La luz y Al-Mutamán, el brillante rey matemático de Zaragoza

por

ÁNGEL REQUENA FRAILE

El 20 de diciembre de 2013, la Organización de las Naciones Unidas (ONU), en su 68.ª Asamblea Anual proclamó 2015 como el Año Internacional de la Luz y las Tecnologías basadas en la Luz.

Las Naciones Unidas pretenden con la celebración resaltar la importancia de las tecnologías fotónicas en nuestra vida cotidiana. Por otra parte se desea conmemorar el milenio del *Libro de óptica* de Alhacén, el sabio de Basora que muestra como se puede hacer ciencia experimental y reflexión teórico-matemática en el siglo XI.

El renacimiento medieval europeo del siglo XIII y la revalorización de la matemática deben mucho al redescubrimiento de la óptica matemática. El reconocimiento de la óptica de Euclides por Robert Grosseteste, y la de Alhacén por Roger Bacon, John Pecham y Witelo inicia el camino que nos condujo hasta Galileo, Kepler, Descartes y Newton.

El nivel matemático de la obra de Alhacén, en especial de su libro V, reflexión en espejos circulares, es de tal calado que se pensaba que solo Christiaan Huygens en el siglo XVII se había atrevido a simplificar las propuestas. Pero ya a finales del siglo XI hubo un matemático que no solo entendió la obra del de Basora sino que la mejoró: ese sabio fue rey de la taifa de Zaragoza entre 1081 y 1085 y se llamaba Yusuf Al-Mutaman ben Hud.

Yusuf Al-Mutaman ben Hud

El acontecimiento más esperado del *XIX Congreso Internacional de Historia de la Ciencia* que se celebró en agosto de 1993 en Zaragoza, gracias al empeño y entusiasmo del profesor Mariano Hormigón, fue la conferencia en el Palacio de la Aljafería de Jan P. Hogenduk[1] (Universidad de Utrech) sobre la obra de Al-Mutaman ben Hud, uno de los reyes de Zaragoza que habitó el palacio.

Quizá desde su biblioteca y palacio en la fortaleza de Rueda de Jalón, en la tranquilidad del alejamiento de la corte, Al-Mutamán tuvo el sosiego de redactar su inmenso *Istikmal, Libro de la perfección*, una verdadera enciclopedia matemática que *hace superfluos los demás libros de Euclides, Arquímedes o Menelao*, según decía Ibn Aqnin en el siglo XII.

Del *Istikmal* no se conserva ningún manuscrito completo. Copenhague, Leiden, El Cairo y Damasco archivan partes cuyo solapamiento permite reconstruir hasta el 75 % de la obra.

La síntesis de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ibn Qurra y Alhacén son más que mera recopilación y suma. Al-Mutamán descubre teoremas originales como el atribuido a Ceva y su organización en géneros y especies revelan su intento de replanteamiento de los libros de matemáticas.

Será en la reformulación de los lemas de Alhacén para encontrar el punto de reflexión en un espejo circular, convexo o cónico, donde tendremos una gran prueba de que al-Mutaman no era un diletante sino un brillante matemático.

La Óptica como parte de la Matemática

Aristóteles en su Física clasifica las matemáticas aplicadas en óptica, armonía y astronomía. De hecho la óptica de rayos tiene a los matemáticos Euclides, Herón y Ptolomeo como sus principales teóricos de la antigüedad.

La formulación de las leyes de la óptica por los sabios griegos es totalmente axiomática:

Óptica[2] de Euclides: 7 postulados y 58 proposiciones.
Catóptrica[3] de Euclides: 6 postulados y 30 proposiciones.
Catóptrica de Herón: 18 proposiciones.
Catóptrica de Arquímedes: perdida
Óptica, Catóptrica y Dióptrica[4] de Ptolomeo: cinco libros.

Curiosamente la óptica griega fue mayoritariamente partidaria de la *extromisión*: la visión se produce por los rayos que salían del ojo y llegaba al objeto visualizado. Alhacén dará el salto a la intromisión: la pirámide visual llega al ojo, no parte de él.

La reflexión de la luz

La ley de la reflexión, *ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión*, ya fue formulada por Euclides. A Herón debemos la brillante idea de que se trata del camino mínimo[5]. El planteamiento de la reflexión en espejos curvos fue tratado sistemáticamente por Ptolomeo y vamos a detenernos un poco en su planteamiento.

La reflexión de la luz en una superficie plana es un problema muy elemental y de fácil resolución geométrica: basta unir el simétrico del objeto con el observador mediante una línea recta. La reflexión múltiple en un billar es igual de sencilla y suele ser un ejercicio divertido que solemos usar en los talleres de matemáticas (figura 1).

