarrow 1,1\%$
$12000 \rightarrow 100\%$ $144 = x \rightarrow 1,2\%$		BANCO 2	$12144 \rightarrow 100\%$ $145,32 = x \rightarrow 1,2\%$
$100\% \rightarrow 12000$ $1,3\% \rightarrow x = 156$	BANCO 3	$12156 \rightarrow 100\%$ $159,02 = x \rightarrow 1,3\%$	$12314,02 \rightarrow 100\%$ $160,08 = x \rightarrow 1,3\%$

ⓐ) Dejamos que no es una función lineal porque no aumenta lo mismo todos los meses, es decir que la pendiente varía y no corresponde a la fórmula

vinculados al porcentaje y la regla de tres simple. Este cálculo recursivo, permitiría obtener un crecimiento exponencial del dinero en el sistema de representación numérico [SRN]. Sin embargo, en el sistema de representación ligado al dominio gráfico el

alumno dibuja, usando los primeros tres puntos que calculó, tres rectas que se extienden más allá de dichos puntos; lo cual indicaría que para él el dinero crece linealmente. Entonces, esta construcción gráfica parece involucrar *invariantes operatorios* lineales; mientras la inmediata anterior relativa al cálculo del dinero sería guiada por invariantes no lineales. Finalmente cuando se pregunta qué función representó gráficamente, A14 contesta: “dedujimos que no es una función lineal porque no aumenta lo mismo todos los meses, es decir que la pendiente varía y no corresponde a la fórmula”. Esta

A... (...; ...)

A2

Grupo 6

10/7/2009

2

Situación 1

Un grupo de chicos tiene \$12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del Banco 1 es de 0,011 y les permite tener \$12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del Banco 2 es de 0,012 y les permite tener \$12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del Banco 3 es de 0,013 y les permite tener \$12156 cumplido el primer mes.

a) ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?

b) Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores. ¿A qué función corresponde la Representación Gráfica que dibujaste? → Corresponde a una función lineal

Recordá que es muy importante dejar todas las cuentas que haces en la hoja, y no borrar nada de lo que escribas.

Mes	Ban. 1	Ban. 2	Ban. 3
1	$12000 \cdot 0,011 + 12000 = 12132$	$12000 \cdot 0,012 + 12000 = 12144$	$12000 \cdot 0,013 + 12000 = 12156$
2	$12132 \cdot 0,011 + 12000 = 12266,32$	$12144 \cdot 0,012 + 12000 = 12400,8$	$12156 \cdot 0,013 + 12000 = 12657,28$
3			

A) los bancos multiplicaron el monto inicial que los chicos tenían por el interés que ~~ellos~~ les ofrecían. El resultado fue ~~ellos~~ los dio el interés de los sumas al monto inicial.

verbalización [SRVE] también está basada en *invariantes operatorios* no lineales. En síntesis, la resolución de este alumno parece estar guiada por invariantes no lineales en dos de los sistemas de representación [SRN y SRVE], y lineales en el SRG.

Los cálculos del alumno A2, parecen guiados por *invariantes operatorios* relativos a la función lineal, el interés simple y el interés compuesto. Así, mediante el cálculo iterativo del interés simple, el alumno A2 logra un crecimiento exponencial del dinero

en el SRN. Luego, con esa información construye la grafica, y une los puntos ubicados en los ejes cartesianos, mediante una recta. En este caso, la construcción de la recta en el SRG se corresponde con su respuesta en el SRVE; pues afirma que la función es lineal. Es decir que, este alumno resuelve en forma no lineal en el sistema de representación numérico, y en forma lineal en los otros dos.

A15 A15 2/2/2009

Situación 1

Un grupo de chicos tiene \$12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de 0,011 y les permite tener \$12132 cumplido el primer mes.
 La tasa mensual del **Banco 2** es de 0,012 y les permite tener \$12144 cumplido el primer mes.
 La tasa mensual del **Banco 3** es de 0,013 y les permite tener \$12156 cumplido el primer mes.

a) ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?
 b) Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.

c) ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?