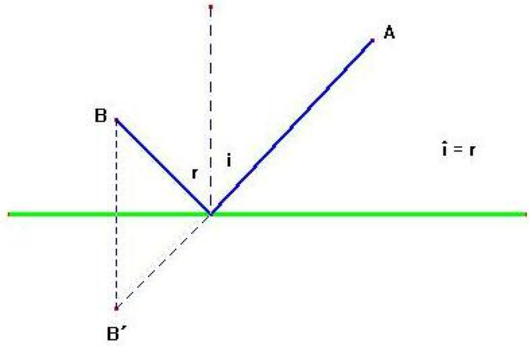

Figura 1

También es fácil calcular la reflexión en un espejo circular cuando la distancia al centro de la circunferencia del observador y el objeto es la misma: la bisectriz del ángulo central nos da el punto de reflexión (figura 2).

La reflexión en un espejo convexo es única o no hay visión porque el espejo oculta el objeto. Caso más interesante es el de un espejo cóncavo donde puede haber hasta cuatro reflexiones. Hoy sabemos que el problema se puede resolver de forma algebraica con una ecuación polinómica de cuarto grado (que puede tener dos o cuatro soluciones reales). Ptolomeo no supo resolver geométricamente los casos generales pero sí teorizó las distintas situaciones con el caso particular de la imagen y el objeto simétricos respecto al radio (figura 3).

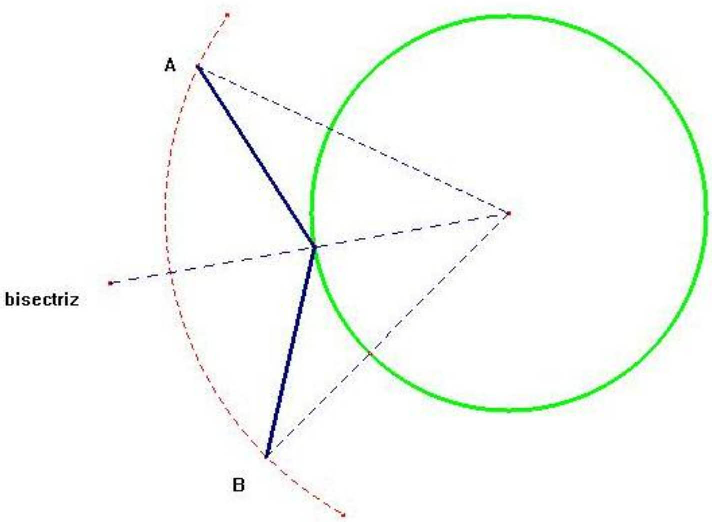

Figura 2

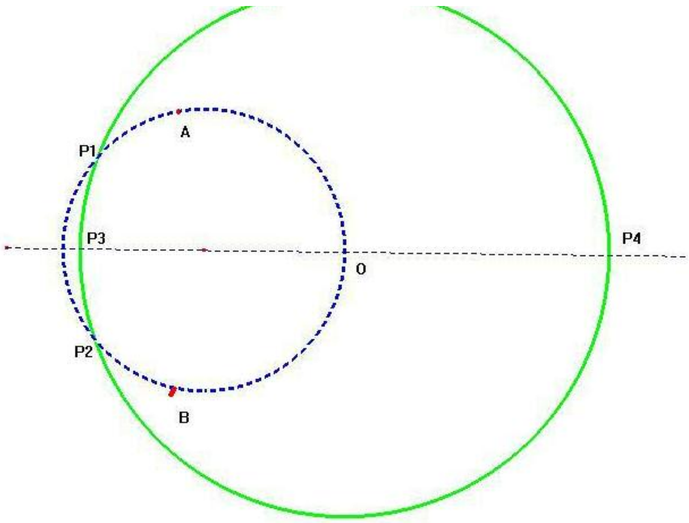

Figura 3

La circunferencia punteada se construye con los puntos A (observador), B (objeto) y O (centro del espejo). A y B son simétricos respecto al radio. Los puntos P3 y P4 siempre son soluciones mientras que P1 y P2 solo lo serán si la circunferencia auxiliar corta al espejo. Por tanto hay cuatro o dos soluciones.

Ptolomeo plantea el problema general de la reflexión en espejo circular pero no lo resuelve. Realmente el llamado *Problema de Alhacén* debería ser *Problema de Ptolomeo* con *Solución de Alhacén.*

El Problema de Alhacén

La solución de la reflexión en un espejo circular cóncavo o convexo por procedimientos puramente geométricos nos asombra por su virtuosismo. ¿Cómo llego Alhacén a resolverlo? Creemos que con mucho insomnio.

Un bonito artículo en castellano del colombiano Carlos Alberto Cardona[6] especula sobre las posibles vías de la solución y nos expone la compleja resolución del problema para el caso convexo.

La solución de Alhacén (Libro V de la Óptica, proposición 18 y siguientes) se logra mediante la intersección de una circunferencia y una hipérbola. Pero antes ha habido que reducir el problema a la ingeniosa inserción de una recta en un triangulo rectángulo que cumpla unas condiciones de proporcionalidad. Como trabajo previo, Alhacén necesitó seis lemas que van acotando la solución.

Consideramos el *Problema de Alhacén* más difícil que el otro prodigio del álgebra geométrica árabe: la sistematización y resolución de las ecuaciones de tercer grado hecha por Omar Jayyam un siglo después.

Al-Mutamán, el *Problema de Alhacén* y su posible importancia histórica

El rey de Zaragoza no se limitó a entender el tan difícil problema de la reflexión en espejo curvo, y acometió la siempre tan matemática tarea de hacerlo más comprensible y sencillo. Al-Mutaman modifica los lemas y logra una simplificación de algo que sigue muy lejos del nivel de la enseñanza secundaria.

El primer género del *Libro de la perfección* (circa 1081) de Al-Mutamán fue muy leído en árabe entre los siglos XII y XIV. Probablemente el segundo género no se llegarán a terminar. La decadencia cultural del mundo árabe casi ha hecho desaparecer la obra del sabio rey. Algo parecido le ocurre al *Libro de Óptica* de Alhacén. Sólo se ha conservado en árabe un ejemplar.

En contraste con la carencia de copias árabes, el *Libro de Óptica* traducido al latín en el siglo XII como *De aspectibus* se encuentra en múltiples manuscritos conventuales del XII al XV. Muchos más si contamos a sus comentaristas, la versión fácil de Pecham y la más respetuosa de Witelo. La edición crítica moderna se realiza en Basilea por Risner en 1572 con el nombre *Opticae Thesaurus Alhazenis arabis*.

El *Tesoro de óptica* es el seguro punto de partida de los trabajos decisivos de Kepler, Galileo, Descartes, Huygens y Newton: todos investigadores de la óptica matemática y del nuevo y potente instrumento astronómico, el telescopio.

El grado de conocimiento de Al-Mutamán de la obra de Alhacén, la segura posesión de su libro de *Óptica*, el hecho de que se divulgara tan poco en árabe (sólo se ha conservado un ejemplar) han llevado a Hogenduk a una especulación fundamentada: el libro que se tradujo en el siglo XII en la península ibérica, y que disparó su estudio en Occidente, pudo ser el manuscrito que manejaba Al-Mutamán.

¡Paradojas de la historia! La gran contribución a la historia de la ciencia por parte de un matemático tan brillante como el rey zaragozano puede haber sido traer a Occidente la obra de Alhacén. Los profundos estudios y mejoras de Al-Mutamán sobre Alhacén entraron en vía muerta y se apartaron de la corriente principal. Quizá hasta el siglo XVI nadie entendió al de Basora como el de Zaragoza, pero el manuscrito de Zaragoza fue protagonista. Este es el verdadero manuscrito y no la novela gótica de Jan Potocki.

Aplicaciones didácticas con *GeoGebra*

Los escolares de hoy pueden resolver, jugando, el dificilísimo *Problema de Alhacén* y verificar cuántas soluciones tiene con la ayuda de la geometría dinámica de *GeoGebra*. Me limito a hacer algunas sugerencias.

Lo primero tras plantear el interés e importancia del *Problema* es cambiar el enunciado: trabajamos sin luz y rayos sino con dos bolas de un *billar circular:* caso cóncavo de Alhacén.

Según el tiempo que queramos dedicar, podremos probar o limitarnos a enunciar que si unimos cualquier punto de una elipse con sus focos, la normal en ese punto forma el mismo ángulo con los dos radiovectores a los focos. O lo que es lo mismo: *toda bola que salga del foco de un espejo elíptico pasa por el otro foco.*

El *Problema de Alhacén* se reduce con *Geogebra* a encontrar los casos posibles de tangencia entre la circunferencia espejo y la elipse que tiene por focos las dos bolas (figura 4). Según la disposición de las bolas se encontrarán cuatro o dos soluciones.

El espejo convexo es, además, una forma bonita de buscar los distintos puntos de reflexión y verificar con hoja de cálculo que el camino mínimo es el que cumple la ley de los ángulos. Algo parecido se puede hacer para deducir la ley de Snell (Ibn Sahl) de la refracción en el caso de superficie plana y haciendo mínimo el tiempo.