Recordá que es muy importante dejar todas las cuentas que haces en la hoja, y no borrar nada de lo que escribas.

a) El 1,1% de 12000 = 132 132 + 12000 = 12132
 • El 1,2% de 12000 = 144 144 + 12000 = 12144
 • El 1,3% de 12000 = 156 156 + 12000 = 12156

b) 12000 = Banco 1 Banco 2 Banco 3
 mes 1 = 12132 mes 1 = 12144 mes 1 = 12156
 mes 2 = 12264 mes 2 = 12288 mes 2 = 12312
 mes 3 = 12396 mes 3 = 12432 mes 3 = 12468

c) A una función lineal es de tipo $f(x) = m \cdot x + b$

El alumno A15 resuelve linealmente en los tres sistemas de representación [SRN, SRG y SRVE]. A diferencia de los otros dos casos, este alumno calcula el dinero según la ley de interés simple. Así, es posible advertir una preponderancia de *invariantes operatorios* vinculados al interés simple, sobre la selección de la información. Tal como establece la TCC, los *invariantes operatorios* guían la selección de la información y la acción. Esto explicaría por qué este alumno no selecciona la información brindada por el profesor como relevante para la resolución de la tarea.

5. Discusión

Los protocolos arriba presentados, muestran que en la misma situación y más aún el mismo alumno, utiliza diferentes *invariantes operatorios* según cada sistema de representación. Al parecer el SRN sería el que menos dificultades presenta, quizás por tratarse del dominio numérico, que es bien conocido por los alumnos. En cambio, los sistemas de representación relacionados al dominio analítico gráfico [SRG] y verbal escrito [SRVE] presentan más dificultades. De los 61 protocolos analizados, sólo dos alumnos (uno de los cuales es A14) reconocieron en el SRVE que la función no podía ser lineal porque no variaba lo mismo cada vez. Sin embargo, esto no se refleja en el dominio gráfico, donde dibujan una recta. En el SRG solo diez de los 61 alumnos unieron los puntos uno a uno, sin construir rectas. Pero los diez, las identificaron como funciones lineales en el SRVE. Por otro lado, los protocolos de los trece alumnos que resolvieron esta primera situación en forma totalmente lineal (uno de los cuales es el alumno A15), muestran que ellos no consideraron relevante la información relativa al interés compuesto. Así, los invariantes operatorios que parecen guiar sus resoluciones en los tres sistemas de representación [SRN, SRG y SRVE], son lineales. La resolución de A15, evidencia un esquema lineal complejo y completo que se expresa en todos los SR que utiliza para resolver la situación.

6. Reflexiones finales

La conceptualización de la *variación exponencial* es un concepto complejo, que se apoya en la aplicación recursiva de un procedimiento lineal. Dicha complejidad y el peso de los esquemas lineales se evidencian en el hecho de que los alumnos en la misma situación y dependiendo del sistema de representación, utilizan *invariantes* diferentes, es decir, esquemas diferentes, a veces lineales, a veces exponenciales. Por otro lado, cuando el estudiante solo está en posesión del esquema lineal, lo utiliza coherentemente con todos los esquemas de representación. Esto es lógico y muestra que la posesión plena del esquema exponencial, deberá involucrar los diferentes SR ligados al concepto. Se ha visto aquí, que aún cuando se pretenda ayudar a la conceptualización, allanando los problemas de escala, los alumnos representan a las *variaciones exponenciales* como lineales si sus esquemas exponenciales son aún incipientes.

7. Referencias Bibliográficas

- Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 26, n. 2-3, p. 31-60.
- Karrer, M., & Magina, S. (2000). Uma seqüência de ensino para a introdução delogaritmo: estudo exploratório usando a calculadora. *Boletim de Educação Matemática*. Año 13, n. 14, p. 18-31.
- Ramirez, G., Chavarría, J., Borbón, A. & Alpizar, G. (2010). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso. *Actas del sexto CIEMAC*. Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/6toCIEMAC/Ponencias/A_Alpizar.pdf
- Villarreal, M. E., Esteley, C. B., & Alagia, H. R. (2005). As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*. Año 18, n. 23, p. 23-40.
- Vergnaud, G. (2009, 2010, 2011). Comunicación personal con María Rita Otero. Université Paris 8, 12/09-03/10 y 05/11.

Vergnaud, G. (2008). Comunicación personal con María Rita Otero. *Functions, concepts and schemes*. A reply to Rita Otero. February 28.

Vergnaud, G. (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. *Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*. ISBN 978-950-658-183-1. Tandil.

Vergnaud, G. (2005). en *Sur la théorie des situations didactiques. Hommage a Guy Brousseau*. La Pensée Sauvage, Édition.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.