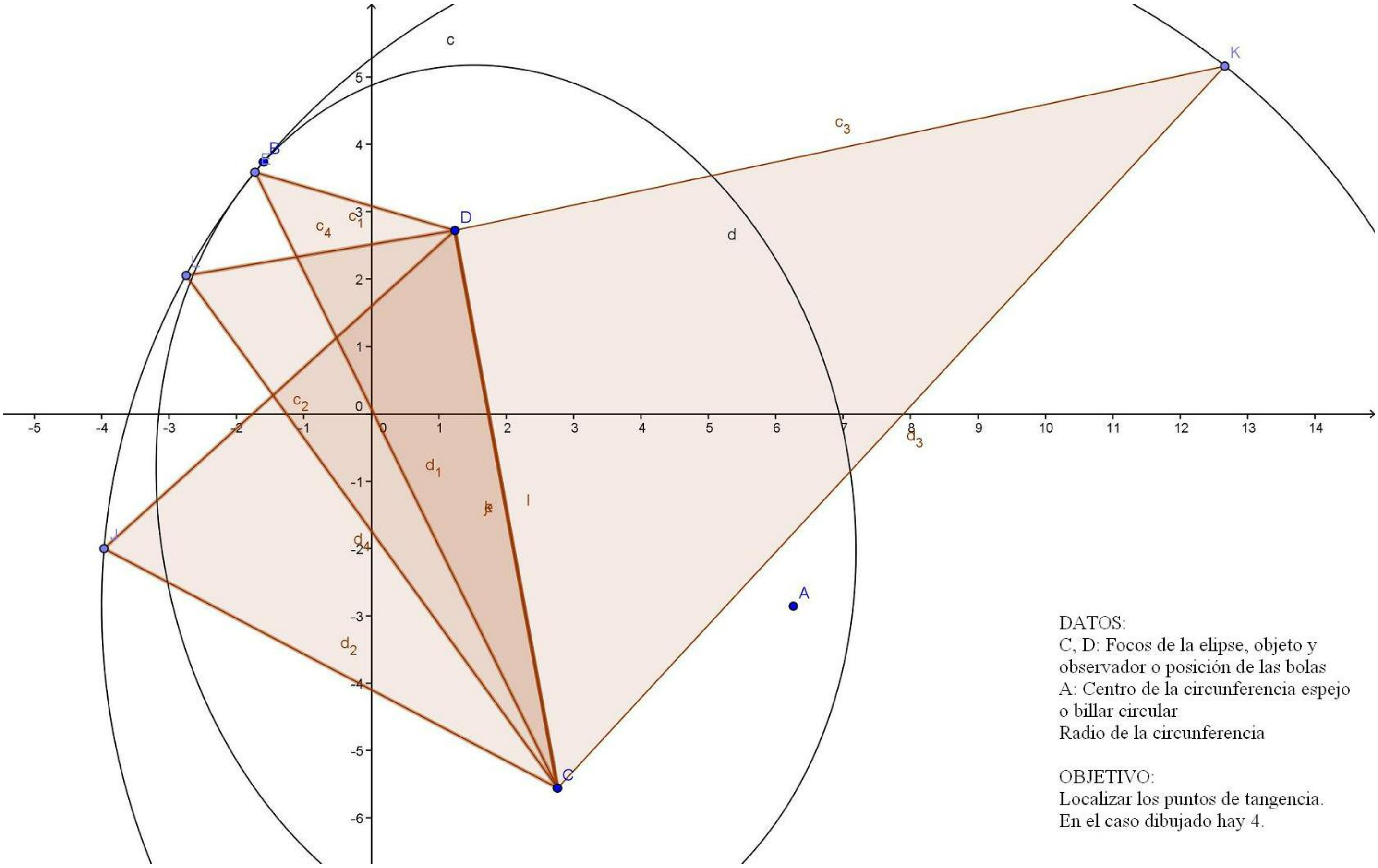

Figura 4

1 «Al-Mu´taman ibn Hüd, 11th Century King of Zaragoza and Brilliant Mathematician», Historia Mathematica, 22 (1995), 1-18

2 Hay edición española del siglo XVI.

3 Catóptrica: reflexión de la luz en espejos.

4 Dióptrica: refracción de la luz al cambiar de medio.

5 Realmente es tiempo mínimo pero en espejo plano es lo mismo que tiempo por no producirse cambio de velocidad, mismo medio.

6 Carlos Alberto Cardona Suárez, «El problema de Alhacén», *Revista Asclepio*, vol LXIV, 1 (2012), 251-276.